

摂動格子の剛性と非剛性

千葉大学大学院 融合理工学府 数学情報科学専攻

新井裕太 (Yuta Arai) *

概要

位相空間 S 上の点過程とは, S 内のランダムな集積点を持たない高々可算な部分集合 (点配置) のことを言う. 点過程の研究において, 摂動格子における剛性と耐性という性質を見る問題があり, 近年盛んに研究されている. 本レポートでは, 摂動格子として, ユークリッド空間に値をとる独立同分布である確率変数によって乱された多次正方格子を扱い, 剛性 (球の外にある摂動格子の点を可測関数を用いて見てやると球の内部にある点の個数を決定できるという性質) や耐性 (摂動格子から有限個の点を除いたものと元の摂動格子はそれぞれの分布を用いて見てやると区別できないという性質) を調べる. 最も基本的な点過程であり, 無相関な点配置のモデルであるポアソン点過程では耐性があり, ランダム行列理論での研究対象の 1 つである対数相関をもつジニーブル点過程は剛性があることが 2016 年に Osada と Shirai により示されている. また, ガウス摂動格子に対しては, 2010 年に Holroyd と Soo は次元が 1, 2 のとき耐性をもつことを示し, 最近の Peres と Sly による論文により, 次元が 3 以上のとき, 剛性と耐性に関する相転移が見られることが示されている. 本レポートでは, 次元が 3 次元以上のとき, ラプラス摂動格子と一様摂動格子において耐性に関する相転移が見られることを紹介する.

1 導入

1.1 点過程

点過程を以下のように定義する.
本レポートにおいて, 配置空間を

*E-mail: yutaarai@chiba-u.jp

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\mathbb{R}^d) &= \left\{ \xi = \sum_{j \in \Lambda} \delta_{x_j} : x_j \in \mathbb{R}^d, \Lambda : \text{可算集合}, \xi(K) < \infty, \forall K \subset \mathbb{R}^d : \text{compact} \right\} \\ &= \{ \xi : \text{非負整数値ラドン測度} \}\end{aligned}$$

とする.

ただし, δ_a は a のデルタ測度で,

$$\delta_a(A) = \mathbf{1}_A(a) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

また, $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^d)$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^d) &= \{ \xi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) : \xi(\{x\}) \leq 1, x \in \mathbb{R}^d \} \\ &= \{ \{x_j\}_{j \in \Lambda} \subset \mathbb{R}^d : \#(\{x_j\}_{j \in \Lambda} \cap K) < \infty, \forall K \subset \mathbb{R}^d : \text{compact} \} \\ &= \{ \{x_j\}_{j \in \Lambda} \subset \mathbb{R}^d : \{x_j\}_{j \in \Lambda} \subset \mathbb{R}^d \text{は集積点を持たない} \}\end{aligned}$$

とする.

$\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ は多重点がない場合 $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^d)$ と同一視する.

ここで, $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ 上に次の位相を入れる.

Definition 1.1 (漠位相). $\mathbb{R}^d$ 上のコンパクト台の連続関数 f の全体を $C_c(\mathbb{R}^d)$ とする.

$f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ と $\xi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ に対して,

$$\langle \xi, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \xi(x) = \sum_{i \in \Lambda} f(x_i)$$

と定義する.

$\xi, \xi_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d), n = 1, 2, \dots$ に対して, $\langle \xi_n, f \rangle \rightarrow \langle \xi, f \rangle (\forall f \in C_c(\mathbb{R}^d))$ となるときの ξ_n は ξ に漠収束するという.

この収束によって定まる位相を漠位相という.

Remark 1. 漠位相の下で $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ はポーランド空間 (完備可分距離空間) である.

証明は参考文献 [8],[9] を参照.

写像族 $\{\xi \mapsto \xi(K) : K \text{ は compact}\}$ で生成される $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ の σ -加法族を $\mathcal{B}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$ とし, $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ -値確率変数 $\xi(\omega)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の点過程という.

