トーリック多様体の第 2 Chern 指標

大阪大学大学院理学研究科数学専攻
須山 雄介 (Yusuke SUYAMA) *

概要

本研究は佐藤拓氏（福岡大学）との共同研究である．非特異トーリック Fano 多様体に関しては，分類するアルゴリズムをはじめ数多くの研究があるが，Fano 多様体の高次化として，第 2 Chern 指標と任意の曲面との交点数が正である Fano 多様体を考えることができ，これを 2-Fano 多様体という．しかし，2-Fano 多様体は多くはなく，トーリック 2-Fano 多様体はこれまでのところ射影空間以外に例が知られていない．本稿では，$\mathbb{Q}$-分解的な場合にトーリック 2-Fano 多様体の類似を考え，そのような具体例を構成する．

1　トーリック多様体と扇

n 次元**トーリック多様体**とは，$\mathbb{C}$ 上の正規代数多様体 X であって，**代数的トーラス** $(\mathbb{C}^*)^n$ を稠密な開集合として含み，$(\mathbb{C}^*)^n$ の自分自身への自然な作用を X 全体への作用に拡張するものである．

例 1.1. 代数的トーラス自身 $(\mathbb{C}^*)^n$, アフィン空間 $\mathbb{C}^n$, 射影空間 $\mathbb{P}^n$ は n 次元トーリック多様体である．

2 つのトーリック多様体 X, X' は，代数多様体としての同型 $f : X \to X'$ で次を満たすものが存在するとき**同型**であるという．

(1) f は代数的トーラスの間の同型 $f' : (\mathbb{C}^*)^n \to (\mathbb{C}^*)^n$ を誘導する．
(2) f は f' に関し同変である，すなわち，任意の $t \in (\mathbb{C}^*)^n$ と $x \in X$ に対し，$f(tx) = f'(t)f(x)$ が成り立つ．

トーリック多様体は，扇とよばれる多面錐の有限集合から構成することができる．

定義 1.2. (1) $\mathbb{R}^n$ の**有理強凸多面錐**とは，$\mathbb{Z}^n$ の有限個のベクトル $v_1, \dots, v_r$ で張られる多面錐 $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}v_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}v_r$ で，$\mathbb{R}^n$ の 0 でないいかなる部分空間も含まないものである．
(2) $\mathbb{R}^n$ の**扇**とは，$\mathbb{R}^n$ の有理強凸多面錐からなる空でない有限集合 Δ で次を満たすものである．
  (i) $\sigma \in \Delta$ ならば，σ の各面もまた Δ に属する．
  (ii) $\sigma, \tau \in \Delta$ ならば，$\sigma \cap \tau$ はそれぞれの面である．

特に，$\{0\}$ は有理強凸多面錐であり，任意の扇は $\{0\}$ を含む．

---

* 本研究は科研費 (課題番号:18J00022) の助成を受けたものである．

$\mathbb{R}^n$ の扇 Δ からトーリック多様体 $X(\Delta)$ を構成する．まず，各有理強凸多面錐 $\sigma \in \Delta$ からアフィン代数多様体 U_σ を構成する．$\sigma^\vee = \{u \in \mathbb{R}^n \mid$ すべての $v \in \sigma$ に対し $\langle u, v\rangle \geq 0\}$ とおくと，$\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n$ は和に関し可換モノイドになり，モノイド環 $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n]$ は $\mathbb{C}$ 上有限生成な整域になる．したがって $\mathrm{Spec}\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n]$ はアフィン代数多様体になるので，これを U_σ とおく．次にこれらを貼り合わせる．τ が σ の面ならば，包含写像 $\tau \to \sigma$ はモノイドの準同型 $\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n \to \tau^\vee \cap \mathbb{Z}^n$ を定め，更にこれが定める射 $U_\tau = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[\tau^\vee \cap \mathbb{Z}^n] \to \mathrm{Spec}\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n] = U_\sigma$ は開埋め込みになる．これにより U_τ を U_σ の開部分集合と同一視し，U_σ たちを貼り合わせてできる代数多様体が求めるトーリック多様体 $X(\Delta)$ である．

