シュレディンガー方程式の解の H^s 型波面集合について

安部 文人 (Fumihito Abe)
東京理科大学大学院 理学研究科数学専攻 修士課程 2 年

1 導入

偏微分方程式の解の特異性は時間の可逆性と結びついており, 波動方程式の解の特異性は有限の速度で伝播する. 量子力学的波動方程式とよばれるシュレディンガー方程式において, 同様の結果は成り立たず解の特異性の伝播速度は無限大であるという性質をもつ. 粒子の遠方での運動の様子から特異性の解析ができ, 特異性が伝播する様子は波面集合を用いることで詳しく調べることができる. 本研究では, 次の時間に依存する劣 2 次のポテンシャルをもつシュレディンガー方程式の初期値問題を考え, その解の H^s 型波面集合を波束変換を用いて考察した.

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\Delta u = V(t,x)u(t,x) \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{S}$$

ここで, $i=\sqrt{-1}$, $u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $u_0:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$, $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ で $V:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $u_0(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ とする. さらに $V(t,x)$ に対しては以下の仮定をする.

仮定 $V(t,x)\in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ であり, $\rho<2$ が存在して, 任意の多重指数 α に対して, 定数 C_α が存在して

$$|\partial_x^\alpha V(t,x)| \le C_\alpha(1+|x|)^{\rho-|\alpha|}$$

が任意の $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ について成り立つ.

2 平滑化作用

自由シュレディンガー方程式において,

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\Delta u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

$\Rightarrow u(t,x)\in C(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^n))$ が成り立つ. さらにここで初期値に対して $\langle x\rangle u_0(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ の仮定を加えると , $(x+it\nabla)e^{\frac{i}{2}t\Delta} = e^{\frac{i}{2}t\Delta}x$ より ,

$$\begin{cases} (i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta)\Big((x+it\nabla)u(t,x)\Big) = 0 \\ (x+it\nabla)u(t,x)\big|_{t=0} = xu_0(x)\in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

が成り立つ. したがって $(x+it\nabla)u(t,x)\in C(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^n))$ となり, $\nabla u(t,x)\in C(\mathbb{R};L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)) \quad (t\neq 0)$ がわかる. ここで u_0 になめらかさの条件はつけていないため, u_0 の遠方での減衰から解のなめらかさがしたがっている. このような性質を「平滑化効果」という.

---

*本研究は指導教員である加藤 圭一先生との共同研究に基づくものである.

しかし , これでは t が 0 を離れた瞬間に微分ができるということしかわからない .　方向別に精密化して考えることでより精密な結果が得られる. そこで波面集合を考える.

3　波面集合

関数 $f(x)$ が点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ で C^∞ 級となることの同値な条件をフーリエ変換を用いて次のように表すことができる.

命題　関数 $f(x)$ が $x_0 \in \mathbb{R}^n$ で C^∞ 級
$:\Leftrightarrow \chi(x_0) \neq 0$ である $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ が存在し , 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し , $C_N > 0$ が存在し ,

$$|\widehat{(\chi f)}(\xi)| \leq C_N \langle \xi \rangle^{-N}$$

を満たすことである. この命題を方向別に精密化したものが次の C^∞ 型波面集合である.

定義 (C^∞ 型波面集合)　$(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して
$(x_0, \xi_0) \notin WF_{C^\infty}(f)$
$:\Leftrightarrow \chi(x_0) \neq 0$ である $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在し, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し , $C_N > 0$ が存在し

$$|\widehat{(\chi f)}(\xi)| \leq C_N \langle \xi \rangle^{-N}$$

を満たすことである.
ここで $\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-ix\xi} f(x) dx$, ξ_0 の錐近傍 $\Gamma :\Leftrightarrow \xi_0$ の近傍で , $\xi \in \Gamma, \alpha > 0 \Rightarrow \alpha\xi \in \Gamma$ である.

次に局所ソボレフ空間を定義し, H^s 型波面集合を定義する.

定義 (局所ソボレフ空間)　$f \in \mathcal{S}'$, Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合.
$f \in H^s_{loc}(\Omega) :\Leftrightarrow \chi(x_0) \neq 0$ である $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ が存在して , $\langle \xi \rangle^s |\widehat{(\chi f)}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^n)$ を満たすことである.

この局所ソボレフ空間を方向別に精密化したものが H^s 型波面集合である.

定義　(H^s 型波面集合) $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする.
$(x_0, \xi_0) \notin WF_{H^s}(f)$
$:\Leftrightarrow \chi(x_0) \neq 0$ である $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在し, $\langle \xi \rangle^s |\widehat{(\chi f)}(\xi)| \in L^2(\Gamma)$ を満たすことである.

フーリエ変換はなめらかさを減少度に変える変換とみることができ, その方向に関して減衰があれば波面集合に入らないということである. したがって ξ の遠方での減衰をみることで特異性を調べることができる. ここで本研究で用いた波束変換と, 波束変換を用いた波面集合の特徴づけを述べる.

定義　(波束変換)
$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \backslash \{0\}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して, 窓関数 φ から定まる f の波束変換 $W_\varphi f(x, \xi)$ を

$$W_\varphi f(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} f(y) e^{-iy\xi} dy \ , \qquad (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

と定義する.

例えば窓関数 φ がコンパクトサポートをもつ $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ の元であった場合, 点 x 付近で f を切り取ってフーリエ変換している. 次にこの波束変換を用いた波面集合の特徴づけを述べる.

