非線形境界条件に支配される放物型方程式に対する比較定理とその応用について *

早稲田大学大学院 先進理工学研究科
喜多 航佑 (Kosuke KITA) †

概要

非線形境界条件に支配される放物型方程式の初期値境界値問題に対する比較定理について報告する．特に, 境界上での非線形性と解の減衰についての関係に注目し, 得られた比較定理の幾つかの具体的なモデルへの応用について述べる．

1　研究の背景

本講演では, 非線形境界条件に支配される放物型方程式に対しての比較定理について考える．比較定理は二階の非線形放物型方程式の研究において, 非常に有用な道具であることはよく知られている．例えば, 最も単純な形として

$$
\mathrm{P}(u^0) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(u(t,x)), & t>0,\ x\in\Omega, \\ u(t,x)=0, & t>0,\ x\in\partial\Omega, \\ u(0,x)=u^0(x), & x\in\Omega, \end{cases}
$$

を考える．ここで, Ω は $\mathbb{R}^N$ の滑らかな境界をもつ領域とする．このとき, $i=1,\,2$ に対して u_i を $\mathrm{P}(u_i^0)$ の解とすると, 初期値及び f に適当な仮定をおくと, $u_1^0 \le u_2^0$ *a.e.* in Ω ならば $u_1 \le u_2$ *a.e.* in $(0,\infty)\times\Omega$ が成り立つ．このように, 初期値の大小が解の大小に保存するという性質は, 優解・劣解の構成など, 反応拡散方程式を研究する上で非常に重要である．

ところで, 実際の現象を偏微分方程式をもって記述しようとするとき, 領域内部の方程式だけでなく, 境界条件を如何に適切に課すかということが本質的かつ重要な問題となる．実際, 領域内部の方程式の形が同じでも境界条件が異なると解が全く異なる性質を有することがあるという事実が知られている．今回, 我々は境界条件に非線形性を課す問題を考える．特に, 非線形放射に相当する境界条件を取り扱う．実際, 原子炉や或いは海洋や湖などの非常に大きな系では, 境界における熱流の制御が困難であり Stefan-Boltzmann の法則に想起されるような非線形放射に対応する境界条件を課すことが妥当であると考えられる．その他にも酵素の反応速度式や自然熱対流のモデルにも, 前述の非線形放射と同様なタイプの非線形性を持った境界条件が現れる場合があることが指摘されている．これらの事実にもかかわらず, 非線形境界条件を課した反応拡散方程式 (系) に対する統一的な解析の手法は十

* 本研究は大谷光春教授 (早稲田大学) との共同研究に基づくものである．
† kou5619@asagi.waseda.jp

分に整備されているとは言えない．そこで我々は, 前述の比較定理とは少し視点を変えて, 初期値の大小ではなく境界条件の非線形性の強さに関する比較定理を, より多くの方程式を包括するようにして構築することで, 非線形境界条件を課した反応拡散方程式の解の漸近挙動の研究に対する手法の一つを確立できると考えた．つまり, 今回我々の考える問題は, “初期値や内部の方程式の形が同じ場合に, 境界条件が異なると解の性質はどう変わるのか” という事に主眼を置いた反応拡散方程式の解析である．

2 非線形境界条件

非線形境界条件に関して述べる前に, 劣微分作用素について簡単に説明する．詳しくは [1] や [3] を参照．X を実 Banach 空間とする．その双対を X^* で表し, 双対積を ${}_{X^*}< \cdot, \cdot >_X$ とする．また, $\varphi : X \to (-\infty, \infty]$ を適正 ($\varphi \not\equiv \infty$) 凸下半連続汎函数とする．$D(\varphi) = \{u \in X\,;\, \varphi(u) < \infty\}$ とおき, これを φ の有効領域と呼ぶ．このとき, φ の $u \in D(\varphi)$ における劣微分 $\partial\varphi(u)$ は

$$\partial\varphi(u) := \{f \in X^*\,;\, {}_{X^*}< f, v-u >_X \le \varphi(v) - \varphi(u), \quad \forall v \in X\}$$

と定義される．定義から明らかなように劣微分は一般には多価を許す．また, この作用素 $\partial\varphi : u \mapsto \partial\varphi(u)$ を劣微分作用素と呼ぶ．特に, $X = H$ が Hilbert 空間であるときは, ${}_{X^*}< \cdot, \cdot >_X$ は H の内積 $(\cdot, \cdot)_H$ とする．$\partial\varphi(u)$ は上の定義で $X = X^* = H$ とすればよい．

