q-超幾何関数の拡張とモノドロミー保存変形

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
朴 佳南 (Kanam PARK)

1 q-超幾何関数の拡張 $\mathcal{F}_{N,M}$

1.1 q-超幾何関数

q-超幾何級数は Gauss の超幾何級数の q 類似として 19 世紀に Heine によって導入された．Gauss の超幾何級数とは次のような式である

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}x^n,|x|<1. \tag{1}$$

ここで, $(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)$ を表す．級数 (1) の q 類似として定義される q-超幾何級数は次のような式である [1] [2]

$$ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix};x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(q)_n}x^n,|x|<1. \tag{2}$$

ここで, $(a)_n=(1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{n-1}a)=\frac{(a)_\infty}{(q^na)_\infty}$ を表す．ここでは, q-超幾何関数 (2) の重要な性質である Heine の公式と q-積分表示を紹介する．Heine の公式とは次のような等式である．

Proposition 1.1（Heine の公式） (2) は, 次の等式を満たす

$$ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix}x\right)=\frac{(b)_\infty(ax)_\infty}{(c)_\infty(x)_\infty}{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix}\frac{c}{b},x\\ ax\end{matrix}b\right). \tag{3}$$

この証明は, 二項定理の q 類似である q-二項定理と, 和の順序交換によって示される．ここで q-二項定理とは次のようなものである

Theorem 1.1（q-二項定理） 次の等式が成り立つ

$$\frac{(az)_\infty}{(z)_\infty}=\sum_{m\geq 0}\frac{(a)_m}{(c)_m}z^m. \tag{4}$$

次に, (2) の積分表示について述べる．定積分の q 類似である Jackson 積分は次のように定義される．

Definition 1.1（Jackson 積分）

$$\int_0^c f(t)d_qt=c(1-q)\sum_{n\geq 0}f(cq^n)q^n. \tag{5}$$

$q \to 1$ のとき, この和はリーマン積分に移行する. これを用いると (3) は, 次のような積分表示として解釈される.

Proposition 1.2（q-超幾何関数の積分表示） (3) に対して, $a = q^{\alpha}$, $b = q^{\beta}$, $c = q^{\gamma}$ と代入すると, (3) は次のような式になる

$$ {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} q^{\alpha}, q^{\beta} \\ q^{\gamma} \end{matrix}; x\right) = \frac{\Gamma_q(\gamma)}{\Gamma_q(\beta)\Gamma_q(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} \frac{(qt)_\infty (q^{\alpha}xt)_\infty}{(q^{\gamma-\beta}t)_\infty (xt)_\infty} d_q t, \tag{6}$$

ここで, $\Gamma_q(x) = \frac{(q)_\infty}{(q^x)_\infty}(1-q)^{1-x}$ を表す.

1.2 級数 $\mathcal{F}_{N,M}$ の定義

関数 (2) の拡張式 $\mathcal{F}_{N,M}$ を, 次のように定義する

$$\mathcal{F}_{N,M}\left(\begin{matrix} \{a_j\}, \{b_i\} \\ \{c_j\} \end{matrix}; \{y_i\}\right) = \sum_{m_i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{N} \frac{(a_j)_{|m|}}{(c_j)_{|m|}} \prod_{i=1}^{M} \frac{(b_i)_{m_i}}{(q)_{m_i}} \prod_{i=1}^{M} y_i^{m_i}. \tag{7}$$

ここで, $|m| = \sum_{i=1}^{M} m_i$, $(a)_n = (1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{n-1}a) = \frac{(a)_\infty}{(q^n a)_\infty}$. $(M,N) = (1,1)$ のとき, 式 (7) は式 (2) に相等する.

Proposition 1.3（Heine の公式の拡張） (7) は, 次の等式を満たす.

$$\mathcal{F}_{N,M}\left(\begin{matrix} \{y_j\}, \{a_i\} \\ \{b_j y_j\} \end{matrix}; \{x_i\}\right) = \frac{(\{y_j\}, \{a_i x_i\})_\infty}{(\{b_j y_j\}, \{x_i\})_\infty} \mathcal{F}_{M,N}\left(\begin{matrix} \{x_i\}, \{b_j\} \\ \{a_i x_i\} \end{matrix}; \{y_j\}\right). \tag{8}$$

この証明は, Proposition 1.1 と同様に, Theorem 1.1 と和の順序交換によって示される. (8) により, Proposition 1.2 と同様にして次を得る.

