

亜群 C^* 環のアーベル化について

慶應義塾大学理工学研究科基礎理工学専攻

紅村 冬大 ^{*}(FUYUTA KOMURA)

概要

本稿ではエタール亜群の商を導入し、亜群 C^* 環のアーベル化が亜群の言葉で記述できることを紹介する。また、エタール亜群の full uniqueness property と effectiveness の関係についても述べる。

0 Introduction

C^* 環論は関数解析学における一分野であり、無限次元かつ非可換な C^* 環が主な興味の対象となる。 C^* 環の具体例として、離散群から得られる群 C^* 環や離散力学系から得られる接合積、有向グラフから得られるグラフ C^* 環がある。これらを一般化する C^* 環の構成法が、エタール亜群による C^* 環の構成である。エタール亜群に付随する C^* 環 (亜群 C^* 環) の研究は 1980 年に Renault によって始められた [9]。エタール亜群の例には離散群や離散力学系、有向グラフから得られるものがあるが、それらに付随する亜群 C^* 環は既知の C^* 環と一致する。したがって、亜群 C^* 環は広いクラスの C^* 環を含むと考えられている。

エタール亜群と亜群 C^* 環の関係を調べることは基本的な問題である。ハウスドルフ性を満たすエタール亜群の亜群 C^* 環については、これまでにすでに多くのことが示されている。ハウスドルフ性を満たすとは限らないエタール亜群に関しては、その亜群 C^* 環は十分に調べられているとは言えない。しかしながら、Connes や Exel が指摘するように、ハウスドルフ性を満たさないようなエタール亜群は自然に現れる [4],[6]。ハウスドルフ性を満たすエタール亜群に関して知られていた結果が、ハウスドルフでないエタール亜群に関しては成り立たないことがあると Exel によって 2011 年に指摘されている [5]。

本稿では、エタール亜群の商を導入し、亜群 C^* 環のアーベル化がエタール亜群の言葉で記述できることを紹介する。エタール亜群の商は元のエタール亜群がハウスドルフであってもハウスドルフ性を満たすとは限らないので、初めからエタール亜群にはハウスドルフ性を仮定せずに議論することが重要となる。エタール亜群の商を用いることで、エタール亜群の full uniqueness property という性質が effective という性質を導くことを紹介する。この結果は、すでに [1] にてハウスドルフ性を満たすエタール亜群に対して示されていた命題であるが、エタール亜群の商を用いるとより直接的な証明が得られる。

次に、商を用いてエタール亜群のアーベル化を構成し、エタール亜群のアーベル化から得られる亜群

^{*} fuyuta.k@keio.jp

C*環が元の亜群 C*環のアーベル化となることを紹介する. また, エタール亜群のアーベル化が本稿で導入される双対亜群によって記述できることも紹介する.

本稿は主に [7] の内容を元になっている.

1 C*環

本節では C*環の定義や例を紹介する. 詳しくは作用素環論の教科書 [11] や [2] などの教科書を参照せよ.

*-代数とは, 積, 対合 (involution) を持つ $\mathbb{C}$ 線形空間のことである. C*環とは, ノルムを持つ*-代数 A で, 任意の $a, b \in A$ に対し $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, $\|a^*a\| = \|a\|^2$ が成り立つもののことである. C*環は必ずしも積の単位元を持っている必要はない.

Example 1.1. X を局所コンパクトハウスドルフ空間とする. $C_0(X)$ を X 上の無限遠で消える複素数値連続関数からなる集合とする. ここで, 連続関数 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ が無限遠で消えるとは任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ がコンパクト集合となることである. X がコンパクトである時, $C_0(X)$ は X 上の連続関数全体からなる集合 $C(X)$ と一致する.

$C_0(X)$ は各点での演算によって $\mathbb{C}$ 代数となり, 各点での複素共役によって対合が定まり*-代数となる. また, $f \in C_0(X)$ のノルムを $\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$ によって定めると, $C(X)$ は C*環となる. Gelfand-Naimark の定理により, 任意の単位的な可換 C*環はある $C(X)$ と同型になる.

Example 1.2. Hilbert 空間 H に対し, H 上の有界線形作用素全体からなる集合を $B(H)$ とする. $B(H)$ は自然な構造によって C*環となる.

