Mixed Morrey spaces and the boundedness of the maximal operators

首都大学東京大学院　理学研究科数理科学専攻
野ヶ山　徹 (Toru Nogayama) *

概 要

1938 年に楕円型微分作用素の有界性を調べるために C.B.Morrey により Morrey 空間が導入された. 混合 Morrey 空間は Morrey 空間の一つの自然な拡張であり, さらに種々の関数空間（L^p 空間や混合 L^p 空間）の一般化にもなっている. 本講演では, 混合 Morrey 空間の諸性質を述べ, 調和解析で重要である極大作用素の有界性について議論する.

1 Introduction

Lebesgue 空間 L^p は解析学において最も基本的な空間であり, 様々な一般化がこれまでに成されてきている. その中の一つとして, 1961 年に Benedek と Panzone により混合ノルムを備えた Lebesgue 空間 $L^{\vec{p}}$ が導入された [4]. また一方で, 1938 年には楕円型微分作用素の有界性を調べるために C.B.Morrey により Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q$ が導入された [12]. 後に [13, 15, 19] などにおいて, Morrey 空間は盛んに研究されている.

本講演では, この二種類の空間を組み合わせた, 混合モレー空間 $\mathcal{M}^p_{\vec{q}}$ を導入する. この空間は, Morrey 空間の一つの自然な拡張であり, L^p 空間や $L^{\vec{p}}$ 空間の一般化にもなっている. さらに, 調和解析で重要な作用素である Hardy–Littlewood の極大作用素の混合モレー空間における有界性について議論する.

以下, 次のような記号を用いていく. $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \ldots$ は各成分が非負または無限大の n 次元ベクトルを表し, $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n), \vec{q} = (q_1, \ldots, q_n), \vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ とする. 定義より, 例えば, $0 < \vec{p} < \infty$ のような不等式は, 各 i に対して, $0 < p_i < \infty$ が成り立つこととする. さらに, $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ と $r \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\frac{1}{\vec{p}} = \left(\frac{1}{p_1}, \ldots, \frac{1}{p_n}\right), \quad \frac{\vec{p}}{r} = \left(\frac{p_1}{r}, \ldots, \frac{p_n}{r}\right), \quad \vec{p}' = (p_1', \ldots, p_n'),$$

のように定める. ここで, $p_j' = \frac{p_j}{p_j - 1}$ は p_j の共役指数である. $Q = Q(x, r)$ で, 中心 $x \in \mathbb{R}^n$, 半径 $r > 0$ の n 次元立方体を表し, その各辺は各座標軸に対し平行であるとする. n 次元立方体全体の集合を $\mathcal{Q}$ とかく. また, $|Q|$ は立方体 Q の体積を, $\ell(Q)$ は立方体 Q の辺長をそれぞれ表すとする. 最後に, $A \lesssim B$ で, ある定数 $C > 0$ が存在して, $A \leq CB$ となることを表し, $A \sim B$ は $A \lesssim B$ であり, $B \lesssim A$ でもあることとする.

*toru.nogayama@gmail.com,

2 Preliminaries

この章では, 混合モレー空間を定義するために, モレー空間と混合ルベーグ空間の定義と性質を確認する.

$0 < q \leq p \leq \infty$ とする. モレーノルム (*Morrey norm*) $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^p_q}$ を, 可測関数 f に対して,

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \equiv \sup\left\{|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_Q |f(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \ :\ Q \text{ is a cube in } \mathbb{R}^n\right\}$$

のように定義する. モレー空間 (*Morrey space*) $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ を $\|f\|_{\mathcal{M}^p_q}$ が有限であるような可測関数 f 全体の集合とする.

モレー空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ は $1 < q \leq p < \infty$ のとき, Banach 空間になる. Hölder の不等式から, $1 \leq q \leq r \leq p < \infty$ であるとき,

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_1} \leq \|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \leq \|f\|_{\mathcal{M}^p_r} \leq \|f\|_{\mathcal{M}^p_p} = \|f\|_p$$

が成り立つことがわかる. つまり,

$$L^p = \mathcal{M}^p_p \hookrightarrow \mathcal{M}^p_r \hookrightarrow \mathcal{M}^p_q \hookrightarrow \mathcal{M}^p_1$$

という包含関係が存在する.