Proposition 1.4（$\mathcal{F}_{N,M}$ の積分表示） (8) に対して, $a_i = q^{\alpha_i}$, $b_j = q^{\beta_j}$, $y_j = q^{\gamma_j}$ を代入すると, (8) は次のような式になる

$$\mathcal{F}_{N,M}\left(\begin{matrix} \{q^{\gamma_j}\}, \{q^{\alpha_i}\} \\ \{q^{\beta_j} q^{\gamma_j}\} \end{matrix}; \{x_i\}\right) = \prod_{j=1}^{N} \frac{\Gamma_q(\beta_j+\gamma_j)}{\Gamma_q(\beta_j)\Gamma_q(\gamma_j)} \prod_{j=1}^{N} \int_0^1 d_q t_j \frac{(qt_j)_\infty}{(q^{\beta_j} t_j)_\infty} \prod_{i=1}^{M} \frac{(x_i q^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{N} t_j)_\infty}{(x_i \prod_{j=1}^{N} t_j)_\infty} t_j^{\gamma_j - 1}. \tag{9}$$

2 $\mathcal{F}_{N,M-1}$ を特殊解に持つモノドロミー保存変形

関数 (7) は $M = N = 1$ のとき ${}_2\varphi_1$ に等しく, これで表される特殊解を持つ方程式として q-P_{VI} 方程式 [3] が知られている. また, その他変数化として q-Garnier 系 [7] [8] や q-DS 階層の相似簡約から得られる方程式系 [9] が知られており, それぞれ q-Appell-Lauricella 関数 φ_D, 一般 q-超幾何関数 ${}_{N+1}\varphi_N$ で表される特殊解を持つ. 定義した関数 (7) は $N = 1$ のとき q-Appell-Lauricella 関数 φ_D に等しく, $M = 1$ のとき一般 q-超幾何関数 ${}_{N+1}\varphi_N$ に等しい. 我々の目標は, 関数 (7) で表される特

殊解を持つ方程式系の構成, すなわち q-Garnier 系 [7] [8] や q-DS 階層の相似簡約から得られる方程式系 [9] を包括する結果を得ることである. 微分の場合に, これに対応する結果が Tsuda[10] によって得られている. ここでは, 目標の方程式系の構成について述べる.

2.1 $\mathcal{F}_{N,M}$ が満たすパフ系

まず, $\mathcal{F}_{N,M}$ の積分表示からパフ系を求める. (9) における被積分関数を

$$\Phi(\{u_j\}_{j=1}^N) = \prod_{i=1}^{M} \frac{(x_i a_i u_N)_\infty}{(x_i u_N)_\infty} \prod_{j=1}^{N} \frac{(q u_j/u_{j-1})_\infty}{(b_j u_j/u_{j-1})_\infty} u_j^{\gamma_j} \quad (u_0 = 1, u_N = \prod_{j=1}^{N} u_j), \tag{10}$$

とおくと

$$\Psi_0 = \langle \Phi p_0 \rangle,\ \Psi_{j,i} = \langle \Phi p_{j,i} \rangle \quad (1 \le j \le N, 1 \le i \le M), \tag{11}$$

がパフ系の解の基底になる ([4] [5] など). ここで $\langle f(\{u_j\}) \rangle = \sum_{n_j \in \mathbb{Z}} f(q^{n_j})$ を表し, $p_0 = 1$, $p_{j,i} = \prod_{k=1}^{i-1} \frac{1-x_k u_N}{1-a_k x_k u_N} \cdot \frac{u_{j-1}-b_j u_j}{1-a_i x_i u_N}$ である. 互換 $\sigma_i = \{x_i \leftrightarrow x_{i+1}, a_i \leftrightarrow a_{i+1}\}$ とおくと, 次が成り立つ

$$\sigma_i \begin{bmatrix} p_{j,i} \\ p_{j,i+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{x_i - a_{i+1}x_{i+1}} \begin{bmatrix} (1-a_i)x_i & a_i x_i - a_{i+1}x_{i+1} \\ x_i - x_{i+1} & (1-a_{i+1})x_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{j,i} \\ p_{j,i+1} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

$$\sigma_i(p_{j,k}) = p_{j,k} (k \ne i, i+1). \tag{13}$$

また, 変数 x_M に対する q シフト $T_{x_M}(f(x_M)) = f(qx_M)$ に対して, 次が成り立つ. 互換の積 $\rho = \sigma_M \cdots \sigma_1$ とおくと,

$$\begin{aligned} &T_{x_M}(\Psi_0) = *\rho(\Psi_0) + *\rho(\Psi_{1,1}) + *\rho(\Psi_{2,1}) + \cdots + *\rho(\Psi_{N,1}), \\ &T_{x_M}(\Psi_{j,i}) = \rho(\Psi_{j,i+1})\ (i \ne M), \\ &T_{x_M}(\Psi_{j,M}) = *\rho(\Psi_0) + *\rho(\Psi_{1,1}) + *\rho(\Psi_{2,1}) + \cdots + *\rho(\Psi_{N,1}). \end{aligned} \tag{14}$$

$*$ は x_M に関する有理函数を表す. ここで, $\overrightarrow{\overrightarrow{\Psi}} = [\Psi_0, \Psi_{1,1}, \Psi_{1,2}, \cdots, \Psi_{N,M}]$ とおくと, このパフ系は次のように表すことができる

$$T_{x_M} \overrightarrow{\overrightarrow{\Psi}} = \overrightarrow{\overrightarrow{\Psi}} A, \quad A = R_{M-1} R_{M-2} \cdots R_1 Q_M. \tag{15}$$

ここで, 行列 R_i, Q_M は $(MN+1)$ 次正方行列である. 他変数に対する q シフトは, (14) に対して置換 σ_i を用いることによって求められる.