今回, 我々が考える非線形境界条件は以下のタイプである．以下では, Ω を $\mathbb{R}^N$ の滑らかな境界を持つ有界領域とする．

$$-\partial_\nu u \in \beta(u) \qquad \text{on} \quad \partial\Omega. \tag{1}$$

ここで, $\beta = \partial j$ とする．但し, $j : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ はある適正凸下半連続函数である．このとき, $\varphi : L^2(\Omega) \to (-\infty, \infty]$ を

$$\varphi(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} j(u) d\sigma & u \in H^1(\Omega),\ j(u) \in L^1(\partial\Omega), \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

で定めると, φ は $L^2(\Omega)$ 上の適正凸下半連続汎函数となり,

$$\partial\varphi(u) = -\Delta u \qquad \forall u \in D(\partial\varphi),$$

$$D(\partial\varphi) = \left\{u \in H^2(\Omega)\,;\, -\partial_\nu u \in \beta(u) \quad a.e. \text{ on } \partial\Omega\right\},$$

となる．さらに, ある定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して,

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le C_1 \| -\Delta u + u\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \qquad \forall u \in D(\partial\varphi),$$

が成り立つ．このような劣微分の正確な記述は, 対応する非線形楕円型方程式の正則性の問題と同等であり容易ではない ([2])．注意として, $\partial\varphi$ は見掛け上は $-\Delta$ であり線形作用素の様であるが, 定義域が非線形であるため非線形作用素と見做さなくてはならない．また, 一般に劣微分作用素は極大単調作用素であることが知られているので, 非線形境界条件を伴うラプラシアンを拡散項として持つ (準線形) 放物型方程式の局所可解性は抽象発展方程式の理論から議論することが出来る．

以下, 上記の型で記述される境界条件の例を少し挙げる [1, 3]. 尚, 当然 $\beta(r)=0$ のときは斉次 Neumann 境界条件に, $\beta(u)=u$ のときは Robin 境界条件に対応しており, 良く用いられる線形の境界条件を含んでいることに注意.

例 2.1 (冪乗型)**.** 黒体輻射で現れる Stefan-Boltzmann の法則は

$$\beta(r)=\begin{cases}\alpha(r^4-r_0^4) & r\geq 0,\\ -\alpha r_0^4 & r<0,\end{cases}$$

で表される. ここで, α, r_0 は正の定数. また, 自然熱対流の記述で現れる境界条件として次の形で書かれることが知られている.

$$\beta(r)=\begin{cases}\alpha r^{\frac{5}{4}} & r\geq 0,\\ 0 & r<0.\end{cases}$$

例 2.2 (Michaelis-Menten 型)**.**

$$\beta(r)=\begin{cases}\dfrac{r}{a(r+b)} & r>0,\\ (-\infty,0] & r=0,\\ \emptyset & r<0.\end{cases}$$

ここで, a, b は正の定数. 酵素の拡散反応の記述の際に用いられる.

例 2.3 (斉次 Dirichlet 境界条件)**.** (1) は見掛け上, Dirichlet 境界条件を含んでいないように見えるが実は β を以下のように定めると, (1) は斉次 Dirichlet 境界条件になる.

$$\beta(r)=\begin{cases}\mathbb{R} & r=0,\\ \emptyset & r\neq 0.\end{cases}$$

例 2.4 (Signorini の問題)**.** 摩擦の数学的な記述に関連した弾性学の問題に現れる Signorini の問題は次のように表現できる.

$$\beta(r)=\begin{cases}0 & r>0,\\ (-\infty,0] & r=0.\end{cases}$$

このとき, 境界条件は

$$u\partial_\nu u=0,\quad u\geq 0,\quad \partial_\nu u\geq 0 \qquad \text{on } \partial\Omega,$$

となることが知られている.

3 主結果

ここでは次の初期値境界値問題を考える.

$$\mathrm{NBC}(F,\beta,\gamma,a;T)\qquad \begin{cases}\partial_t u-\varDelta u+\gamma(u)\ni F(u), & t\in[0,T],\ x\in\Omega,\\ -\partial_\nu u\in\beta(u), & t\in[0,T],\ x\in\partial\Omega,\\ u(0,x)=a(x), & x\in\Omega.\end{cases}$$