A, B を C*環とする. 写像 $\varphi: A \rightarrow B$ が線形で積, involution を保つ時, φ を*-準同型と呼ぶ. 特に, $B(H)$ への*-準同型を表現と呼ぶことがある.

A を C*環とする. $\{xy - yx \in A \mid x, y \in A\}$ によって生成される A のイデアルを I とし, A のアーベル化を $A^{\text{ab}} := A/I$ と定める. A^{ab} は以下の普遍性を満たす可換 C*環である.

Proposition 1.3. A を C*環, $Q: A \rightarrow A/I$ を商写像とする. 任意の可換 C*環 B と*-準同型 $\pi: A \rightarrow B$ に対し,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\pi} & D \\ Q \downarrow & \nearrow \tilde{\pi} & \\ A^{\text{ab}} & & \end{array}$$

を可換にするような*-準同型 $\tilde{\pi}: A^{\text{ab}} \rightarrow B$ が一意に存在する.

2 エタール亜群と亜群 C*環

本節ではエタール亜群と亜群 C*環の定義をする. 詳しくは [9] や [10], [8] などのテキストを参照せよ.

垂群とは全ての射が可逆な小圏である. 本稿では次のような記号を用いる;
垂群 G は

- unit space と呼ばれる部分集合 $G^{(0)} \subset G$,
- source map と range map $s, r: G \rightarrow G^{(0)}$,
- $G^{(2)} \subset G \times G$ 上で定義されている積

$$G^{(2)} := \{(\alpha, \beta) \in G \times G \mid s(\alpha) = r(\beta)\} \ni (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta \in G$$

で構成され, これらは以下を満たす;

1. 任意の $x \in G^{(0)}$ に対し, $s(x) = r(x) = x$ が成り立つ,
2. 任意の $(\alpha, \beta) \in G^{(2)}$ に対し, $s(\alpha)\beta = \beta$ と $\alpha r(\beta) = \alpha$ が成り立つ,
3. 任意の $(\alpha, \beta) \in G^{(2)}$ に対し, $s(\alpha\beta) = s(\beta)$ と $r(\alpha\beta) = r(\alpha)$ が成り立つ,
4. 任意の $(\alpha, \beta), (\beta, \gamma) \in G^{(2)}$ に対し, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ が成り立つ,
5. 任意の $\gamma \in G$ に対し, ある $\gamma' \in G$ が存在して $(\gamma', \gamma), (\gamma, \gamma') \in G^{(2)}$, $s(\gamma) = \gamma'\gamma$ と $r(\gamma) = \gamma\gamma'$ が成り立つ.

上の 5 における γ' は γ によって一意に決定されるので, γ' を γ^{-1} と表す.

集合 $F \subset G^{(0)}$ に対し, $G_F := s^{-1}(F)$, $G^F := r^{-1}(F)$, と定義する. 特に, $x \in G^{(0)}$ に対し $G_x := G_{\{x\}}$, $G^x := G^{\{x\}}$ と定義する.

積 $G^{(2)} \ni (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta \in G$ と inverse $G \ni \alpha \mapsto \alpha^{-1} \in G$ が連続になる位相を備えた垂群 G を, 位相垂群と呼ぶ. 任意の $\alpha \in G$ に対し $s(\alpha) = \alpha^{-1}\alpha$, $r(\alpha) = \alpha\alpha^{-1}$ が成り立つことから, 位相垂群の source map と range map は連続である.

X, Y を位相空間とし, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. f が局所同相写像であるとは, 任意の $x \in X$ に対し x の開近傍 $U \subset X$ が存在し, $f(U) \subset Y$ が開集合となり, $f|_U$ が像への同相写像となることである. 局所同相写像は開写像となることがわかる.

Definition 2.1. G を位相垂群とする. G がエタールであるとは, $G^{(0)} \subset G$ が局所コンパクトハウスドルフ空間であり, かつ source map $s: G \rightarrow G^{(0)}$ が局所同相写像となることである. エタール位相垂群を単にエタール垂群と呼ぶ.

