

Asymptotic shape of solutions to the mean curvature flow equation with discontinuous source terms

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
三栖邦康 (Kuniyasu MISU)

1 導入

当研究では、未知関数 $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ についての次のような初期値問題を扱います。

$$\begin{cases} u_t(x, t) + \nu |Du(x, t)| - |Du(x, t)| \operatorname{div} \left(\frac{Du(x, t)}{|Du(x, t)|} \right) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで、 Du は u の空間についての勾配、 div は空間についての発散です。 ν は 0 以上の定数で、 $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ です。また外力項 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は局所有界な関数であり、不連続なものも含めます。典型的には $f(x) = c\chi_\Omega(x)$ ($c > 0$ は定数) の場合を考えます。

方程式 (1.1) の物理的な背景としては、結晶成長現象の二次元核生成があります。二次元核生成とは、飽和溶液中にある真っ平な結晶面に、溶解している結晶分子が一か所に集まって「出っ張り」を形成し、そこを核にしてさらに結晶分子が吸着し、結晶が成長していく現象のことです [8]。方程式 (1.1) をこのような現象のモデルとして見た時、 $u(x, t)$ は飽和溶液中の結晶における基準面上の位置 x 、時刻 t における結晶の高さを意味します。方程式 (1.1) ($n = 2$) においては、結晶は基準面に対して垂直方向と水平方向に成長します。垂直方向には $f(x)$ の速さで成長し、水平方向の成長速度は u の等高線の外向き法線方向に対して、等高線の平均曲率 κ に一様な速度 $-\nu$ を加えたものになります (図 1、図 2)。

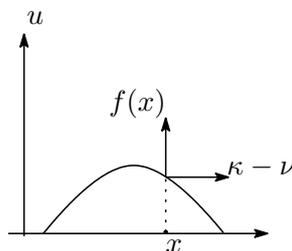


図 1: 垂直方向と水平方向の成長

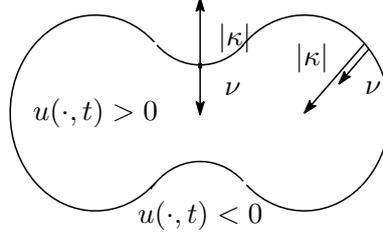


図 2: 等高線の例とその水平方向の成長

2 準備

2.1 粘性解

粘性解とは弱解の一種であり、界面発展を記述する等高面方程式に対する適切な解概念です [5]。一方で、粘性解の概念は元々、ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式において、ある種の最適制御問題の値関数を一意的な解として捕捉する解概念として、Crandall、Lions により導入されました [1]。粘性解の概念はアイザック方程式においても有効で、この場合は微分ゲームに現れる値関数を捕捉しています [3]。このことは、後述の「ゲーム解釈」を考える背景となっています。

さて、方程式 (1.1) の粘性解の定義を述べるにあたって、方程式を次のように言い換えます。

$$\begin{cases} u_t(x, t) + \nu |Du(x, t)| + F(Du(x, t), D^2u(x, t)) = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで、 F は次のように定義されます。

$$F(p, X) = -\text{Tr} \left(\left(I - \frac{p \otimes p}{|p|^2} \right) X \right), \quad p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, X \in \mathbb{S}^n.$$

$p \otimes p$ は、 $p = (p_i)_{i=1}^n$ に対して、 $p \otimes p := (p_i p_j)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{S}^n$ で定まるものです。すると、(2.1) に対する粘性解の定義は次のようになります。以降、関数 w に対して、 w^* 、 w_* はそれぞれ w の上半連続包、下半連続包を指します。

定義 2.1 (粘性解). (1) 次の条件を満たす時、関数 u は (2.1) の粘性劣解であるという。

(a) $u^* < \infty$.

(b) $\phi(x, t)$ を滑らかな関数とし、 $u^* - \phi$ は $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ で極大を持つならば、

$$\phi_t(x_0, t_0) + \nu |D\phi(x_0, t_0)| + F_*(D\phi(x_0, t_0), D^2\phi(x_0, t_0)) \leq f^*(x_0)$$

が成り立つ。

(c) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対し、

$$u^*(x, 0) \leq u_0(x)$$

が成り立つ。

(2) 次の条件を満たす時、関数 u は (2.1) の粘性優解であるという。

(a) $u_* > -\infty$.

