

KMS states on Cuntz–Pimsner algebras associated with self-similar group actions and their GNS representations

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
吉田啓佑 (Keisuke YOSHIDA)

abstract

自己相似群作用から作られる C^* -環上の, ゲージ作用に対する KMS 状態についての結果が得られたので発表する. 具体的には, ある条件を満たす自己相似群作用から生成される C^* -環については KMS 状態が一意的に定まることを示し, さらに条件を付け加えるとその KMS 状態の GNS 表現からくる von Neumann 環の型が調べられることを述べる.

1 導入

Banach $*$ -環 A の任意の元 a について $\|a\|^2 = \|a^*a\|$ が成り立つとき, A を C^* -環と呼ぶ. C^* -環の代表例としてコンパクト空間上の連続関数環に上限ノルムを定めたものや, Hilbert 空間上の有界作用素全体に作用素ノルムを定めたもの等が知られている. 逆に, 任意の単位元を持つ可換な C^* -環はあるコンパクト空間上の連続関数環と同型であり, 任意の C^* -環はある Hilbert 空間上の有界作用素全体の中のノルムで閉じた部分 $*$ -環と同型であることが, 基礎的な定理として知られている.

本講演で取り扱う C^* -環は Cuntz–Pimsner 環と呼ばれるものの一種である. Cuntz–Pimsner 環について説明するために Hilbert C^* -双加群と呼ばれるものを導入しなければならない. それは以下のように定義される.

定義 1.1. A を C^* -環とし, $\mathcal{H}$ を A 上の右加群とする.

第二変数について線形な写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow A$ が任意の $x, y \in \mathcal{H}, a \in A$ について以下の条件を満たすとき, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を A 値の内積と呼ぶ.

- $\langle x, x \rangle \geq 0$.
- $\langle x, x \rangle = 0$ であることと $x = 0$ であることは同値.
- $\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle$.
- $\langle x, y \rangle a = \langle x, ya \rangle$.

A 値の内積は $\|\langle x, x \rangle\|^{\frac{1}{2}}$ によって $\mathcal{H}$ 上のノルムを定める. このノルムによって $\mathcal{H}$ が完備なときに $\mathcal{H}$ を Hilbert A -右加群と呼ぶ.

$A = \mathbb{C}$ の場合は Hilbert 空間そのものであり, A が一般の場合にも Hilbert 空間論と類似した事実がいくつか知られている. 例えば写像 $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ で, 随伴 $T^*: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ が存在する (随伴とは任意の $x, y \in \mathcal{H}$ について $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ となる T^* のことである) ようなものをすべて集めた集合を $L(\mathcal{H})$ とすると, これは Hilbert 空間上の有界線形作用素全体を一般化したものに相当する集合である.

単射 $*$ -準同型 $\phi: A \rightarrow L(\mathcal{H})$ が存在するとき, Hilbert A -右加群に $\phi(a)x$ (ただし $a \in A, x \in \mathcal{H}$) で左演算を定めることができる. こうして得られた A -双加群のことを A 上の Hilbert C^* -双加群と呼ぶ. しばしば ϕ を省略して書く. 本レポートでも以降 ϕ は書かずに左演算を単に ax で記述する.

A 上の Hilbert C^* -双加群 $\mathcal{H}$ が与えられると, 各演算を保存したまま A と $\mathcal{H}$ を含むようなより大きな C^* -環を構成することができる. そのような C^* -環は $\mathcal{H}$ の Cuntz–Pimsner 環と呼ばれている. 構成法をここでは解説しない (構成法は例えば [1] にまとめられている) が, $\mathcal{H}$ の Cuntz–Pimsner 環とは A と $\{S_x | x \in \mathcal{H}\}$ から生成されていて, 任意の $\alpha \in \mathbb{C}, x, y \in \mathcal{H}$ 及び $a, b \in A$ について以下を満たすものである.

$$S_{\alpha x + y} = \alpha S_x + S_y, \quad S_{axb} = aS_xb, \quad S_x^*S_y = \langle x, y \rangle.$$

作用素環論には, ある数学の対象から Hilbert C^* -双加群及び Cuntz–Pimsner 環を構成し, Cuntz–Pimsner 環の性質がどのようにもとの対象から与えられているかを研究するという話題がある. 例えば複素力学系から Cuntz–Pimsner 環を構成し KMS 状態 (定義は後述する) ともとの力学系の関係性に言及するという先行研究が知られている [4].