Remark 2.2. G がエタールであることの定義に $G^{(0)} \subset G$ の局所コンパクトハウスドルフ性を含めることは一般的ではない. また, 本稿ではエタール垂群全体のハウスドルフ性は仮定しない.

G をエタール垂群とする. 任意の $\alpha \in G$ に対し $r(\alpha) = s(\alpha^{-1})$ が成り立つことから, $r: G \rightarrow G^{(0)}$ も局所同相写像となる. また, source map と range map はそれぞれ G から G への写像としても局所同相写像となることが分かる. 特に, $G^{(0)}$ は G の開部分集合となる. 一方, $G^{(0)}$ が G の閉部分集合であることと G が Hausdorff であることが同値となることが知られている.

開集合 $U \subset G$ が bisection であることを, $s|_U, r|_U$ が単射になることと定義する. 定義より, エタール垂群の位相は bisection 全体によって生成されている. 特に, エタール垂群の位相は局所コンパクトハウスドルフである開集合によって生成されている.

エタール垂群は文献によって r -discrete 垂群と呼ばれるが, それは以下の命題が成り立つからであ

ると考えられる.

Proposition 2.3. G をエタール亜群, $x \in G^{(0)}$ とする. このとき, G_x, G^x は相対位相に関し離散集合になる.

PROOF. $\alpha \in G_x$ とする. $\alpha \in U$ となる bisection $U \subset G$ をとる. $s|_U$ が単射であることから $U \cap G_x = \{\alpha\}$ となり, G_x は離散集合となる. G^x が離散集合であることも同様に示される. $\square$

一方で, 任意の $x \in G^{(0)}$ に対し G_x と G^x が離散であっても, G がエタールであるとは限らない.

エタール亜群 G に対し, C^* 環 $C^*(G)$ を構成する. G がハウスドルフ性を満たす時は, G 上のコンパクトサポートを持つ連続関数全体からなるベクトル空間 $C_c(G)$ に積と involution を定め, その完備化として亜群 C^* 環 $C^*(G)$ を定義する. G がハウスドルフ性を満たさないとき, G 上の連続関数を考えるだけでは G の情報を捉えきることができない. そこで, G 上の “局所的に連続” な関数の集合を考えることが重要となる.

$U \subset G$ を bisection とする. U 上のコンパクト台を持つ複素数値連続関数のなすベクトル空間を $C_c(U)$ と書く. $C_c(U)$ の元 f を, $G \setminus U$ 上で 0 と定義することで G 上の関数と同一視する. G がハウスドルフでないとき, f は G 上の関数として連続であるとは限らない.

$C(G)$ を, $\bigcup_U C_c(U)$ の linear span と定義する. ここで, $\bigcup_U C_c(U)$ は G の bisection 全体に関する和集合を考えている. つまり, $C(G)$ の元 f は G 上の関数であり, ある有限個の bisection $U_j \subset G$ と有限個の関数 $f_j \in C_c(U_j)$ を用いて $f = \sum_j f_j$ と表される. $C(G)$ は関数の和, スカラー倍によってベクトル空間となる. $C(G)$ に $*$ -代数の構造を定めるべく, $C(G)$ の積, involution を定める.

Definition 2.4. G をエタール亜群, $f, g \in C(G)$ とする. f と g の積 $f * g$ と f の involution f^* を以下のように定める;

$$f * g(\gamma) := \sum_{\alpha\beta=\gamma} f(\alpha)g(\beta), \quad f^*(\gamma) := \overline{f(\gamma^{-1})}.$$

以上の構造に関して, $C(G)$ は $*$ -代数となる.

$G^0 \subset G$ は bisection であるから, $C_c(G^{(0)}) \subset C(G)$ である. $C(G)$ の積, involution は $C_c(G^{(0)})$ 上では関数の各点での積, 複素共役に一致する. したがって, $C_c(G^{(0)})$ は $C(G)$ の $*$ 部分環となる.

$C(G)$ を完備化すべく, $C(G)$ に C^* ノルムを定める. $C(G)$ の C^* ノルムとして universal ノルムと reduced ノルムがよく用いられるが, 本稿では $C(G)$ の C^* ノルムとして universal ノルムしか扱わない.