2.2 $\mathcal{F}_{N,M-1}$ が満たすモノドロミー保存変形

(11) の満たすパフ系の係数行列はその作り方から両立条件 $A_j(T_{x_j} A_i) = A_i(T_j A_j)$ を満たす. このことから, それを特殊化して簡約化したものを, あるモノドロミー保存変形のラックス形式と解釈して目標の方程式を得る.

Definition 2.1 行列 $A = A(z,t)$, $B = B(z,t)$ を

$$A = X_1 X_2^{-1} \cdots X_{2M-1} X_{2M}^{-1} d, \tag{16a}$$

$$B = X_{2M}(z/q) \cdot X_{2M-1}(z/q)^{-1} d', \tag{16b}$$

とする．ただし, d, d' は対角行列, $X_i = X_i(z,t) = \begin{bmatrix} u_1^{(i)} & 1 & & & \\ & u_2^{(i)} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_N^{(i)} & 1 \\ z & & & & c_i/\prod_{j=1}^{N} u_j^{(i)} \end{bmatrix}$ とする．このとき

$$A \cdot B(qz) = B \cdot A(qt), \tag{17}$$

によって定まる方程式系を考える．この方程式系は $2(M-1)N$ 個の変数を持つ．

Remark 2.1　(16) (17) によって定まる方程式系は, 未知関数 $\{u_j^{(i)}\}$ の双有理変換の合成で定まる．

Remark 2.2　$N=1$ の場合, (16) (17) で定まる方程式系は q-Garnier 系 [7] [8] に相当する [6].

(16) (17) で定まる方程式系に対して, 次のことが成り立つ．

Theorem 2.1　(17) で定義されるモノドロミー保存変形は, $\mathcal{F}_{N,M-1}$ で表される解を持つ．

証明の概要を述べる．(15) に対して, あるパラメーターを特殊化すると, パフ系の未知関数 Ψ_0, $\Psi_{i,j}$ のうち $\Psi_{j,M}$ のみが x_M に依存するようになる．$\Psi_{j,M}$ 以外の未知関数を Ψ_0 の係数に読み替えて, $\frac{\Psi_{j,i}}{\Psi_0}$ $(i \neq M)$ を x_M 以外の変数に依存する関数として $r_{j,i}$ とおくと, 式 (15) は次のように表せる

$$T_{x_M} \overrightarrow{\Psi} = \overrightarrow{\Psi} {X'}_1 {X'}_2^{-1} \cdots {X'}_{2M-1}^{-1} X'_{2M} d''. \tag{18}$$

ここで $\overrightarrow{\Psi} = [\Psi_0, \Psi_{1,M}, \Psi_{2,M}, \cdots, \Psi_{N,M}]$ とおく． d'' は対角行列, $X'_i = X'_i(z,t) = \begin{bmatrix} {u'_1}^{(i)} & 1 & & & \\ & {u'_2}^{(i)} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & {u'_N}^{(i)} & 1 \\ z & & & & c_i/\prod_{j=1}^{N} {u'_j}^{(i)} \end{bmatrix}$ を表し, $u_j'^{(i)}$ は $\{r_{j,i}\}$ の有理函数で表される．これと (16) を見比べて, 結果を得る．

参考文献

[1] E. Heine., (1846) Uber die Reihe..., *Reine.Angew.Math.,* **32** , 210–212.

[2] E. Heine., (1847) Untersuchungen uber die Reihe..., *Reine.Angew.Math.,* **34** , 285–328.

[3] Jimbo M., and Sakai H., (1996) A q-analogue of the sixth Painlevé equation, *Lett. in Math. Phys.*, **38**, 145-154.

[4] Matsuo A., (1993) Jackson integrals of Jordan-Pochhammer type and quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations, *Commun. Math. Phys.*, **151**, 263–273.

[5] Mimachi, K., (1996) A solution to quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations and its application to eigenvalue problems of the Macdonald type, *Duke Math. J.*, **85**, 635–658.

[6] Park K., A certain generalization of q-hypergeometric functions and their related monodromy preserving deformation, preprint, nlin.SI/1804.08921.

[7] Sakai, H., (2005) A q-Analog of the Garnier System, *Funkcialaj Ekvacioj*, **48**, 273–297.

[8] Sakai, H., (2005) Hypergeometric solution of q-Schlesinger system of rank two, *Lett. Math. Phys.*, **73**, 237–247.

[9] Suzuki, T., (2015) A q-analogue of the Drinfeld-Sokolov hierarchy of type A and q-Painlevé system, *AMS Contemp. Math.*, **651**, 25–38

[10] Tsuda T., (2012) Hypergeometric solution of a certain polynomial hamiltonian system of isomonodromy type, *Quart. J. Math*, **63** 489–505.