本講演では次章で定義する自己相似群作用から与えられる Cuntz–Pimsner 環を取り扱う. この Cuntz–Pimsner 環は V.Nekrashevych によって構成され [7], 例えば K 群にもとの群作用の情報が遺伝していることなどが示されている [8]. この度, あるゲージ作用に対する KMS 状態に元の群作用の情報が残されていることがわかった. 本講演ではその結果について発表する.

2 準備

この章では本公演の主要な話題である, 自己相似群作用とそこから得られる Cuntz–Pimsner 環さらに KMS 状態を定義し, 簡単に解説する. まずは自己相似群作用の定義及び Nekrashevych による Cuntz–Pimsner 環の構成を [7] に基づいて簡単に述べる.

X を $|X| \geq 2$ なる有限集合とし, X^ω を X の元たちから成る片側無限列全体とする. X^ω に離散位相たちの積位相を導入するとカントール集合と同相になる. X 上の重みが均等な数え上げ確率測度から, X^ω 上の積測度が定義される. 今回この測度を μ と書く. $u \in X^n$ としたとき, 筒集合 $uX^\omega := \{w \in X^\omega \mid w \text{ の最初の } n \text{ 文字が } u \text{ と一致する} \}$ の測度は $\mu(uX^\omega) = |X|^{-n}$ で与えられる.

X^ω 上の自己相似群作用は以下で定義される.

定義 2.1. 群 G の X^ω 上の忠実な作用を考える. 任意の $g \in G$ と $x \in X$ に対し $h \in G$ と $v \in X$ が存在して, 任意の $w \in X^\omega$ について

$$g(xw) = vh(w) \tag{2.1}$$

を満たすとき, この作用を自己相似群作用と呼ぶ.

上の h と v は g と x から一意に定まるので $h = h(g, x), v = v(g, x)$ と書く. 自己相似群作用の例として以下のものが知られている.

例 2.2. $X = \{0, 1\}$ とし, g_1 及び g_2 を次で定める X^ω 上の同相写像とする.

$$g_1(0w) = 1w, \quad g_2(0w) = 0g_1(w),$$

$$g_1(1w) = 0w, \quad g_2(1w) = 1g_2(w),$$

ただし $w \in X^\omega$ は任意で, $w_1 \in X^\omega$ を $1 \in X$ を並べ続けるような列としたとき, $g_2(w_1) = w_1$ と定める. このとき a と b で生成される自己同相群の中の部分群は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ と同型であり, この対応によって $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の自己相似群作用が与えられている.

以下では群 G はつねに X^ω に自己相似に作用するとし, X^ω の各元の G による軌道が X^ω で稠密であるとする (上の例もこの仮定を満たす).

続いて Hilbert C^* -双加群の構成に移る. Φ_R を群環 X を自由基底に持つ $\mathbb{C}G$ 上の自由右加群とする. Φ_R の任意の元は $\sum_{x \in X} x \cdot a_x$ の形で与えられる (ただし各 a_x は $\mathbb{C}G$ の元). Φ_R に $\mathbb{C}G$ 値の内積を

$$\left\langle \sum_{x \in X} x \cdot a_x, \sum_{x \in X} x \cdot b_x \right\rangle := \sum_{x \in X} a_x^* b_x$$

で定義する. Φ_R に左演算を自己相似性を用いて

$$g\left(\sum_{x \in X} x \cdot a_x\right) := \sum_{x \in X} v(g, x) \cdot (h(g, x)a_x)$$

で与える. Φ_R は双加群になったので R を外し Φ と書く.

C^* -環を構成するために $\mathbb{C}G$ の適切な完備化を考えたい. そのために次のように G -ジェネリック点を定義する.

定義 2.3. $g \in G$ に対し, $w \in X^\omega$ が $g(w) \neq w$ であるか g で止まっている w の開近傍が存在するかのいずれかを満たすとき w は g -ジェネリックはであると言う. g -ジェネリックな点全体を $(X^\omega)_{g\text{-gen}}$ と書く. $w \in X^\omega$ がすべての $g \in G$ について g -ジェネリックであるとき w が G -ジェネリックであるという. G -ジェネリックな点全体を $(X^\omega)_{G\text{-gen}}$ と書く.