Definition 2.5. G をエタール亜群とする. $f \in C(G)$ に対し, その universal ノルムを

$$\|f\| := \sup\{\|\pi(f)\| \mid \pi: C(G) \rightarrow B(H) \text{ は } * \text{表現}\}$$

と定める. $C(G)$ の universal ノルムによる完備化を $C^*(G)$ と書き, G の full 亜群 C^* 環と呼ぶ.

Remark 2.6. universal ノルムが実際に $C(G)$ の C^* ノルムを定めることは非自明な事実である. 詳しくは [8]などを参照せよ.

$\pi: C(G) \rightarrow B(H)$ を表現とする. universal ノルムの定義から任意の $f \in C(G)$ に対し $\|\pi(f)\| \leq \|f\|$ が成り立つ. したがって, π は $C^*(G)$ 上の表現に拡張される. この事実は断りなく用いることがある.

$C_c(G^{(0)}) \subset C(G)$ という包含関係があったが, これは $C_0(G^{(0)}) \subset C^*(G)$ に拡張される. 特に, $C_0(G^{(0)})$ は $C^*(G)$ の部分 C^* 環である.

3 Main theorem

本節では, [7] の主結果を紹介する. 前半ではエタール亜群の full uniqueness property について, 後半では亜群 C^* 環のアーベル化について説明する.

3.1 エタール亜群の商

Definition 3.1. G を亜群, H を部分亜群とする. H が正規であるとは, $G^{(0)} \subset H \subset \text{Iso}(G)$ が成り立ち, かつ任意の $\alpha \in G$ に対し $\alpha^{-1}H\alpha \subset H$ が成り立つことと定義する.

Definition 3.2. G を亜群, $H \subset G$ を正規部分亜群, $\alpha, \beta \in G$ とする. $s(\alpha) = s(\beta)$ かつ $\alpha\beta^{-1}$ が成り立つ時, $\alpha \sim \beta$ と書く. この時, $\sim$ は G の同値関係を定める. この同値関係による G の商集合を G/H と書く.

G を亜群, H を正規部分亜群とする. この時, 商写像 $q: G \rightarrow G/H$ が亜群の準同型となるような G/H の亜群の構造がただ一つ定まる.

G が位相亜群であるとき, G/H の位相は商位相を考える.

Theorem 3.3. G をエタール亜群, H を開正規部分亜群とする. このとき, 以下が成り立つ;

1. G/H はエタール亜群となる.
2. 商写像 $q: G \rightarrow G/H$ は局所同相写像となる.
3. 以下のエタール亜群の列

$$H \xhookrightarrow{\text{包含写像}} G \xrightarrow{q} G/H$$

は完全となる, つまり $q^{-1}((G/H)^{(0)}) = H$ が成り立つ.

Proposition 3.4. G をエタール亜群, H を開正規部分亜群とする. この時, G/H がハウスドルフ性を満たすことと $H \subset G$ が閉集合であることは同値である.

位相群の部分群は開であつたら閉であるが, エタール亜群の部分亜群が開であること, 閉であることに相関はない. したがって, ハウスドルフ性を満たさないエタール亜群はエタール亜群の商として自然に現れる.

エタール亜群の商は, 亜群 C^* 環に $*$ -準同型を導入する.

Proposition 3.5. G をエタール亜群, $H \subset G$ を開部分亜群, $q: G \rightarrow G/H$ を商写像とする. $f \in C(G)$ に対し, $\tilde{f}: G/H \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\tilde{f}(\gamma) = \sum_{q(\alpha)=\gamma} f(\alpha), \quad \gamma \in G/H$$

によって定める. この時, $\tilde{f} \in C(G/H)$ であり, $C(G) \ni f \mapsto \tilde{f} \in C(G/H)$ は全射*-準同型である. したがって, 全射*-準同型 $C^*(G) \rightarrow C^*(G/H)$ が導かれる.

Definition 3.6. G をエタール亜群とする. G が full uniqueness property を持つとは, 任意の 0 でないイデアル $I \subset C^*(G)$ に対し $I \cap C_0(G^{(0)}) \neq \{0\}$ が成り立つことである.