注意 1.3. 更に，扇 Δ のデータから代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ のトーリック多様体 $X(\Delta)$ への作用を定めることができるが，本研究ではトーラスの作用は考えないので本稿では省略する．

例 1.4. (1) $0 \leq k \leq n$ に対し，$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}e_k \subset \mathbb{R}^n$ とすると，$U_\sigma = \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^{n-k}$ である．

(2) $\mathbb{R}^2$ の扇 Δ を

$$\begin{aligned}\Delta =& \{\{0\}, \mathbb{R}_{\geq 0}e_1, \mathbb{R}_{\geq 0}e_2, \mathbb{R}_{\geq 0}(-e_1 - e_2),\\ &\mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}e_2, \mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}(-e_1 - e_2), \mathbb{R}_{\geq 0}e_2 + \mathbb{R}_{\geq 0}(-e_1 - e_2)\}\end{aligned}$$

で定めると（図 1），3 個の 2 次元多面錐に対応するアフィン代数多様体はいずれも $\mathbb{C}^2$ であり，それらが貼り合わさって $X(\Delta) = \mathbb{P}^2$ となる．

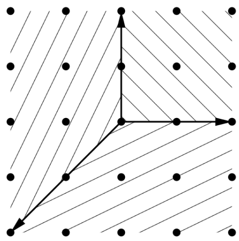

図 1　$\mathbb{P}^2$ を定める扇．

$\mathbb{R}^n$ の 2 つの扇は，$\mathbb{Z}^n$ の自己同型でそれらの間の全単射を誘導するものが存在するとき**同型**であるという．

定理 1.5. n 次元トーリック多様体の同型類と，$\mathbb{R}^n$ の扇の同型類は，上述の構成法により 1 対 1 に対応する．

トーリック多様体は非常に特別な代数多様体であり，例えば同じ次元のトーリック多様体はすべて双有理同値であるが，定理 1.5 により，扇を与えることにより一般次元の代数多様体を具体的に数多く構成することができ，多様体の性質を，より扱いやすい扇の側で調べることができる．また，多面錐は $\mathbb{Z}^n$ のベクトルで張られるので，コンピューターとも相性がよい．

注意 1.6. (1) より正確には，トーリック多様体，扇にはそれぞれ射を定義することができて圏をなし，定理 1.5 の対応は圏同値を定める．

(2) トーリック多様体というと，空間だけでなく作用も込めて考えている．しかし，2 つの非特異で完備なトーリック多様体に対しては，代数多様体として同型であることと，トーリック多様体として同型であることは同値である [11].

2 トーリック多様体と扇の関係

$\mathbb{Z}^n$ のベクトルで，成分の最大公約数が 1 であるものを**原始ベクトル**とよぶ．Δ を $\mathbb{R}^n$ の扇とする．$\sigma \in \Delta$ の各 1 次元面に対し，それを張る原始ベクトルがただ 1 つ存在し，σ はそれらで張られる．

定義 2.1. Δ を $\mathbb{R}^n$ の扇とする．$\sigma \in \Delta$ に対し，$v_1, \dots, v_k$ を σ の 1 次元面を張る原始ベクトル全体とする．

(1) Δ が**非特異**であるとは，各 $\sigma \in \Delta$ に対し，$v_1, \dots, v_k$ が $\mathbb{Z}^n$ の基底に延長できることである．
(2) Δ が**単体的**であるとは，各 $\sigma \in \Delta$ に対し，$v_1, \dots, v_k$ が $\mathbb{R}^n$ の基底に延長できることである．
(3) Δ が**末端的**であるとは，各 $\sigma \in \Delta$ に対し，$u \in (\mathbb{Z}^n)^*$ と正整数 j が存在して，$\langle u, v_1 \rangle = \cdots = \langle u, v_k \rangle = j$ かつ任意の $v \in (\sigma \cap \mathbb{Z}^n) \setminus \{0, v_1, \dots, v_k\}$ に対し $\langle u, v \rangle > j$ となることである．
(4) Δ が**標準的**であるとは，各 $\sigma \in \Delta$ に対し，$u \in (\mathbb{Z}^n)^*$ と正整数 j が存在して，$\langle u, v_1 \rangle = \cdots = \langle u, v_k \rangle = j$ かつ任意の $v \in (\sigma \cap \mathbb{Z}^n) \setminus \{0\}$ に対し $\langle u, v \rangle \geq j$ となることである．
(5) Δ が**完備**であるとは $\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma = \mathbb{R}^n$ となることである．