以下の記号を準備する.

Notation 2.4. $G(w)$ を $w \in X^\omega$ の G による軌道とする.

$\pi_w: \mathbb{C}G \rightarrow B(l^2(G(w)))$ を

$$g(\delta_{h(w)}) := \delta_{gh(w)}.$$

によって与えられる G の表現とする. この表現の作用素ノルムによる $\mathbb{C}G$ の閉包を A_w とする. つまり

$$A_w := \overline{\pi_w(\mathbb{C}G)}^{\|\cdot\|}$$

である.

次の結果が [7] で示されている.

- (1). $w_1, w_2 \in X^\omega$ を 2 つの G -ジェネリック点とすると,

$$A_{w_1} \simeq A_{w_2}.$$

- (2). $\mathbb{C}G$ 上の双加群 Φ は A_Φ 上の Hilbert C^* -双加群に拡張される.

(1) より G -ジェネリック点 w を用いて $A_\Phi := A_w$ と書くとこれは w の選び方に依らないことがわかる. さらに (2) で得られた A_Φ 上の Hilbert C^* -双加群も Φ と書くことにし, Φ の Cuntz–Pimsner 環を $\mathcal{O}_\Phi$ と書く. この $\mathcal{O}_\Phi$ が今回取り扱う Cuntz–Pimsner 環である. $\mathcal{O}_\Phi$ は次のようにとらえることができる.

定理 2.5. $\mathcal{O}_\Phi$ は以下の関係式を満たす A_Φ と $\{S_x \mid x \in X\}$ から生成される不変 C^* -環である.

$$S_x^* S_y = \delta_{x,y} \tag{2.2}$$

$$\sum_{x \in X} S_x S_x^* = 1 \tag{2.3}$$

$$a S_x = \sum_{y \in X} S_y \langle y, a \cdot x \rangle \tag{2.4}$$

ただし $\delta_{x,y}$ は Kronecker の δ を意味し, $a \in A_\Phi$, $x, y \in X$ は任意である.

Remark 2.6. [7] においては上記の普遍 C^* -環が $\mathcal{O}_\Phi$ の定義であるが, この普遍 C^* -環が Φ の Cuntz–Pimsner 環と同型であることは容易に示せる.

これで Cuntz–Pimsner 環 $\mathcal{O}_\Phi$ の定義及び解説を一旦終える. 次に KMS 状態を定義する. まずは一般の状態の定義から始め, 後のために GNS 表現に触れる.

定義 2.7. 単位的 C^* -環 A に対し, 任意の $a \in A$ で $\varphi(a^* a) \geq 0$ を満たし, さらに $\varphi(1) = 1$ であるような A 上の線形汎関数を状態と言う. A 上の状態全体の集合を $S(A)$ と書く.

φ が A 上の状態であるとき, $N_\varphi := \{a \in A \mid \varphi(a^* a) = 0\}$ とすると, $\langle a + N_\varphi, b + N_\varphi \rangle := \varphi(a^* b)$ は A/N_φ 上の内積になる. ゆえに A/N_φ を完備化すると Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\varphi$ が得られる. $a \in A$ に対して $\pi_\varphi(a) \in B(\mathcal{H}_\varphi)$ を $\pi_\varphi(a)(b + N_\varphi) := ab + N_\varphi$ で定める. この時, $\pi_\varphi: A \rightarrow B(\mathcal{H}_\varphi)$ は $*$ -準同型である. $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$ を状態 φ による A の GNS 表現と言う. GNS 表現は作用素環論において黎明期から知られる基本的な表現であり, 随所で使われる.

Remark 2.8. 表現の直和 $\bigoplus_{\varphi \in S(A)} (\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$ を考えると, A を $B(\bigoplus_{\varphi \in S(A)} \mathcal{H}_\varphi)$ に埋め込むことができる. 従って前章で触れたように, 任意の C^* -環はある Hilbert 空間上の有界線形作用素全体のなかのノルムで閉じた部分 $*$ -環と見なすことができる.