G が full uniqueness property を持つことと, G が「表現 $\pi: C^*(G) \rightarrow B(H)$ に対し, π が単射であることと $\pi|_{C_0(G^{(0)})}$ が単射となることが同値」という条件を満たすことは同値である. Full uniqueness property は, $C^*(G)$ のイデアル構造を調べる際に重要となる. 例えば, $C^*(G)$ が full uniqueness property を持ち, G が minimal ならば $C^*(G)$ は simple となる. したがって, G がいつ full uniqueness property を持つか否かを調べることは重要である.

Full uniqueness property の十分条件について述べる. [1, Proposition 5.5] において, エタール亜群 G に対し, G が full uniqueness property を持つならば G は effective である」という命題が示されている. エタール亜群の商を用いると, 本命題 (Proposition 3.7) が簡単に示されることが [7] にてわかった.

Proposition 3.7. G をエタール亜群, $H \subset G$ を開部分亜群とする. Proposition 3.5 によって導かれる全射*-準同型を $Q: C^*(G) \rightarrow C^*(G/H)$ と書く. この時, $\ker Q \cap C_0(G^{(0)}) = \{0\}$ である. 特に, G が full uniqueness property を持つならば G は effective, つまり $G^{(0)} = \text{Iso}(G)^\circ$ である.

Full uniqueness property の十分条件について, [1] や [3] の結果を紹介する. G がハウスドルフ性と第二可算公理を満たすとき, effectiveness が full uniqueness property の十分条件となることが [1, Proposition 5.5] で示されている. 近年, [3, Theorem 4.4] において G の被約亜群 C^* 環 $C_\lambda^*(G)$ が 0 でない“特異な元”を持たず G が effective であるとき, $C_\lambda^*(G)$ が uniqueness property を持つことが示された^{*1}. 以上のことを踏まえると, 次の定理を得る (被約亜群 C^* 環の定義については [8] を参照せよ).

Theorem 3.8 (cf.[3, Theorem 4.4]). G を第二可算公理を満たすエタール亜群とする. このとき, G が full uniqueness property を満たすことは以下の 3 条件と同値である;

- $C^*(G)$ が $C_\lambda^*(G)$ と自然な全射*-準同型を通して同型となる,
- G は effective となる,
- $C_\lambda^*(G)$ は 0 でない特異な元を持たない.

3.2 亜群 C^* 環のアーベル化

G をエタール亜群とする. 本章では, 亜群 C^* 環 $C^*(G)$ のアーベル化が亜群の言葉で記述できることを紹介する.

離散群に関しては, その full 群 C^* 環のアーベル化は簡単に計算できる. Γ を離散群とする. full 群 C^* 環 $C^*(\Gamma)$ のアーベル化は, $C^*(\Gamma^{\text{ab}})$ と同型になる. ここで, Γ^{ab} は Γ の群としてのアーベル化である. また, $\widehat{\Gamma^{\text{ab}}}$ を可換離散群 Γ^{ab} のポントリャーギン双対とすると, $C^*(\Gamma^{\text{ab}})$ は $C(\Gamma^{\text{ab}})$ と同型になる. 本章では, これらの類似現象がエタール亜群に対しても成り立つことを紹介する. [7] では, エタール亜群 G

^{*1} 特異な元の定義は [3] を参照せよ.

に対しエタール亜群 G^{ab} やその双対亜群 $\widehat{G^{\text{ab}}}$ を導入し, $C^*(G) \simeq C^*(G^{\text{ab}}) \simeq C_0(\widehat{G^{\text{ab}}})$ となることを示した. G^{ab} はエタール亜群の商を通して構成されるので, 一般に G^{ab} はハウスドルフ性を満たすとは限らない. 位相を考える必要があまりない離散群の場合と違い, G^{ab} はハウスドルフ性を満たすとは限らず扱いが困難である. [4]

G を, $G = \text{Iso}(G)$ を満たすエタール亜群とする. このとき, 任意の $x \in G^{(0)}$ に対し $G_x = G^x = G_x \cap G^x$ が成り立ち, G_x は離散群となる. G の交換子亜群を $[G, G] := \bigcup_{x \in G^{(0)}} [G_x, G_x]$ と定める. ここで, $[G_x, G_x]$ は G_x の交換子群である.