Remark 2.1. 上の包含関係に関して, モレー空間 $\mathcal{M}^p_q$ は, L^p 空間を真に含んでいることが知られている. 実際, $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}}$ は L^p 空間の元にはならないが, モレー空間の元になることが簡単な計算でわかる.

また, [4] において, Benedek と Panzone によって, 混合ルベーグ空間が導入された.

Definition 2.2 (*Mixed Lebesgue spaces*)**.** [4] $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in (0, \infty]^n$ とする. このとき, 混合ルベーグノルム (*mixed Lebesgue norm*) $\|\cdot\|_{\vec{p}}$ もしくは $\|\cdot\|_{(p_1,\ldots,p_n)}$ を, 可測関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned}\|f\|_{\vec{p}} &= \|f\|_{(p_1,\ldots,p_n)} \\ &\equiv \left(\int_{\mathbb{R}} \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^{p_1}\mathrm{d}x_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}} \mathrm{d}x_2\right)^{\frac{p_3}{p_2}} \cdots \mathrm{d}x_n\right)^{\frac{1}{p_n}}\end{aligned}$$

のように定義する. $p_j = \infty$ のときは, j 変数に対して, sup ノルムをとることとする. 混合ルベーグ空間 (*mixed Lebesgue space*) $L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) = L^{(p_1,\ldots,p_n)}(\mathbb{R}^n)$ を $\|f\|_{\vec{p}} < \infty$ であるような $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ とする. ここで, $L^0(\mathbb{R}^n)$ は, $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数全体の集合とする.

Remark 2.3. (i) $\vec{p} \in (0, \infty]^n$, f を $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数とする. 各 i について, $p_i = p$ とすると,

$$\|f\|_{\vec{p}} = \|f\|_{(p_1,\ldots,p_n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p$$

となるので,

$$L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n).$$

がわかる.

(ii) $1 \leq \vec{p} \leq \infty$ に対して, $L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ は Banach 空間になる.

混合ルベーグ空間について, 簡単に例と性質を述べる.

Example 2.4. Q を立方体とする. このとき, $0 < \vec{p} \leq \infty$ に対して,

$$\|\chi_Q\|_{\vec{p}} = |Q|^{\frac{1}{n}(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_n})}$$

が成り立つ.

混合ルベーグ空間においても, 古典的なルベーグ空間と同様の性質が成り立つ. 例えば,

Proposition 2.5 (Hölder's inequality)**.** $1 < \vec{p}, \vec{q} < \infty$ とし, $\vec{r}$ を

$$\frac{1}{\vec{p}} + \frac{1}{\vec{q}} = \frac{1}{\vec{r}}.$$

を満たすように定める. もし $f \in L^{\vec{p}}, g \in L^{\vec{q}}$ であれば, $fg \in L^{\vec{r}}$ であり,

$$\|fg\|_{\vec{r}} \leq \|f\|_{\vec{p}} \|g\|_{\vec{q}}$$

が成り立つ.

調和解析において重要な作用素の一つに Hardy–Littlewood の極大作用素が挙げられる. これは関数の立方体上での平均値を考え, 立方体に関して上限をとったものである. 正確な定義を与えよう. 可測関数 f に対して, Hardy–Littlewood の極大作用素 M を以下で定義する.

$$Mf(x) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{\chi_Q(x)}{|Q|} \int_Q |f(y)| \mathrm{d}y.$$

L^p 空間における有界性はよく知られている.

Theorem 2.6. $1 < p < \infty$ とする. このとき, $f \in L^p$ に対して,

$$\|Mf\|_p \lesssim \|f\|_p$$

が成り立つ. また, $p = 1$ のときは以下の不等式が成り立つ.

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, |f(x)| > \lambda\}| \lesssim \frac{1}{\lambda} \|f\|_1 \quad (\lambda > 0).$$

1975 年に, Bagby が Hardy–Littlewood の極大作用素の混合ルベーグ空間における有界性を証明している [3].

Theorem 2.7. $1 < \vec{q} < \infty$ とする. このとき, $f \in L^{\vec{q}}$ に対して,

$$\|Mf\|_{\vec{q}} \lesssim \|f\|_{\vec{q}}$$

が成り立つ.