(b) $\phi(x, t)$ を滑らかな関数とし、 $u_* - \phi$ は $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ で極小を持つならば、

$$\phi_t(x_0, t_0) + \nu |D\phi(x_0, t_0)| + F^*(D\phi(x_0, t_0), D^2\phi(x_0, t_0)) \geq f_*(x_0)$$

が成り立つ。

(c) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対し、

$$u_*(x, 0) \geq u_0(x)$$

が成り立つ。

(3) 関数 u が (2.1) の粘性劣解かつ粘性優解である時、(2.1) の粘性解であるという。

2.2 比較原理

初期値問題に対する粘性解の比較原理というのは、初期時刻で $u \leq v$ となる粘性劣解 u と粘性優解 v に対して、時間大域的に $u \leq v$ が成り立つというものです。この主張を通して粘性解の一意性が言えて、さらには解の連続性まで分かります。2階の方程式に対する比較原理に関しては [2] に詳しく述べられています。ただし、後にも述べますが、通常の比較原理は方程式に連続性を仮定しており、方程式 (1.1) の f が不連続な場合には期待できません。

2.3 ペロンの方法

ペロンの方法とは、劣解 w_1 と優解 w_2 が $w_1 \leq w_2$ を満たしており、またいずれも初期条件（楕円型方程式なら境界条件）を真に満たしている時、 $w_1 \leq u \leq w_2$ を満たす解 u が存在するという主張です。このような w_1, w_2 をそれぞれ sub barrier, super barrier と呼びます。粘性解についてのペロンの方法は、[6] で最初に与えられています。

3 結果

3.1 粘性解の一意性

方程式 (1.1) の解の一意性についての結果は、 $f(x) = c\chi_\Omega(x)$ の場合で得られました。 f の不連続性のため通常の比較原理が期待できないので、弱比較原理として述べています。ここでの弱比較原理の結論は、 $u_* \leq v$ と $u \leq v^*$ が成り立つというものです。また、 Ω の仮定は、有界開集合かつ星形であるというものです。 Ω が星形であるとは次の条件を満たすことを言います。

(H1) ある $\delta > 0$ があって、任意の $\lambda \in (1 - \delta, 1)$ に対して、 $\overline{\lambda\Omega} \subset \Omega$ が成り立つ。

定理としては次のようになります。

定理 3.1. $f(x) = c\chi_\Omega(x)$ とし、 Ω は有界開集合で、(H1) を満たすとする。 u_0 はあるコンパクト集合の外で定数であるとする。 $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ 上の上半連続関数 u と下半連続関数 v はそれぞれ、(1.1) の粘性劣解、粘性優解であるとする。（このとき、定義 2.1 より $u(\cdot, 0) \leq v(\cdot, 0)$ が成り立つ。）また、ある $R > 0$ と $a < b$ なる定数 a, b が存在して、 $u(x, t) = a$ と $v(x, t) = b$ を全ての $x \in B(0, R)^c$ 、 $t > 0$ で満たしているとする。この時、 $u_* \leq v$ と $u \leq v^*$ が $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ で成立する。

$u_* \leq v$ を示す場合は、粘性劣解 u を $\lambda < 1$ によって、 $u_\lambda(x, t) = \lambda^2 u(\lambda^{-1}x, \lambda^{-2}t)$ とスケーリングします。この時、 u_λ と v から出る粘性不等式の外力項 f の部分を比べた時、 $\overline{\lambda\Omega} \subset \Omega$ という仮定によって、背理法の矛盾を導くような差を得ます。 $u \leq v^*$ の場合も同様の証明です。

尚、このスター付きタイプの弱比較原理は、一例として [7, Theorem 1.4] にて、粘性解の意味での境界条件で楕円型の平均曲率流方程式に対して示されています。

通常と比較原理が解の一意性を導くのに対して、定理 3.1 は条件付きで解の一意性を導きます。想定する解のクラスは、定理 3.1 に即して、遠方で定数となるものです。すなわち、

$$\text{ある定数 } R > 0 \text{ と } C \in \mathbb{R} \text{ が存在して、任意の } x \in B(0, R)^c \text{ と } t > 0 \text{ で、} u(x, t) = C \text{ が成り立つ} \quad (3.1)$$

というものです。一意性について述べた主張として次の系が得られます。

系 3.2. $f(x)$ 、 Ω 、 u_0 は定理 3.1 と同じ仮定を満たすものとする。方程式 (1.1) に対して (3.1) を満たす連続な粘性解 u が存在するならば、(3.1) を満たす粘性解は u のみである。