ここで, Ω は滑らかな境界 $\partial\Omega$ $(\neq \emptyset)$ を持つ $\mathbb{R}^N$ の領域であり, $\nu = \nu(x)$ は境界上の $x \in \partial\Omega$ での外向き法線ベクトルとし, その外向き法線微分を ∂_ν で表す $(\partial_\nu u = \nabla u \cdot \nu)$. また, β, γ はある適正凸下半連続函数 j, $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を以って $\beta = \partial j$ 及び $\gamma = \partial k$ と表される極大単調グラフとし, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は一価の写像である. 初期値を $a \in L^\infty(\Omega)$ とし, $T > 0$ は $\mathrm{NBC}(F, \beta, \gamma, a; T)$ の解の極大存在時間とする. 本講演では, $\mathrm{NBC}(F, \beta, \gamma, a; T)$ の解を $C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}_{loc}((0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ のクラスに属する強解と定める.

定理 3.1. u_i をそれぞれ $\mathrm{NBC}(F_i, \beta_i, \gamma_i, a_i; T_i)$ $(i = 1, 2)$ の強解とする. 以下を仮定する.

(A1) $a_1 \leq a_2$ *a.e.* in Ω,
(A2) "$D(\beta_1) \subset D(\beta_2)$ かつ $\min \beta_1(r) - \max \beta_2(r) \geq 0 \quad \forall r \in D(\beta_1)$"
または "$[r_1 - r_2]^+ = 0 \quad \forall r_1 \in D(\beta_1), \forall r_2 \in D(\beta_2)$",
(A3) $D(\gamma_1) \subset D(\gamma_2)$ かつ $\min \gamma_1(r) - \max \gamma_2(r) \geq 0 \quad \forall r \in D(\gamma_1)$,
(A4) $F_1 \leq F_2$ *a.e.* in $\mathbb{R}$ かつ F_1 と F_2 の少なくとも一方は局所 *Lipschitz* 連続.

このとき, 次が成立する.

$$u_1(t, x) \leq u_2(t, x) \qquad \forall t \in [0, T], \quad a.e.\ x \in \Omega.$$

ここで, $T = \min(T_1, T_2)$ 及び $[w]^+ = \max(w, 0)$ とする.

4　応用

簡単のため, 次の非線形熱方程式を考える.

$$\begin{cases} \partial_t u - \varDelta u = |u|^{p-2}u, & t > 0,\ x \in \Omega, \\ \partial_\nu u + |u|^{q-2}u = 0, & t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{NH}$$

p, $q > 2$ とし, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ とする. (NH) に対して $q < p$ のとき, 即ち, 内部の方程式の非線形性が境界における非線形性より強いときは, 斉次 Dirichlet 境界条件の場合と同様の手法により有限時間で爆発する解が存在するという事が簡単に分かる. ところが, 一般に $q > p$ の場合, 即ち境界での非線形性の方が強い場合には, Dirichlet 境界条件の場合と同様の手法が上手く回らず, 有限時間爆発解の存在を示すのに複雑な議論と煩雑な計算が必要になっていた [6]. ここで, (NH) と

$$\begin{cases} \partial_t u - \varDelta u = |u|^{p-2}u, & t > 0,\ x \in \Omega, \\ u = 0, & t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

は, 定理 3.1 の仮定を満たしていることに注意. 今回得られた比較定理によれば, (NH) は q の値に依らず (q と p の関係に依らず) 有限時間で爆発する解を持つという事を非常に容易に示すことが出来る.

また, 講演では摂動項への仮定は厳しくなるものの, 定理 3.1 が多成分の反応拡散系に対しても有効になる場合があることについて, 非線形境界条件を課した原子炉モデルの反応拡散系 [4] を例に言及する.

参考文献

[1] V. Barbu, "*Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*", Springer Monographs in Mathematics, 2010.

[2] H. Brézis, Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations, in Contributions to Nonlinear Funct. Analysis, Madison, 1971, (E. Zarantonello ed.), Acad. Press, 1971, 101-156.

[3] H. Brézis, "*Opérateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contractions dans Espace de Hilbert*," North Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1973.

[4] K. Kita, M. Ôtani and H. Sakamoto, On some parabolic systems arising from a nuclear reactor model with nonlinear boundary conditions, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **27**, No.2 (2018), 193-224.

[5] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, "*Linear and quasilinear equations of parabolic type*", Translations of Mathematical Monographs **23**, Amer. Math. Soc. 1968.

[6] A. Rodríguez-Bernal and A. Tajdine, Nonlinear balance for reaction-diffusion equations under nonlinear boundary conditions: dissipativity and blow-up, *J. Differential Equations*, **169**, no. 2 (2001), 332-372.