3 Mixed Morrey spaces

この章では, 混合モレー空間を定義し, いくつか性質と例を挙げていく.

Definition 3.1 (*Mixed Morrey spaces*)**.** $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in (0, \infty]^n$ とし, $p \in (0, \infty]$ を

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{q_j} \geq \frac{n}{p}$$

を満たすものとする. このとき, $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ に対して, 混合モレーノルム (*mixed Morrey norm*) $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}}$ を

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}} \equiv \sup\left\{|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{q_j}\right)}\|f\chi_Q\|_{\vec{q}} :\ Q \text{ is a cube in } \mathbb{R}^n\right\}$$

のように定める. 混合モレー空間 (*mixed Morrey space*) $\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$ を $\|f\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}} < \infty$ となるような $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ 全体の集合と定義する.

Remark 3.2. $\vec{q} \in (0, \infty]^n$, $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ とする.

(i) 各 i に対して, $q_i = q$ とすると, Remark 2.3 より

$$|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{q_j}\right)}\|f\chi_Q\|_{\vec{q}} = |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{q}\right)}\|f\chi_Q\|_{\vec{q}} = |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\chi_Q\|_q.$$

したがって, $\mathbb{R}^n$ の立方体に関して上限をとると,

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)}$$

となり,

$$\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$$

がわかる.

(ii) また特に, p を

$$p = \frac{n}{1/q_1 + \cdots + 1/q_n}$$

のようにすると,

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)} &= \sup\left\{|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{q_j}\right)}\|f\chi_Q\|_{\vec{q}} :\ Q \text{ is a cube in } \mathbb{R}^n\right\} \\ &= \sup\left\{\|f\chi_Q\|_{\vec{q}} :\ Q \text{ is a cube in } \mathbb{R}^n\right\} = \|f\|_{\vec{q}}\end{aligned}$$

となるので,

$$L^{\vec{q}}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$$

となることがわかる.

(iii) $1 \leq \vec{q} \leq \infty$ と $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{q_j} \geq \frac{n}{p}$ を満たす p に対して, $\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$ は Banach 空間になる.

Proposition 3.3. $0 < \vec{q} \leq \vec{r} \leq \infty$, $0 < p < \infty$, $\frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_n} \geq \frac{n}{p}$ を仮定する. このとき,

$$\mathcal{M}^p_{\vec{r}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ.

いくつか例を挙げる.

Example 3.4. Remark 2.1 でも述べたように, $1 < q < p < \infty$ であるとき, $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ ということはよく知られている. $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, $\tilde{q} = \max(q_1, \ldots, q_n)$ とおき, 上の埋め込みを使うことで,

$$\mathcal{M}^p_{\tilde{q}}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}^p_{\underbrace{(\tilde{q}, \ldots, \tilde{q})}_{n \text{ times}}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$$

となる. したがって, もし $\max(q_1, \ldots, q_n) = \tilde{q} < p$ であれば,

$$f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} \in \mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$$

となることがわかる.

Example 3.5. $0 < \vec{p} \le \infty$ とし, $f(x) = \prod_{j=1}^n |x_j|^{-\frac{1}{p_j}}$ とおく. $\vec{q}$ を各 $j = 1, \ldots, n$ に対して, $p_j < \infty$ のときは, $q_j < p_j$ とし, $p_j = \infty$ であるときは $q_j \le \infty$ のようにとる. このとき, p を

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} = \frac{n}{p}$$

を満たすようにとると,

$$f(x) = \prod_{j=1}^n |x_j|^{-\frac{1}{p_j}} \in \mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ.

Example 3.6. Q を立方体, $\vec{q} \in (0, \infty]^n$ とする. このとき,

$$\|\chi_Q\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)} = |Q|^{\frac{1}{p}}$$

となる.

4 Boundedness of the Hardy–Littlewood maximal operator in mixed Morrey spaces

この章では, 混合モレー空間における Hardy–Littlewood の極大作用素に関する不等式について考える. 次の命題は, モレー空間と混合モレー空間における Hardy–Littlewood の極大作用素の有界性を示す上で重要である.