本レポートでは, 可測空間 $(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)))$ 上の確率測度 μ も点過程と呼ぶことにする.

ただし, μ はラドン測度で $\mu(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)) = 1$ つまり整数値ラドン測度を台に持つものである.

1.2 Perturbed lattice

この節では Perturbed lattice の定義をし, その後その性質である Rigidity と Tolerance の定義をしていく.

Definition 1.2 (Perturbed lattice). $\mathbf{X} := (X_z)_{z \in \mathbb{Z}^d}$ を i.i.d である確率変数の列とする. そのとき,

$$\mathbb{Z}(\mathbf{X}) := \{z + X_z : z \in \mathbb{Z}^d\}, \quad \mathbb{Z}_0(\mathbf{X}) := \{z + X_z : z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}\}$$

を摂動格子と呼ぶ.

また, 対応する点過程を $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$, $\Pi(\mathbb{Z}_0(\mathbf{X}))$ とする.

次に Rigidity の定義をする.

Definition 1.3 (Rigidity). $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と球 $B \subset \mathbb{R}^d$ において, $\mathbb{Z}_{in}(B) = \mathbb{Z}(\mathbf{X}) \cap B$, $\mathbb{Z}_{out}(B) = \mathbb{Z}(\mathbf{X}) \cap B^c$ と定義するとき, $\forall B \subset \mathbb{R}^d$ において

$$N_B(\mathbb{Z}_{out}(B)) = |\mathbb{Z}_{in}(B)| \text{ a.s.}$$

となるような $\mathbb{R}^d$ に含まれる離散点集合の集合族上の可測関数 $N = N_B$ が存在するとき, $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は rigid であるという.

次に Tolerance の定義をする.

これは Holroyd と Soo [1] の定義に準ずる.

Definition 1.4 (Tolerance). $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ の点を $Z \in \mathbb{Z}(\mathbf{X})$ a.s. であるような $\mathbb{R}^d$ 値確率変数 Z とする.

1. 点過程 $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ が **deletion tolerant** であるとは, 任意の $Z \in \mathbb{Z}(\mathbf{X})$ において, $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X})) -$

δ_Z が $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ に関して絶対連続である.

2. 点過程 $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ が **deletion singular** であるとは, 任意の $Z \in \mathbb{Z}(\mathbf{X})$ において, $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X})) - \delta_Z$ と $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ が相互特異である.

3. 点過程 $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ が **insertion tolerant** であるとは, ルベーク測度 $\mathcal{L}(V) \in (0, \infty)$ を持つ任意のボレル集合 $V \subset \mathbb{R}^d$ において, U が $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と独立で V において一様に分布するとき $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X})) + \delta_U$ が $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ に関して絶対連続である.

4. 点過程 $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ が **insertion singular** であるとは, ルベーク測度 $\mathcal{L}(V) \in (0, \infty)$ を持つ任意のボレル集合 $V \subset \mathbb{R}^d$ において, U が $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と独立で V において一様に分布するとき $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X})) + \delta_U$ が $\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ に関して相互特異である.

2 先行研究

この章では Peres と Sly の先行研究について紹介する.

ただし, Tolerance の定義が Holroyd, Soo の定義と違い摂動格子の空間でなされていることに注意する. ([13] 参照.)

任意の有限集合 $S \subset \mathbb{Z}^d$ において

$$\mathbb{Z}_s(\mathbf{X}) := \{X_z + z : z \in \mathbb{Z}^d \setminus S\}$$

とする.

Proposition 2.1. 全てにおいて正であるような密度を X_z の分布が持っているとする. 摂動格子 $\mathbb{Z}(\mathbf{X}) := \{X_z + z : z \in \mathbb{Z}^d\}$ が rigid である.

$\iff$ 任意の有限集合 $S \subset \mathbb{Z}^d$ において $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と $\mathbb{Z}_s(\mathbf{X})$ が相互特異である.