Notation 2.9. $\mathcal{O}_\Phi$ 上の $\mathbb{R}$ のゲージ作用 Γ を

$$\Gamma_t(g) := g, \quad \Gamma_t(S_x) := e^{it} S_x$$

で与える. ただし $g \in G, t \in \mathbb{R}$ 及び $x \in X$ は任意.

$a \in \mathcal{O}_\Phi$ を止めておいて, $\Gamma_t(a)$ を $\mathcal{O}_\Phi$ 値の $\mathbb{R}$ 上の関数と見なす. $\Gamma_t(a)$ が $\mathbb{C}$ 上の整関数に拡張されるような a 全体を $(\mathcal{O}_\Phi)_\Gamma$ と書く.

一般論から $(\mathcal{O}_\Phi)_\Gamma$ は $\mathcal{O}_\Phi$ の稠密な部分 $*$ -環である.

上記の記号の下で KMS 状態と呼ばれる特殊な状態は以下のように定義される. 本来より一般の $\mathbb{R}$ 作用に定義されるものだが, ここでは本講演で扱うゲージ作用についてのみ定義する. 詳しくは [9] や [2] などにまとまっている.

定義 2.10. $\beta > 0$ とする. $\mathcal{O}_\Phi$ 上の状態 φ が β -KMS 条件を満たすとは任意の $a \in (\mathcal{O}_\Phi)_\Gamma$ と $b \in \mathcal{O}_\Phi$ に対して

$$\varphi(ab) = \varphi(b\Gamma_{i\beta}(a))$$

が成立するときのことを言う. β -KMS 条件を満たす状態を β -KMS 状態と呼び, β -KMS 状態全体の集合を $K_\beta(\Gamma)$ と書く.

定義からわかるように KMS 状態はトレース状態 (トレース状態とは任意の C^* -環の 2 元 a, b について $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ となるような状態のことである. 行列の正規化されたトレースの一般化) に似た計算を可能にする. 実際ゲージ作用で止まっている元たちに対しては KMS 状態はトレース状態としてふるまう. これはかなり強力な条件である. そのことは任意の $x, y \in X$ と $g \in G$ に対して

$$\varphi(S_x g S_y^*) = e^{-\beta} \delta_{x,y} \varphi(g)$$

が成り立ち, φ を作用させたときに 0 にならないような元が限定されることなどに見られる. 上記の式を発展させると次の Remark が得られる.

Remark 2.11. 作用の自己相似性と KMS 条件から $\varphi \in K_\beta(\Gamma)$ のすべての元は任意の $g \in G$ について

$$\varphi(g) = e^{-\beta} \sum_{x \in X} \delta_{x, v(g,x)} \varphi(h(g,x)) \quad (2.5)$$

を満たすことがわかる. 特に G の単位元を考えると, $\beta \neq \log |X|$ のときは $K_\beta(\Gamma)$ は空集合である.

3 主結果

この章では本公演の主結果を述べる. まずは必要な補題を述べる. 次の補題は確率測度の簡単な議論から得られる.

補題 3.1. $\mu((X^\omega)_{G\text{-gen}}) = 1$ であることと, 任意の $g \in G$ について $\mu(X^\omega_{g\text{-gen}}) = 0$ であることは同値である.

主結果のうちのひとつは次の定理である.

定理 3.2. $\mu((X^\omega)_{G\text{-gen}}) = 1$ のとき $\varphi \in K_{\log|X|}(\Gamma)$ は一意に定まる. この φ は任意の $g \in G$ に対して $\varphi(g) = \mu((X^\omega)_g)$ により与えられる.

証明の概略は次の通りである.

定理 3.2 の証明. 等式 (2.5) を満たすような A_Φ 上のトレース状態が定まるごとにそれを拡張した $K_\beta(\Gamma)$ の元がただ一つ定まることが [5] にある一般論からわかる.

$\varphi(g) = \mu((X^\omega)_g)$ によって定義される $\mathbb{C}G$ の線形汎関数は一般論から正定値であり, $\mu((X^\omega)_{G\text{-gen}}) = 1$ の仮定からノルム連続である. よって φ は A_Φ 上の状態に拡張される. また自己相似性より G の各元は測度を保つので, φ はトレース状態である. (2.5) を満たすことも自己相似性より従う.