上の定義はトーリック多様体の性質に対応しており，これによりトーリック多様体に関する多くの問題が扇の問題に帰着される．

定理 2.2. Δ を $\mathbb{R}^n$ の扇とする．

(1) Δ が非特異であることと，$X(\Delta)$ が非特異であることは同値である．
(2) Δ が単体的であることと，$X(\Delta)$ が $\mathbb{Q}$-分解的であることは同値である．
(3) Δ が末端的であることと，$X(\Delta)$ が高々末端特異点のみをもつことは同値である．
(4) Δ が標準的であることと，$X(\Delta)$ が高々標準特異点のみをもつことは同値である．
(5) Δ が完備であることと，$X(\Delta)$ が完備であることは同値である．

明らかに，扇は非特異ならば単体的かつ末端的であり，末端的ならば標準的である．

注意 2.3. (1) $\mathbb{R}^n$ の単体的な扇は，$n-1$ 次元球面の三角形分割の各頂点に原始ベクトルを書いて表すと便利であり，これにより $n = 4$ でも図に描くことができる．
(2) アフィントーリック多様体 U_σ の構成の過程では反変関手を 2 度施しており，二度手間に見えるが，このように構成することにより，定理 2.2 (5) のように，トーリック多様体と扇の対応が見やすくなるのである．

トーリック多様体の Picard 数や Euler 標数も容易に求めることができる．扇 Δ の r 次元多面錐全体を $\Delta(r)$ で表す．

定理 2.4. Δ を $\mathbb{R}^n$ の完備な扇とする．

(1) $X(\Delta)$ が $\mathbb{Q}$-分解的ならば，$X(\Delta)$ の Picard 数は $|\Delta(1)| - n$ に一致する．
(2) $X(\Delta)$ が非特異ならば，$X(\Delta)$ の Euler 標数は $|\Delta(n)|$ に一致する．

Picard 数が 1 の非特異完備トーリック多様体は射影空間しかない．

例 2.5. 例 1.4 (2) の扇は非特異で完備であり，対応するトーリック多様体 $\mathbb{P}^2$ は確かに非特異で完備である．$\mathbb{P}^2$ の Picard 数は 1 であり，Euler 標数は 3 である．

トーリック多様体 $X(\Delta)$ が射影的かどうかを扇 Δ の側で判定する方法もあるが，一定の条件を満たす関数が存在するという条件であり，他に比べて複雑である（詳細は [14] を参照）．具体的に扇が与えられたときに，対応するトーリック多様体が射影的かどうかを判定するのは一般には容易ではない．しかし，非特異で Picard 数が 3 以下の完備トーリック多様体や，$\mathbb{Q}$-分解的で Picard 数が 2 以下の完備トーリック多様体は必ず射影的になることが知られている [9, 15]．本稿で構成するトーリック多様体は，$\mathbb{Q}$-分解的で Picard 数が 2 なので射影的である．

注意 2.6. 非特異完備トーリック多様体の基本群やコホモロジー環も扇の言葉で記述することができる．一方，2 つのトーリック多様体が微分同相であるための条件は一般次元では不明である．

3 トーリック Fano 多様体

反標準因子が豊富な多様体を **Fano 多様体**とよぶ．高々標準特異点のみをもつトーリック Fano 多様体は各次元に同型を除いて有限個しかなく，次元が低い所では実際に分類されている．

次元	1	2	3	4	5	6
非特異トーリック Fano 多様体の数	1	5	18	124	866	7,622
高々末端特異点のみをもつ Gorenstein トーリック Fano 多様体の数	1	5	100	166,841	?	?
高々末端特異点のみをもつ $\mathbb{Q}$-分解的トーリック Fano 多様体の数	1	5	233	?	?	?
高々末端特異点のみをもつ トーリック Fano 多様体の数	1	5	634	?	?	?
高々標準特異点のみをもつ Gorenstein トーリック Fano 多様体の数	1	16	4,319	473,800,776	?	?
高々標準特異点のみをもつ $\mathbb{Q}$-分解的トーリック Fano 多様体の数	1	16	12,190	?	?	?
高々標準特異点のみをもつ トーリック Fano 多様体の数	1	16	674,688	?	?	?