3.2 解の漸近形

解の漸近形についての結果は $f(x) = c\chi_\Omega(x)$ 、 $u_0 = 0$ の時に得られました。この場合、方程式を改めて書くと次のようになります。

$$\begin{cases} u_t(x, t) + \nu|Du(x, t)| - |Du(x, t)|\operatorname{div}\left(\frac{Du(x, t)}{|Du(x, t)|}\right) = c\chi_\Omega(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.2)$$

漸近形を得る過程で、漸近形を解として持つような次の定常方程式を考えます。

$$\begin{cases} \nu|DU(x, t)| - |DU(x, t)|\operatorname{div}\left(\frac{DU(x, t)}{|DU(x, t)|}\right) = c & \text{in } \Omega, \\ U(x) = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

定常解の存在を得るために Ω に対して次の「外部球条件」(図 3) を仮定します。この仮定はペロンの方法の super barrier を構成する際に用います。

(H2) 任意の $z \in \partial\Omega$ に対して、ある $z_0 \in \mathbb{R}^n$ が存在して、 $|z - z_0| > \frac{n-1}{\nu}$ と $B(z_0, |z - z_0|) \subset \Omega^c$ が成り立つ。

尚、この仮定はもう少し弱めることができますが、煩雑になるため省略します。定理としては次のようになります。

定理 3.3. (H2) を満たす \mathbb{R}^n 上の有界開集合 Ω について、以下が成り立つ。

- (1) 定常方程式 (3.3) の粘性解 $U \in C(\overline{\Omega})$ が一意的に存在する。
- (2)

$$u(x, t) := \begin{cases} \min\{U(x), ct\} & (x \in \Omega), \\ 0 & (x \notin \Omega) \end{cases}$$

は (3.2) の連続な粘性解である。さらに Ω が (H1) を満たすならば、この u は一意的な粘性解である。

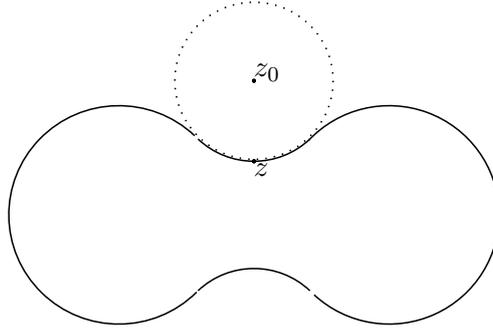


図 3: 外部球条件

3.3 ゲーム解釈

先行研究 [7] では、外力項 f が 0 の場合に、二人のプレイヤーで行われるあるゲームの値関数 $u^\epsilon(x, t)$ が、 $\epsilon \rightarrow 0$ のとき方程式の解に収束することが示されています。当研究では、不連続外力項付きの方程式 (1.1) に対しても、 f をランニングコストとしてゲームに加えることで、対応する値関数が (1.1) の解に収束することが示せました。(1.1) ($n = 2$) に対応するゲームのルールは以下ようになります。

- プレイヤーの名前を Paul、Carol とする。
- $x \in \mathbb{R}^2$ 、 $t > 0$ 、 $\epsilon > 0$ を固定する。 x は Paul の初期位置、 t はゲームが行われる時間を意味する。
- ゲームの時間を ϵ^2 ごとに区切る。正確には、 $N := \lceil \frac{t}{\epsilon^2} \rceil$ ステップに区切る。
- 各ステップ i ($i = 0, 1, \dots, N - 1$) において
 - (1) Paul は v_i 、 w_i の値をそれぞれ S^1 の元から選択する。
 - (2) Carol は Paul の選択が確定してから、 b_i の値を $+1$ にするか -1 にするかを選択する。
 - (3) 両者の選択に基づいて、次のステップにおける状態を以下のように定める。

$$x_{i+1} = x_i + \sqrt{2}\epsilon b_i v_i + \nu w_i \epsilon^2,$$

$$y_{i+1} = y_i + \epsilon^2 f(x_i).$$

ここで、 x_i はステップ i における Paul の平面上の位置であり、 y_i はステップ i の時点で Paul が積み重ねたコストである。 $x_0 = x$ であり、 $y_0 = 0$ である。