(2.5) を満たす A_Φ 上のトレース状態 ψ を任意にとる. 各 $g \in G$ について $|\varphi(g) - \psi(g)|$ を自己相似性を繰り返し用いて計算すると

$$|\varphi(g) - \psi(g)| \leq \mu((X^\omega)_{g\text{-gen}}^c)$$

がわかるので前の補題から一意性が言える. □

Remark 3.3. 3.2 の仮定 $\mu((X^\omega)_{G\text{-gen}}) = 1$ はあまり突飛なものではなく, 多くの場合に成立する. 実際, 例 2.2 など [7] で触れられている自己相似群作用はすべて定理 3.2 の仮定を満たす.

C^* -環は Hilbert 空間上有界線形作用素たちの中のノルムで閉じた部分 $*$ -環であった. KMS 状態の一意性が言えている場合は, 環の構造が比較的わかりやすい. そのことを観察するためにここで von Neumann 環にも触れておく. 以下 $\mathcal{H}$ は Hilbert 空間である.

Notation 3.4. $D \subset B(\mathcal{H})$ に対して, $D' := \{a \in B(\mathcal{H}) \mid \text{任意の } d \in D \text{ に対して } da = ad\}$ と定める.

定義 3.5. $A \subset B(\mathcal{H})$ を C^* -環とする. $A'' := (A')' = A$ となるとき A を von Neumann 環と言う.

定義 3.6. $A \subset B(\mathcal{H})$ を von Neumann 環とする. $A \cap A' = \mathbb{C}$ のとき, A を因子環と呼ぶ.

通常, von Neumann 環を表す文字は $\mathcal{M}$ や $\mathcal{N}$ が多いが, 本レポートでは定義以外では一般の von Neumann 環を記述する箇所が少ないので, C^* -環と同じ A を用いた. 因子環は von Neumann の最小構成単位であり, von Neumann 環の構造の研究は主に因子環に対して行われる.

再び KMS 状態に話題を移す. $K_\beta(Ga)$ は $S(\mathcal{O}_\Phi)$ の凸部分集合であることはすぐにわかる. [2] にあるような一般論から φ が $K_\beta(\Gamma)$ の端点であることと, $\pi_\varphi(\mathcal{O}_\Phi)''$ が因子環であることは同値である. 従って定理 3.2 の仮定のもとでは, ただ一つ存在する KMS 状態 φ に対して, $\pi_\varphi(\mathcal{O}_\Phi)''$ (以降は単に $\mathcal{O}_\Phi''$ と書く) は因子環である.

証明は省くが定理 3.2 は次のように一般化できる.

定理 3.7. $\mu((X^\omega)_{G-\text{gen}}) \neq 0$ のとき, $\varphi(g) = \mu((X^\omega)_g \cap (X^\omega)_{g-\text{gen}})$ は KMS 状態を定める. さらに φ は $K_\beta(\Gamma)$ の端点である. 従って $\mathcal{O}_\Phi''$ は因子環である.

定理 3.2 と定理 3.7 に類似の結果は [6] で与えられている. [6] と本レポートとは群環の完備化の仕方に違いがある. ノルムの大小関係を考えると, [6] の主定理は $\mu((X^\omega)_{G-\text{gen}}) \neq 0$ の仮定の下では定理 3.2 と定理 3.7 から従うことがわかる. また端点に関する記述は [6] にはない.

以降は定理 3.2 の仮定の下で $\mathcal{O}_\Phi''$ の構造に関する結果を述べる.

定義 3.8. 単位元の有限部分射影が 0 以外に存在しない von Neumann 環を III 型 von Neumann 環と呼ぶ.

ここでは定義しないが, I 型 von Neumann 環及び II 型 von Neumann 環と呼ばれるものも存在する. 因子環はこれらのどれかに分類することができ, 型が異なる von Neumann 環が同型になることはない. III 型因子環はモジュラススペクトル (定義をするのにかなりの紙幅が必要なので本レポートには定義を書かないが, [10] などに定義が記載されている) と呼ばれるものにより, III_0 型, III_λ 型 ($0 < \lambda < 1$) 及び III_1 型のいずれかに分類できる. 本公演のもう一つ的主結果はある条件下で $\mathcal{O}_\Phi''$ の型を決定したことである.