Proposition 3.9. G を, $G = \text{Iso}(G)$ を満たすエタール亜群とする. $[G, G]$ は G の開正規部分亜群である.

G を一般のエタール亜群とする. $x \in G^{(0)}$ が G の不動点であるとは, $r(G_x) = \{x\}$ が成り立つことである. G の不動点全体からなる集合を $F \subset G^{(0)}$ とし, $G_{\text{fix}} := G_F$ とする. 不動点の定義から, $G_{\text{fix}} = \text{Iso}(G_{\text{fix}})$ が成り立つ. また, F は $G^{(0)}$ の閉集合となり, G_{fix} は再びエタール亜群となる.

$G^{\text{ab}} = G_{\text{fix}}/[G_{\text{fix}}, G_{\text{fix}}]$ と定義する. 関数の制限 $C(G) \ni f \mapsto f|_{G_{\text{fix}}} \in C(G_{\text{fix}})$ は, 全射*-準同型 $C^*(G) \rightarrow C^*(G_{\text{fix}})$ を導く. この全射*-準同型を Proposition 3.5 によって導かれる全射*-準同型 $C^*(G_{\text{fix}}) \rightarrow C^*(G^{\text{ab}})$ と合成することで, 全射*-準同型 $\pi: C^*(G) \rightarrow C^*(G^{\text{ab}})$ を得る. $C^*(G^{\text{ab}})$ は可換 C^* 環であることがわかるので, $C^*(G)^{\text{ab}}$ の普遍性から

$$\begin{array}{ccc} C^*(G) & \xrightarrow{\pi} & C^*(G^{\text{ab}}) \\ \downarrow Q & \nearrow \bar{\pi} & \\ C^*(G)^{\text{ab}}, & & \end{array}$$

を可換にする*-準同型 $\bar{\pi}: C^*(G)^{\text{ab}} \rightarrow C^*(G^{\text{ab}})$ が存在する. ここで, $Q: C^*(G) \rightarrow C^*(G)^{\text{ab}}$ は商写像である. [7] において, 以下の定理を示した.

Theorem 3.10 ([7, Theorem 3.2.4]). $\bar{\pi}: C^*(G)^{\text{ab}} \rightarrow C^*(G^{\text{ab}})$ は同型写像となる.

G をエタール亜群とする. Gelfand-Naimark の定理から, $C^*(G^{\text{ab}})$ と $C_0(X)$ が同型になるような局所コンパクトハウスドルフ空間 X が存在する. この X を具体的に計算する.

可換離散群 Γ に対し, その Pontryagin 双対を $\widehat{\Gamma}$ と表す. $\widehat{\Gamma}$ はコンパクト可換群となる.

G を $G = \text{Iso}(G)$ となるエタール亜群とし, 任意の $x \in G^{(0)}$ に対し G_x が可換群になっているとする (このような G をエタール abelian group bundle と呼ぶ). G の双対亜群を, $\widehat{G} := \{(\chi, x) \mid x \in G^{(0)}, \chi \in \widehat{G_x}\}$ と定義する. $\widehat{G}$ は自然な abelian group bundle の構造を持つ. また, $\widehat{G}$ には $f \in C(G)$ による evaluation から定まる位相が定まる (詳しくは, [7, Definition 3.3.3] を参照せよ).

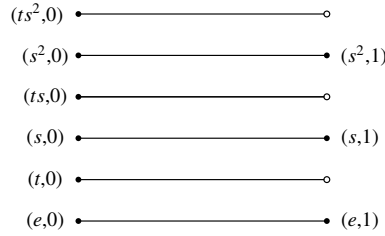
Proposition 3.11 ([7, Proposition 3.3.4]). G をエタール abelian group bundle とする. このとき, $\widehat{G}$ は局所コンパクトハウスドルフ位相亜群となる. また, $C^*(G)$ と $C_0(\widehat{G})$ は同型となる.

G をエタール亜群とする. このとき, G^{ab} はエタール abelian group bundle になるのであった.