全てにおいて正であるような密度を X_z の分布が持っているという仮定において, 1次元で perturbation X_z が有界 1 次モーメントを持つときか 2次元で perturbation X_z が有界 2 次モーメントを持つとき摂動格子が deletion singular であることが Holroyd, Soo [1] によって示されている.

3次元以上での Gaussian perturbation の結果については次の結果がある.

Theorem 2.2. $\mathbb{Z}(\mathbf{X}) := \{X_z + z : z \in \mathbb{Z}^d\}$ を Gaussian $N_d(0, \sigma I)$ perturbation を持つ $\mathbb{Z}^d$ の摂動格子とする.

このとき $d \geq 3$ において以下を満たす臨界変数 $0 < \sigma_r(d) \leq \sigma_c(d)$ が存在する.

[1] $\sigma > \sigma_c$ のとき

$\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は deletion tolerant で $\mathbb{Z}_0(\mathbf{X})$ に関して相互絶対連続.

[2] $0 < \sigma < \sigma_c$ のとき

$\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は deletion singular

[3] $0 < \sigma < \sigma_r$ のとき

$\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は rigid

[4] $\sigma > \sigma_r$ のとき

$\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は non-rigid

Cauchy perturbation については以下の結果がある.

Lemma 2.3. $d = 1$ とし $\{X_z\}$ を i.i.d でコーシー分布に従う perturbation とする.

そのとき摂動格子は任意の $k \in \mathbb{N}$ において k-deletion singular である.

より一般的な perturbation に関する結果については次の定理のようなものがある.

Theorem 2.4. $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ を密度を $g(z)$ とする perturbation X_z を持つ摂動格子とする.

[1] $d < \alpha < 2d$ で

$$\inf_{z \in \mathbb{R}^d} \frac{g(z)}{1 \wedge |z|^{-\alpha}} > 0$$

のとき

$\forall k \in \mathbb{N}$ において $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は k-deletion tolerant であり, k-insertion tolerant である.

また $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ は任意の有限集合 $S \subset \mathbb{Z}^d$ において $\mathbb{Z}_S(\mathbf{X})$ に関して相互絶対連続である.

[2] $\alpha > 2d$ で

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^d} \frac{g(z)}{1 \wedge |z|^{-\alpha}} < \infty$$

のとき

$0 < \forall \epsilon' < \epsilon$ と $\forall k$ において perturbation $\epsilon' X_z$ を持つ摂動格子が deletion singular となるような ϵ が存在する.

この結果は $\mathbb{E}|X_z|^{\alpha-d} < \infty$ という条件のもとでも成り立つ.

ここで, deletion tolerance と insertion tolerance という 2 つの違う概念の間の同値性を見る.

Proposition 2.5. $\mathbb{Z}(\mathbf{X}) := \{X_z + z : z \in \mathbb{Z}^d\}$ とし, 全てにおいて正であるような密度を X_z の分布が持っているとする.

そのとき以下は同値

- (1) 摂動格子が deletion tolerant である.
- (2) 摂動格子が insertion tolerant である.
- (3) 摂動格子が deletion singular でない.
- (4) 摂動格子が insertion singular でない.
- (5) $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と $\mathbb{Z}_0(\mathbf{X})$ は相互絶対連続である.
- (6) $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と $\mathbb{Z}_0(\mathbf{X})$ は相互特異でない.

この命題をより一般化したものが次の命題である.

Proposition 2.6. 全てにおいて正であるような密度を X_z の分布が持っているとする.
 $S \subset \mathbb{Z}^d$ を濃度が $k \in \mathbb{N}$ である集合とする.

そのとき以下は同値

- (1) 摂動格子が k -deletion tolerant である.
- (2) 摂動格子が k -insertion tolerant である.
- (3) 摂動格子が k -deletion singular でない.
- (4) 摂動格子が k -insertion singular でない.
- (5) $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と $\mathbb{Z}_s(\mathbf{X})$ は相互絶対連続である.
- (6) $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ と $\mathbb{Z}_s(\mathbf{X})$ は相互特異でない.