次の記号を準備する.

Notation 3.9. $w \in X^\omega$ の n 番目の文字までを並べたものを $w^{(n)} \in X^n$ と書く. $e \in G$ を G の単位元とし, $g \in G$ に対し $Y_g^n := \{w \in X^\omega \mid h(g, w^{(n)}) = e\}$ と定める. Y_g^n は単調増加な集合列である. $Y_g := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_g^n$ と定める.

$\mathcal{O}_\Phi''$ の型は次のように決定される.

定理 3.10. 任意の $g \in G$ について $\mu(Y_g) = 1$ のとき, $\mathcal{O}_\Phi''$ は $\text{III}_{|X|^{-1}}$ 型である.

より一般のゲージ作用に対応する KMS 状態について, 同様の結果が Cuntz 環 $\mathcal{O}_n(\mathbb{C}^n)$ を $\mathbb{C}$ 上の Hilbert C^* -双加群とみた場合の Cuntz–Pimsner 環. つまり関係式 (2.2) と (2.3) を満たすような S_x たちで生成される普遍 C^* -環) の場合に [3] で示されている. [3] で用いられた重要なアイデアを解説するのに次の記号を用意する. Cuntz 環は G が単位元だけから成る自明な群の場合の $\mathcal{O}_\Phi$ と思えるので, $\mathcal{O}_\Phi$ と共通の文字をここでは用いる.

Notation 3.11.

$$\theta := \sum_{x, y \in X} S_x S_y S_x^* S_y^*,$$

$$\sigma(a) := \sum_{x \in X} S_x a S_x^*,$$

$$\theta(n) := \theta \sigma(\theta) \sigma^2(\theta) \cdots \sigma^{n-1}(\theta)$$

と定める. ただし a は [3] では $\mathcal{O}_n$ の元であり, 本レポートでは $\mathcal{O}_\Phi$ の元である.

[3] で (より一般のゲージ作用) について次の補題が示されている. この補題は型の決定において鍵となっている.

補題 3.12. $a \in \mathcal{O}_n''$ をゲージ作用で止まっている元とする. このとき強 $*$ 位相で

$$\sigma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n)a\theta(n)^*$$

である.

この度次の命題を示すことができた. 次の命題から [3] と同様の議論によって, 定理 3.10 が示される.

命題 3.13. $g \in G$ について, 強 $*$ 位相で

$$\sigma(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n)g\theta(n)^*$$

であることと,

$$\mu(Y_g) = 1$$

であることは同値である.

参考文献

- [1] N. P. Brown and N. Ozawa, *C*-algebras and finite-dimensional approximations*. Graduate Studies in Mathematics, 88. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [2] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 2. Equilibrium states. Models in quantum statistical mechanics*. Second edition. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, (1997). xiv+519 pp.
- [3] M. Izumi, *Subalgebras of infinite C-algebras with finite Watatani indices. I. Cuntz algebras*. Comm. Math. Phys. **155** (1993), no. 1, 157–182.
- [4] T. Kajiwara, and Y. Watatani, *C*-algebras associated with complex dynamical systems*. Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), no. 3, 755–778.
- [5] M. Laca and S. Neshveyev, *KMS states of quasi-free dynamics on Pimsner algebras*. J. Funct. Anal. **211** (2004), no. 2, 457–482.
- [6] M. Laca, I. Raeburn, J. Ramagge, M. F. Whittaker, *Equilibrium states on the Cuntz–Pimsner algebras of self-similar actions*. J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 11, 6619–6661.
- [7] V. V. Nekrashevych, *Cuntz–Pimsner algebras of group actions*. J. Operator Theory **52** (2004), no. 2, 223–249.
- [8] V. V. Nekrashevych, *C*-algebras and self-similar groups*. J. Reine Angew. Math. **630** (2009), 59–123.

- [9] 梅垣壽春, 大矢雅則, 日合文雄, 作用素代数入門 : Hilbert 空間より von Neumann 代数, 現代の数学 **23**, 共立出版 (1985)
- [10] 生西明夫・中神祥臣, 作用素環入門 I 関数解析とフォン・ノイマン環, 岩波書店 (2007)