表 1　トーリック Fano 多様体の数 [8].

$\mathbb{Z}^n$ の有限部分集合の $\mathbb{R}^n$ における凸包を**整凸多面体**とよぶ．内部にある格子点が原点のみであるような整凸多面体を**標準的 Fano 多面体**とよび，2 つの標準的 Fano 多面体は，$\mathbb{Z}^n$ の自己同型で移り合うとき**ユニモジュラー同値**であるという．

$X(\Delta)$ を高々標準特異点のみをもつトーリック Fano 多様体とすると，Δ の 1 次元多面錐を張る原始ベクトル全体の凸包をとることで標準的 Fano 多面体が得られ，この対応により，高々標準特異点のみをもつ n 次元トーリック Fano 多様体の同型類と，$\mathbb{R}^n$ の n 次元標準的 Fano 多面体のユニモジュラー同値類は 1 対 1 に対応する．n 次元標準的 Fano 多面体の $n-1$ 次元の面が，扇の n 次元多面錐に対応する．整凸多面体の体積は内部の格子点の個数（0 個の場合を除く）を固定すると有界 [7, Theorem 3.6] であり，整凸多面体は体積を固定すると有限個しかない [10, Theorem 2] ので，特に標準的 Fano 多面体は各次元に有限個しかなく，したがって高々標準特異点のみをもつトーリック Fano 多様体も各次元に有限個しかない．

以下，$X(\Delta)$ を $\mathbb{Q}$-分解的で完備な n 次元トーリック多様体とし，$X(\Delta)$ が Fano かどうかを扇の側で判定する方法について解説する．Δ の r 次元多面錐 τ は，トーリック多様体 $X(\Delta)$ のトーラス不変（代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の作用で不変）な $n-r$ 次元閉部分多様体 $V(\tau)$ と 1 対 1 に対応する．特に，$D_1,\dots,D_m$ を $X(\Delta)$ のトーラス不変因子全体とすると，各 D_i には Δ の 1 次元多面錐 $\mathbb{R}_{\geq 0}v_i$ が対応する（v_i は原始ベクトル）．

定理 3.1. トーリック多様体 $X(\Delta)$ の反標準因子は $-K_{X(\Delta)} = D_1 + \cdots + D_m$ で与えられる．

トーリック多様体においては，因子が豊富かどうかを判定するには，トーラス不変な曲線との交点数を調べれば十分である．

定理 3.2. $X(\Delta)$ を完備な n 次元トーリック多様体とし，D をその上の Cartier 因子とする．このとき，D が豊富であることと，任意の $\tau \in \Delta(n-1)$ に対し，交点数 $(D \cdot V(\tau))$ が正になることは同値である．

そして，次の命題を繰り返し適用することにより，扇が具体的に与えられたとき，トーラス不変な部分多様体同士の交点数をいつでも計算できる．

命題 3.3. $X(\Delta)$ を $\mathbb{Q}$-分解的で完備な n 次元トーリック多様体とする．

(1) $\mathbb{R}_{\geq 0}v_{i_1} + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}v_{i_n} \in \Delta(n)$ ならば，

$$(V(\mathbb{R}_{\geq 0}v_{i_1}) \cdot \cdots \cdot V(\mathbb{R}_{\geq 0}v_{i_n})) = \frac{1}{|\det(v_{i_1},\dots,v_{i_n})|}$$

である．特に，Δ が非特異ならば右辺は 1 である．

(2) 相異なる $v_{i_1},\dots,v_{i_n}$ が Δ の n 次元多面錐を張らないならば，$(V(\mathbb{R}_{\geq 0}v_{i_1}) \cdot \cdots \cdot V(\mathbb{R}_{\geq 0}v_{i_n})) = 0$ である．