Proposition 4.1. ([14, Lemma 4.2]) 可測関数 f と立方体 Q に対して,

$$M[\chi_{\mathbb{R}^n \setminus 5Q} f](y) \lesssim \sup_{Q \subset R \in \mathcal{Q}} \frac{1}{|R|} \int_R |f(x)| \mathrm{d}x \quad (y \in Q) \tag{1}$$

が成り立つ.

モレー空間における Hardy–Littlewood の極大作用素の有界性は, 1987 年に Chiarenza and Frasca により証明された [5]. 定理として述べておく.

Theorem 4.2. $1 < q < p < \infty$ とする．このとき, Hardy–Littlewood の極大作用素 M はモレー空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ 上で有界である．つまり,

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}^p_q} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^p_q}$$

が成り立つ.

混合モレー空間における有界性は以下の通りである.

Theorem 4.3. $1 < \vec{q} < \infty$ とする．$1 < p \le \infty$ を $\frac{n}{p} \le \sum_{j=1}^n \frac{1}{q_j}$ をみたすようにとる．このとき, 任意の $f \in L^0(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つ.

最後にベクトル値不等式に関する結果も挙げておく.

Theorem 4.4. $1 < \vec{q} < \infty$, $1 < u \le \infty$ とする．$1 < p \le \infty$ を $\frac{n}{p} \le \sum_{j=1}^n \frac{1}{q_j}$ を満たすものとする．このとき, 関数列 $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset L^0(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^\infty [Mf_j]^u \right)^{\frac{1}{u}} \right\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left\| \left(\sum_{j=1}^\infty |f_j|^u \right)^{\frac{1}{u}} \right\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つ.

参考文献

[1] D. R. Adams, *A note on Riesz potentials*, Duke Math. J., **42** (1975), 765–778.

[2] K. F. Anderson and R. T. John, *Weighted inequalities for vector-valued maximal functions and singular integrals*, studia mathematica **69**, (1980), 19–31.

[3] R. J. Bagby, *An extended inequality for the maximal function*, Proc. Amer. Math. Soc. **48** (1975), 419–422.

[4] A. Benedek and R. Panzone, *The spaces L^P, with mixed norm*, Duke Math. J. **28** (1961), 301–324.

[5] F. Chiarenza and M. Frasca, *Morrey spaces and Hardy–Littlewood maximal function*, Rend. Mat. **7** (1987), 273–279.

[6] G. P. Curbera, J. García-Cuerva, J. M. Martell and C. Pérez, Extrapolation with weights, rearrangement-invariant function spaces, modular inequalities and applications to singular integrals, Adv. Math. **20** (2006), **203**(1), 256–318.

[7] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*. Translated and revised from the 1995 Spanish original by D. Cruz-Uribe. Graduate Studies in Mathematics, 29. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[8] C. Fefferman and E. Stein, *Some maximal inequalities*, Amer. J. Math, **93** (1971), 107–115.

[9] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Graduate Texts in Mathmatics 249, Springer, New York, 2008.

[10] B. Jessen, J. Marcinkiewicz and A. Zygmund, *Note on the differentiability of multiple integrals*, Fund. Math. **25** (1935), 217–234.

[11] F. Liu, R. Torres, Q. Xue and K. Yabuta, Multilinear strong maximal operators on mixed Lebesgue spaces, preprint

[12] C. B. Morrey Jr., *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), no. 1, 126–166.

[13] J. Peetre, *On the theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ spaces*, J. Funct. Anal. **4** (1969), 71–87.

[14] Y. Sawano, D.I. Hakim and H. Gunawan, *Non-smooth atomic decomposition for generalized Orlicz-Morrey spaces*, Math. Nachr. **288** (2015), no. 14–15, 1741–1775.

[15] Y. Sawano and H. Tanaka, *Morrey spaces for non-doubling measures*, Acta Math. Sinica, **21** (2005), no. 6, 1535–1544.

[16] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Mathematical Series, vol. 43, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[17] B. Stöckert, *Ungleichungen von Plancherel-Polya-Nikol'skij typ in gewichteten L_p^Ω-Räumen mit gemischten Norm*, Math. Nach., **86** (1978), 19–32.

[18] H. Tanaka, *personal communication.*

[19] L. Tang and J. Xu, *Some properties of Morrey type Besov-Triebel spaces*, Math. Nachr. **278** (2005), 904–917.