3 主結果

この章では、次元が3次元以上のとき、ラプラス摂動格子と一様摂動格子において耐性に関する相転移が見られることを紹介する.

まず、ラプラス摂動格子についての結果を紹介する.

Theorem 3.1 (A). $\mathbb{Z}(\mathbf{X}) := \{X_z + z : z \in \mathbb{Z}^d\}$ を i.i.d な確率変数 X_z が d 次元ラプラス分布 $BE x_d(\frac{1}{\lambda})$ に従うような $\mathbb{Z}^d$ の摂動格子とする.

このとき、 $d \geq 3$ において以下を満たす臨界変数 $0 < \lambda_c(d) < \infty$ が存在する.

[1] $\lambda > \lambda_c(d)$ のとき

$\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ は deletion singular である.

[2] $0 < \lambda < \lambda_c(d)$ のとき

$\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ は deletion tolerant であり insertion tolerant で $\Pi(\mathbb{Z}_0(\mathbf{X}))$ に関して相互絶対連続である.

この定理の証明は Peres, Sly のガウス摂動格子の証明と同様な証明によって与えられる.

次に一様摂動格子についての結果を紹介する. この定理の証明には Oriented bond percolation の結果 [6],[7] を使っている.

Theorem 3.2 (A). $\mathbb{Z}(\mathbf{X})$ を Uniform perturbation $U_d(-\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}L)$ を持つ $\mathbb{Z}^d$ の perturbed lattice とする.

このとき, $d \geq 3$ において以下が成り立つ.

[1] $L > L_c(d)$ のとき

$\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ と $\Pi(\mathbb{Z}_0(\mathbf{X}))$ は相互特異でなく, 相互絶対連続でない.

[2] $L < L_c(d)$ のとき

$\Pi(\mathbb{Z}(\mathbf{X}))$ と $\Pi(\mathbb{Z}_0(\mathbf{X}))$ は相互特異である.

参考文献

- [1] Alexander E. Holroyd, Terry Soo, "Insertion and Deletion Tolerance of Point Processes", Electron. J. Probab. Volume 18 (2013).
- [2] Grimmett, Geoffrey R, "Percolation", Springer Science and Business Media, (1999).
- [3] Hirofumi Osada, Tomoyuki Shirai, "Absolute continuity and singularity of Palm measures of the Ginibre point process", Probab. Theory Relat. Fields (2016).
- [4] Itai Benjamini, Robin Pemantle, and Yuval Peres, "Unpredictable paths and percolation", Annals of probability (1998).
- [5] Noam Berger and Yuval Peres, "Detecting the trail of a random walker in a random scenery", Electron. J. Probab. Volume 18 (2013).
- [6] Nobuo Yoshida, "Localization for Linear Stochastic Evolution", Journal of Statistical Physics. Volume 138 (2010).

- [7] Nobuo Yoshida, "Phase Transitions for the Growth Rate of Linear Stochastic Evolutions", Journal of Statistical Physics. Volume 133 (2008).
- [8] Olav Kallenberg, "Random Measures", Academic press ,(1986).
- [9] Peter Jagers, "Aspects of random measures and point processes", Chalmers institute of technology and the University of Goteborg. Department of mathematics,(1972).
- [10] Peter Mörters and Yuval Peres, "Brownian motion", Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, (2010).
- [11] Richard Durrett, Roberto H. Schonmann, and Nelson I. Tanaka "Correlation Lengths for Oriented Percolation" Journal of Statistical Physics. Volume 55, (1988).
- [12] Richard Durrett, "Oriented Percolation in Two Dimensions", Ann. Prob. 12:999-1040 ,(1984).
- [13] Yuval Peres, Allan Sly, "Rigidity and tolerance for perturbed lattices", arXiv:1409.4490v1 [math.PR] ,(2014).