(3) 任意の $u \in (\mathbb{Z}^n)^*$ に対し，$\sum_{i=1}^m \langle u, v_i\rangle D_i \equiv 0$ である．

特に，非特異な場合には，反標準因子とトーラス不変曲線の交点数は次のようになる．

命題 3.4. $X(\Delta)$ を n 次元非特異完備トーリック多様体とし，$\tau = \mathbb{R}_{\geq 0}v_{i_1} + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}v_{i_{n-1}} \in \Delta(n-1)$

とする．v, v' を異なる原始ベクトルで，$\tau + \mathbb{R}_{\geq 0}v, \tau + \mathbb{R}_{\geq 0}v'$ がともに Δ の n 次元多面錐になるものとする．このとき，整数 $a_1, \ldots, a_{n-1}$ で $v + v' + a_1 v_{i_1} + \cdots + a_{n-1} v_{i_{n-1}} = 0$ を満たすものが一意的に存在し，$(-K_{X(\Delta)} \cdot V(\tau)) = 2 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$ となる．

4　トーリック 2-Fano 多様体

非特異トーリック Fano 多様体に関する研究は数多く，与えられた次元のトーリック Fano 多様体をすべて求めるアルゴリズムも知られている [13]．一方，Fano 多様体の高次化として，第 2 Chern 指標と，多様体上の任意の曲面との交点数が正であるという条件を考えることができる．このとき，第 2 Chern 指標は**正**であるといい，そのような非特異 Fano 多様体を **2-Fano 多様体**とよぶ．第 2 Chern 指標が正または非負の多様体について初めて研究したのは de Jong–Starr [4] であり，2-Fano という用語は後に [5] で導入された．[5] では，第 2 Chern 指標が非負の多様体のことを 2-Fano 多様体と呼んでいるが，[1] では第 2 Chern 指標が正の多様体のことを 2-Fano 多様体と呼んでおり，そちらの方が自然であるので，ここでも後者に従う．

注意 4.1. Tsen の定理の超曲面以外への一般化として，Graber–Harris–Starr [6] は，$\mathbb{C}$ 上の曲線の関数体 K 上の有理連結多様体が K-有理点をもつことを示した．2-Fano 多様体はこれの曲面版を考えようという研究の中で導入された．すなわち，多様体に対し，「有理単連結 (rationally simply connected)」という概念を定義した上で，そのような多様体に対し，Tsen の定理の曲面版と言える主張を示そうという問題である．De Jong–He–Starr [3] は定義の候補を与え，Tsen の定理の曲面版といえる定理を示しているが，更に多くの技術的な仮定が必要となっている．そこで，求める仮定が満たされると期待される，より自然な条件として導入されたのが 2-Fano のようである．詳細は [1] を参照して頂きたい．

2-Fano 多様体は数が少なく，例えば 3 次元 2-Fano 多様体は $\mathbb{P}^3$ と $\mathbb{P}^4$ の滑らかな 2 次超曲面しかない [1]．非特異完備トーリック多様体 $X(\Delta)$ の場合，Chern 指標は

$$\mathrm{ch}_k(X(\Delta)) = \frac{D_1^k + \cdots + D_m^k}{k!}$$

となり，$\mathrm{ch}_2(X(\Delta))$ が正であることを示すには，任意のトーラス不変曲面との交点数さえチェックすれば十分なので [12]，扇が与えられれば，トーリック多様体が 2-Fano かどうかはいつでも判定できる．しかし，第 2 Chern 指標が正のものは（Fano の仮定を落としても）これまでのところ射影空間以外に例が知られていない．実際，いくつかの特別なトーリック多様体のクラスでは，射影空間以外にトーリック 2-Fano 多様体は存在しないことがわかっている．

定理 4.2 (Sato [16])**.** Picard 数が 2 で第 2 Chern 指標が正のトーリック多様体は存在しない．

Building set とよばれる，有限集合の部分集合族からトーリック多様体を構成する方法があるが，そのようなトーリック多様体の中にも，2-Fano なものは射影空間しかないことがわかる．

定義 4.3. 空でない有限集合 S 上の **building set** とは，S の空でない部分集合からなる有限集合 B で次の条件を満たすものである．

(1) $I, J \in B$ かつ $I \cap J \neq \emptyset$ ならば，$I \cup J \in B$ である．
(2) 任意の $i \in S$ に対し，$\{i\} \in B$ である．