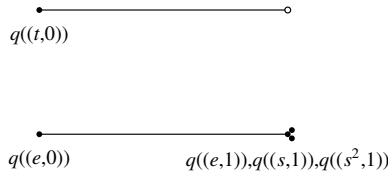
Corollary 3.12 ([7, Corollary 3.3.5]). G をエタール亜群とする. このとき, $C^*(G^{\text{ab}})$ と $C_0(\widehat{G^{\text{ab}}})$ は同型となる.

以上より, $C^*(G)^{\text{ab}}$ は $C^*(G^{\text{ab}})$, $C_0(\widehat{G^{\text{ab}}})$ と同型になることがわかった.
 G^{ab} や $\widehat{G^{\text{ab}}}$ の簡単かつ非自明な計算例をあげる.

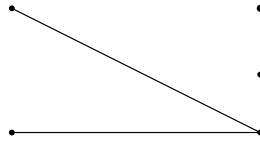
Example 3.13. $\mathfrak{S}_3 = \langle s, t \mid s^3 = t^2 = e, st = ts^2 \rangle = \{e, s, s^2, t, ts, ts^2\}$ を 3 次対称群とする. また, $A_3 := \{e, s, s^2\} \subset \mathfrak{S}_3$ を偶置換がなす $\mathfrak{S}_3$ の正規部分群とする. エタール垂群 G を, $G := \mathfrak{S}_3 \times [0, 1] \setminus \{(t, 1) \mid t \notin A_3\}$ と定める. G は, $G = \text{Iso}(G)$ を満たす. G は以下のように書ける;



$[G, G]$ は G の閉でない開集合である. したがって, Proposition 3.4 より $G^{\text{ab}} = G/[G, G]$ はハウスドルフでないエタール垂群となる. 実際, $q: G \rightarrow G^{\text{ab}}$ を商写像として, G^{ab} は以下のような図になる;



$\widehat{G^{\text{ab}}}$ は以下のようになる;



$\widehat{G^{\text{ab}}}$ はエタールではないことに注意せよ.

本稿では full 垂群 C^* 環 $C^*(G)$ のアーベル化を計算した. 次の課題として, 被約垂群 $C^*_\lambda(G)$ のアーベル化の計算が挙げられる. 離散群 Γ に関しては, $C^*_\lambda(\Gamma)^{\text{ab}} = C^*(\Gamma)^{\text{ab}}$ であることと Γ が従順群であることは同値である. また, $C^*_\lambda(\Gamma)^{\text{ab}} = \{0\}$ であることと Γ が非従順群であることは同値である (離散群の従順性とその特徴付けについては [2] を参照せよ). これらの現象を鑑みると, 被約垂群 C^* 環のアーベル化の計算には従順性などの解析的な性質に関わり, full 垂群 C^* 環の場合より難しいように思われる.

参考文献

- [1] J. Brown, L. O. Clark, C. Farthing, and A. Sims. Simplicity of algebras associated to étale groupoids. *Semigroup Forum*, **88**(2):433–452, 2014.
- [2] N. P. Brown and N. Ozawa. *C*-algebras and Finite-dimensional Approximations*. Graduate studies

in mathematics. American Mathematical Soc., 2008.

- [3] L. O. Clark, R. Exel, E. Pardo, A. Sims, and C Starling. Simplicity of algebras associated to non-Hausdorff groupoids. [arXiv:1806.04362](#), 2018.
- [4] A. Connes. A survey of foliations and operator algebras. In *Proc. Sympos. Pure*, volume **38**, pages 521–628, 1982.
- [5] R. Exel. Non-Hausdorff étale groupoids. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **139**(3):897–907, 2011.
- [6] R. Exel and E. Pardo. The tight groupoid of an inverse semigroup. *Semigroup Forum*, 92(1):274–303, Feb 2016.
- [7] F. Komura. Quotients of étale groupoids and the abelianizations of groupoid C^* -algebras. [arXiv:1812.07194](#).
- [8] A. Paterson. *Groupoids, Inverse Semigroups, and their Operator Algebras*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, 2012.
- [9] J. Renault. *A Groupoid Approach to C^* -Algebras*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1980.
- [10] A. Sims. Hausdorff étale groupoids and their C^* -algebras. [arXiv:1710.10897v1](#), 2017.
- [11] M. Takesaki. *Theory of Operator Algebras I*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2001.