定理　[K.Kato-M.Kobayashi-S.Ito (2017)]

$(x_0,\xi_0)\in(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\backslash\{0\}), u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき (i),(ii) は同値である．

(i)　$(x_0,\xi_0)\notin WF_{C^\infty}(u)$

(ii)　x_0 の近傍 K, ξ_0 の近傍 V が存在して, 任意の $N\in\mathbb{N}$, $a\geq 1$, $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ について,$C_{N,a,\phi}>0$ が存在して,

$$|W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)|\leq C_{N,a,\phi}\lambda^{-N}$$

$(\lambda\geq 1$, $x\in K$, $\xi\in\Gamma\cap\{\xi\mid\frac{1}{a}\leq|\xi|\leq a\})$

定理　[K.Kato-M.Kobayashi-S.Ito(2017)]

$(x_0,\xi_0)\in(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\backslash\{0\}), u\in H^r(\mathbb{R}^n)\quad(r\geq 0)$ とする. このとき (i),(ii), は同値である.$s>r$ に対して,

(i)　$(x_0,\xi_0)\notin WF_{H^s}(u)$

(ii)　x_0 の近傍 K, ξ_0 の近傍 V が存在して, $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ について,

$$\int_1^\infty\lambda^{2s+n-1}\|W_{\phi_\lambda}u(x,\lambda\xi)\|^2_{L^2(K\times V)}d\lambda<+\infty$$

これらの定理は ξ で方向を定め, λ の減衰に置き換えて考えているものである．この C^∞ 型波面集合の特徴づけを用い, 劣二次のポテンシャルをもつシュレディンガー方程式の解の C^∞ 型波面集合の初期データによる特徴づけがなされている.

定理　[K.Kato-S.Ito (2014)]

$u(t,x)\in C(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^n))$ は $u_0(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ を初期値とする (S) の解で, $b=\min(\frac{2-\rho}{4},\frac{1}{4})$ とする. このとき x_0 の近傍 K, ξ_0 の近傍 V が存在して, 任意の $N\in\mathbb{N}$, $a\geq 1$, $\varphi_0\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ に対して, $C_{N,a,\varphi_0}>0$ が存在して,

$$(x_0,\xi_0)\notin WF_{C^\infty}[u(t_0)]\Leftrightarrow|W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}}u_0(0;x(0;t,x,\lambda\xi),\xi(0;t,x,\lambda\xi))|\leq C_{N,a,\varphi_0}\lambda^{-N}$$

$\varphi_{0,\lambda}(x)=\lambda^{\frac{nb}{2}}\varphi_0(\lambda^b x)\quad(\lambda\geq 1),\quad\varphi_\lambda^{(t)}(x)=e^{\frac{i}{2}t\Delta}\varphi_{0,\lambda}(x)$

$x(\tau;t,x,\xi),\xi(\tau;t,x,\xi)$ は (C) の解

$$\begin{cases}\dot{x}(\tau) &=\xi(\tau),\quad x(t_0)=x\\ \dot{\xi}(\tau) &=-\nabla V(\tau,x(\tau)),\quad\xi(t_0)=\xi.\end{cases}\tag{C}$$

4　主定理

主定理　$u(t,x)\in C(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^n))$ は $u_0(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ を初期値とする (S) の解で, $s\in\mathbb{R}$, $b=\min(\frac{2-\rho}{4},\frac{1}{4})$ とする. このとき x_0 の近傍 K, ξ_0 の近傍 V が存在して, 任意の $\varphi_0\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ に対して,

$$(x_0,\xi_0)\notin WF_{H^s}[u(t_0)]\Leftrightarrow\int_1^\infty\lambda^{2s+n-1}\|W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}}u_0(x(0;t_0,x,\lambda\xi),\xi(0;t_0,x,\lambda\xi))\|^2_{L^2(K\times V)}d\lambda<+\infty$$

運動量の大きいところが特異性に関する部分であり, λ に関する減衰があれば (x_0, ξ_0) を通る古典軌道上の点はすべて波面集合に入らないこと示している. ここで簡単のために $V=0$ とすると, 特性曲線 (C) は以下のようになる.

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) &= \xi(\tau), \quad x(t_0) = x \\ \dot{\xi}(\tau) &= 0, \quad \xi(t_0) = \xi. \end{cases} \tag{C'}$$

これを解くと $x(t) = x + t\xi$, $\xi(t) = \xi$ となり運動量 ξ は一定であり, 速度は $\dot{x}(t) = \xi$ より運動量に比例する. 主定理より特異性に関係する部分は運動量が大きなところであり, 運動量無限大の粒子は無限大の速度をもち, 瞬時に無限遠に飛び去る. 2 節で t が 0 を離れた瞬間になめらかになることはこのイメージからもわかる.

参考文献

[1] K.Kato, M.kobayashi and S.Ito, Remark on characterization of wave front set by wave packet transform, arXiv:1408.1370v1.

[2] K.Kato, M.kobayashi and S.Ito, Remark on wave front sets of solutions to Schrödinger equation of a free particle and a harmonic oscillator, SUT J. Math. Vol. 47 No.2 (2011), 175-183.

[3] K.Kato and S.Ito, Singularities for solutions to time dependent Schrödinger equations with sub-quadratic potential, SUT J. Math. Vol. 50 No.2 (2014), 383-398