B の包含関係に関する極大元全体を $B_{\max}$ で表し，$B_{\max} = \{S\}$ のとき B は**連結**であるという．

定義 4.4. Building set B の **nested set** とは，$B \setminus B_{\max}$ の部分集合 N で次の条件を満たすものである．

(1) $I, J \in N$ ならば，$I \subset J, J \subset I, I \cap J = \emptyset$ のいずれかが成り立つ．
(2) 任意の $k \geq 2$ と，任意の pairwise disjoint な $I_1, \ldots, I_k \in N$ に対し，$I_1 \cup \cdots \cup I_k \notin B$ が成り立つ．

B の nested set 全体を $\mathcal{N}(B)$ で表す．

Building set B から扇 $\Delta(B)$ を構成する．まず，B が連結な場合を考える．$S = \{1, \ldots, n+1\}$ とする．$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とし，$e_{n+1} = -e_1 - \cdots - e_n$ とおく．$I \subset S$ に対し $e_I = \sum_{i \in I} e_i$ とおき，$N \in \mathcal{N}(B)$ に対し $\mathbb{R}_{\geq 0}N = \sum_{I \in N} \mathbb{R}_{\geq 0} e_I$ とおくと，$\Delta(B) = \{\mathbb{R}_{\geq 0}N \mid N \in \mathcal{N}(B)\}$ は $\mathbb{R}^n$ の扇になる．B が連結でない場合，$B = \bigsqcup_{C \in B_{\max}} B|_C$ と分解し，各 $B|_C$ は連結なので，$X(\Delta(B)) = \prod_{C \in B_{\max}} X(\Delta(B|_C))$ と定める．

例 4.5. $S = \{1, \ldots, n+1\}$ とする．

(1) $B = \{\{1\}, \ldots, \{n+1\}, \{1, \ldots, n+1\}\}$ とすると，B は S 上の building set であり，$X(\Delta(B)) = \mathbb{P}^n$ である．
(2) $B = 2^S \setminus \{\emptyset\}$ とすると，B は S 上の building set であり，$X(\Delta(B))$ は **permutohedral variety** とよばれる多様体になる．

定理 4.6 (S. [19])**.** Building set に伴うトーリック 2-Fano 多様体は射影空間のみである．

注意 4.7. Building set に伴うトーリック多様体は，De Concini–Procesi [2] が構成した **wonderful model** をトーリック多様体として構成し直したものである．Building set は元々は一定の条件を満たす subspace arrangement として定義され，本稿における定義はそれを特別な場合に抽象化したものである．[2] の記号を用いて wonderful model との関係を説明すると次のようになる．$V = \mathbb{C}^{n+1}$ とし，V^* の subspace arrangement $\mathcal{G}$ が $\langle e_1^* \rangle, \ldots, \langle e_{n+1}^* \rangle$ をすべて含み，その他の元がすべて $e_1^*, \ldots, e_{n+1}^*$ の一部で生成される場合を考える．このとき，$\overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{G}} = (\mathbb{C}^*)^n, \mathcal{C}_{\mathcal{G}} = \{\langle e_i^* \mid i \in I \rangle \mid \emptyset \neq I \subset \{1, \ldots, n+1\}\}, \mathcal{F}_{\mathcal{G}} = \{\langle e_1^* \rangle, \ldots, \langle e_{n+1}^* \rangle\}$ となる．$S = \{1, \ldots, n+1\}, B = \{I \subset S \mid \langle e_i^* \mid i \in I \rangle \in \mathcal{G}\}$ とおくと，$\mathcal{G}$ が [2] の定義での building set であることと，B が本稿の定義での building set であることは同値である．また，$\mathcal{G}$ が building set で $V^* \in \mathcal{G}$ ならば，$\mathcal{G} \setminus \{V^*\}$ の部分集合が $\mathcal{G}$-nested set であることと，対応する $B \setminus \{S\} = B \setminus B_{\max}$ の部分集合が本稿の定義での nested set であることは同値であり，$\overline{Y}_{\mathcal{G}} = X(\Delta(B))$ である．