- ゲームが終了した時点で、コスト y_N に $u_0(x_N)$ を加算し、これをトータルコストとする。Paul は各選択において、このトータルコスト $y_N + u_0(x_N)$ の最小化を、Carol は最大化を目指す。両者が最善の選択をした場合のトータルコストが値関数 $u^\epsilon(x, t)$ である。値関数を定式化すると次のようになる。

$$u^\epsilon(x, t) := \min_{v_0, w_0 \in S^1} \max_{b_0 = \pm 1} \dots \min_{v_{N-1}, w_{N-1} \in S^1} \max_{b_{N-1} = \pm 1} [y_N + u_0(x_N)] \quad (t > 0),$$

$$u^\epsilon(x, 0) := u_0(x).$$

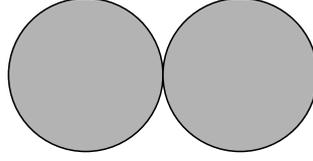


図 4: Ω の形

値関数が解に収束するというのは、正確には次の主張になります。

定理 3.4.

$$\bar{u}(x, t) := \overline{\lim}_{\substack{(y,s) \rightarrow (x,t) \\ \epsilon \searrow 0}} u^\epsilon(y, s), \quad \underline{u}(x, t) := \underline{\lim}_{\substack{(y,s) \rightarrow (x,t) \\ \epsilon \searrow 0}} u^\epsilon(y, s)$$

とする。この時、 $\bar{u}(x, 0) = \underline{u}(x, 0) = u_0(x)$ であり、 \bar{u} と \underline{u} はそれぞれ (1.1) の粘性劣解、粘性優解である。

3.4 ゲーム解釈の応用

先行研究 [4] で研究されている $\nu < 0$ の場合についても、ゲームのルールに若干の修正を加えることで定理 3.4 同様の収束の結果が得られました。Paul と Carol の目的を入れ替える、つまり値関数 $u^\epsilon(x, t)$ として次のものを考えることでゲーム解釈が実現します。

$$u^\epsilon(x, t) := \max_{v_0, w_0 \in S^1} \min_{b_0 = \pm 1} \dots \max_{v_{N-1}, w_{N-1} \in S^1} \min_{b_{N-1} = \pm 1} [y_N + u_0(x_N)] \quad (t > 0),$$

$$u^\epsilon(x, 0) := u_0(x).$$

ところで、[4] は、 $\nu = -1$ の時の解の漸近速度 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(x, t)}{t}$ を調べていますが、一例として、 $\Omega = \bar{B}((-1, 0), 1) \cup \bar{B}((1, 0), 1)$ (図 4) の場合を考えています。[4] はこの場合、 $u(x, t) = ct\chi_\Omega(x)$ という自明解の他に、漸近速度が平面上の場所によらず 0 より真に大きいような非自明解の存在を示しています [4, Proposition B.2]。

当研究ではこの評価を改良し、次の結果を得ました。

定理 3.5. $\nu = -1$ 、 $u_0 = 0$ 、 $f(x) = c\chi_\Omega(x)$ 、 $\Omega = \bar{B}((-1, 0), 1) \cup \bar{B}((1, 0), 1)$ とする。この時、 $x \in \mathbb{R}^2$ に関して局所一様に

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(x, t)}{t} = c$$

となるような粘性解 u が存在する。

ここでは、ゲームの値関数を下から評価することで、sub barrier \bar{u} を下から評価し、漸近速度 c の解の存在を得ています。値関数の評価については、Paul が平面上のどの場所からでも Ω 内に入ることでできるような戦略と、一旦 Ω 内に入ってしまえばゲームが終了するまでずっと Ω 内に留まっていられるような戦略を具体的に与えることで実現しました。

参考文献

- [1] Crandall, M.G.; Lions, P.L. *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983), 1–42.
- [2] Crandall, M.G.; Ishii, H.; Lions, P.L. *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*. Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1992), 1–67.
- [3] Evans, L. C.; Souganidis, P. E. *Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations*. Indiana University Mathematics Journal. Vol. 33 (1984) no. 5, 773–797
- [4] Giga, Y.; Mitake, H.; Tran, H, V. *On asymptotic speed of solutions to level-set mean curvature flow equations with driving and source terms*. SIAM J. Math. Anal. Vol. 48 (2016), no. 5, 3515–3546.
- [5] Giga, Y. *Surface Evolution Equations. A Level Set Approach*, Monogr. Math.99, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2006.
- [6] Ishii, H. *Perron's method for Hamilton-Jacobi equations*. Duke Math. J. Vol. 55 (1987), no. 2, 369–384.
- [7] Kohn, R. V.; Serfaty, S. *A deterministic-control-based approach to motion by curvature*. Comm. Pure Appl. Math. 59 (2006), no. 3, 344–407.
- [8] Ohara, M.; Reid, R. C. *Modeling Crystal Growth Rates from Solution*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.