同様に，トーリック 3-Fano 多様体や 4-Fano 多様体なども考えることはできるが，交点数の計算はより複雑になる．

5　主結果

そこで，2-Fano 多様体を研究する当初のモチベーションは忘れて，トーリック 2-Fano 多様体の特異版を考えることにする．非特異完備トーリック多様体 $X(\Delta)$ に対し

$$\mathrm{ch}_2(X(\Delta)) = \frac{D_1^2 + \cdots + D_m^2}{2}$$

となる事実に注目し，（必ずしも非特異でない）$\mathbb{Q}$-分解的な射影的トーリック多様体 $X(\Delta)$ に対し

$$\gamma_2(X(\Delta)) = D_1^2 + \cdots + D_m^2$$

とおく．トーリック多様体 $X(\Delta)$ は，その上の任意のトーラス不変曲面 S に対し交点数 $(\gamma_2(X(\Delta)) \cdot S)$ が正であるとき **γ_2-正**であるということにする．3 次元で高々末端特異点のみをもつ場合は，2-Fano の場合と同様に次が成り立つ．

定理 5.1 (Sato–Sumiyoshi [17])**.**　(1) $\mathbb{Q}$-分解的な射影的トーリック多様体は，Picard 数が 1 ならば γ_2-正である．

(2) $\mathbb{Q}$-分解的で高々末端特異点のみをもつ 3 次元トーリック Fano 多様体（233 種類）に対し，γ_2-正であることと Picard 数が 1 であることは同値である．

一方，4 次元以上では（特異ではあるが）$\mathbb{Q}$-分解的で高々末端特異点のみをもつ γ_2-正なトーリック Fano 多様体が Picard 数 2 で存在することがわかった．

例 5.2 (Sato–S. [18])**.** $\mathbb{R}^4$ において

$$x_1 = e_1,\ x_2 = e_2,\ x_3 = e_3,\ x_4 = e_4,\ x_5 = -e_1 - 2e_2 - e_3,\ x_6 = -e_2 - 2e_3 - e_4$$

とおき，扇 Δ を

$$\{\mathbb{R}_{\geq 0}x_{i_1} + \mathbb{R}_{\geq 0}x_{i_2} + \mathbb{R}_{\geq 0}x_{i_3} + \mathbb{R}_{\geq 0}x_{i_4} \mid i_1, i_2 \in \{1,2,5\}, i_3, i_4 \in \{3,4,6\}\}$$

とそれらの面全体として定義すると，対応するトーリック多様体 $X(\Delta)$ は $\mathbb{Q}$-分解的で高々末端特異点のみをもつ γ_2-正なトーリック Fano 多様体である．

例 5.3 (Sato–S. [18])**.** $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 4)$ において

$$x_1 = e_1,\ \ldots,\ x_{n-2} = e_{n-2},\ x_{n-1} = -(e_1 + \cdots + e_{n-2} + (n-2)e_{n-1}),\ x_n = e_{n-1},$$
$$y_1 = -(e_{n-1} + e_n),\ y_2 = e_n$$

とおき，扇 Δ を

$$\{\mathbb{R}_{\geq 0}x_1 + \cdots + \widehat{\mathbb{R}_{\geq 0}x_i} + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}x_n + \mathbb{R}_{\geq 0}y_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2\}$$

とそれらの面全体として定義すると，対応するトーリック多様体 $X(\Delta)$ は $\mathbb{Q}$-分解的で高々末端特異点のみをもつ γ_2-正なトーリック Fano 多様体である．

整凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^n$ は，原点を内点として含み，双対 $P^* = \{u \in \mathbb{R}^n \mid$ 任意の $v \in P$ に対し $\langle u, v \rangle \geq -1\}$ もまた整凸多面体になるとき**反射的**であるという．高々標準特異点のみをもつトーリック Fano 多様体が Gorenstein であることと，対応する標準的 Fano 多面体が反射的であることは同値である．例 5.2, 5.3 はどちらも Gorenstein ではないので，γ_2-正な Gorenstein トーリック Fano 多様体がどのくらい存在するかという問題も考えられる．2 次元の場合は，自明な例しか存在しない．

定理 5.4 (Sato–S. [18])**.** Gorenstein で射影的なトーリック曲面に対し，γ_2-正であることと Picard 数が 1 であることは同値である．

一方，3 次元では Picard 数が 2 のものが存在することがわかった．

例 5.5 (Sato–S. [18])**.** $\mathbb{R}^3$ において

$$x_1 = e_1,\ x_2 = e_2,\ x_3 = e_3,\ x_4 = -2e_2 - e_3,\ x_5 = -e_1 - e_2$$

とおき，扇 Δ を

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}_{\geq 0}x_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_2 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_3,\ \mathbb{R}_{\geq 0}x_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_2 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_4,\ \mathbb{R}_{\geq 0}x_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_3 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_4,\\ &\mathbb{R}_{\geq 0}x_2 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_3 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_5,\ \mathbb{R}_{\geq 0}x_2 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_4 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_5,\ \mathbb{R}_{\geq 0}x_3 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_4 + \mathbb{R}_{\geq 0}x_5\end{aligned}$$

とそれらの面全体として定義すると，対応するトーリック多様体 $X(\Delta)$ は $\mathbb{Q}$-分解的で γ_2-正な Gorenstein トーリック Fano 多様体である．

参考文献

[1] C. Araujo and A-M. Castravet, *Classification of 2-Fano manifolds with high index*, A Celebration of Algebraic Geometry **18** (2013), 1–36.

[2] C. De Concini and C. Procesi, *Wonderful models of subspace arrangements*, Selecta Math. (N.S.) **1** (1995), 459–494.

[3] A. J. de Jong, X. He and J. Starr, *Families of rationally simply connected varieties over surfaces and torsors for semisimple groups*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2011), no. 114, 1–85.

[4] A. J. de Jong and J. Starr, *A note on Fano manifolds whose second Chern character is positive*, arXiv:math/0602644.

[5] A. J. de Jong and J. Starr, *Higher Fano manifolds and rational surfaces*, Duke Math. J. **139** (2007), no. 1, 173–183.

[6] T. Graber, J. Harris and J. Starr, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 57–67.

[7] D. Hensley, *Lattice vertex polytopes with interior lattice points*, Pacific J. Math. **105** (1983), no. 1, 183–191.

[8] A. Kasprzyk and B. Nill, *Fano polytopes*, Strings, Gauge Fields, and the Geometry Behind, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2013, pp. 349–364.

[9] P. Kleinschmidt and B. Sturmfels, *Smooth toric varieties with small Picard number are projective*, Topology **30** (1991), no. 2, 289–299.

[10] J. C. Lagarias and G. M. Ziegler, *Bounds for lattice polytopes containing a fixed number of interior points in a sublattice*, Canad. J. Math. **43** (1991), no. 5, 1022–1035.

[11] M. Masuda and D.Y. Suh, *Classification problems of toric manifolds via topology*, Proc. of Toric Topology, Contemp. Math. **460** (2008), 273–286.

[12] E. Nobili, *Classification of Toric 2-Fano 4-folds*, Bull. Braz. Math. Soc., New Series **42** (2011), 399–414.

[13] M. Øbro, *An algorithm for the classification of smooth Fano polytopes*, arXiv:0704.0049.

[14] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) **15**, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[15] M. Rossi and L. Terracini, *A $\mathbb{Q}$-factorial complete toric variety with Picard number 2 is projective*, J. Pure Appl. Algebra **222** (2018), no. 9, 2648–2656.

[16] H. Sato, *The numerical class of a surface on a toric manifold*, Int. J. Math. Math. Sci. **2012**, Art. ID 536475.

[17] H. Sato and R. Sumiyoshi, *Terminal toric Fano three-folds with certain numerical conditions*, arXiv:1806.03784.

[18] H. Sato and Y. Suyama, *Examples of singular toric varieties with certain numerical conditions*, arXiv:1807.11747.

[19] Y. Suyama, *Notes on toric Fano varieties associated to building sets*, to appear in the proceedings of the 2018 Summer Workshop on Lattice Polytopes at Osaka University; arXiv:1809.09830.