

Non-i.i.d. random holomorphic dynamical systems

渡邊天鵬 Takayuki Watanabe *
京都大学大学院人間・環境学研究科

概要

リーマン球面上の複素力学系の研究は古くから行われており、近年になってそのランダム化が活発に研究されている。本稿では独立同分布でないランダム性をもつ有理関数の力学系について考え、力学系がある意味で安定になるための十分条件を与え、その条件のもとでランダム力学系特有の現象が起こることを紹介する。本研究は角大輝氏との共同研究 [2] に基づく。

1 設定と動機

複素一変数の非定数有理関数全体を Rat とおき、 $f \in \text{Rat}$ を自然な方法でリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ への正則写像とみる。独立同分布でないランダム力学系を、次のようなマルコフ連鎖として定義する。

Setting 1.1. $m \in \mathbb{N}$ とし、 Rat 上の m^2 個の（非負値）測度の族 $\tau = (\tau_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ で次を満たすものを考える： $p_{ij} := \tau_{ij}(\text{Rat})$ と置いたとき $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$ が任意の $i = 1, \dots, m$ で成立する。ただし、 $\tau_{ij} \equiv 0$ かもしれない。このとき、 $\hat{\mathbb{C}} \times \{1, \dots, m\}$ 上の点 (z, i) からボレル集合 $B \times \{j\}$ への遷移確率が

$$\mathbb{P}((z, i), B \times \{j\}) = \tau_{ij}(\{f \in \text{Rat} \mid f(y) \in B\})$$

で与えられるマルコフ連鎖をマルコフシステムという。

Remark 1.2. $m = 1$ のとき Setting 1.1 のマルコフシステムは、一つの確率分布 τ_{11} に従って毎回独立に写像を選択するような独立同分布ランダム複素力学系である。さらに、 τ_{11} が $f \in \text{Rat}$ に重みを持つディラック測度 δ_f の場合、このシステムは写像 f の反復合成により定まる決定論的な力学系である。

本稿では Setting 1.1 で定義されるマルコフ連鎖を力学系の観点から考察する。独立同分布ランダム複素力学系は 1990 年代に Fornaess と Sibony [1] によって創始されたが、独立同分布でない場合に関する結果はあまり知られていない。 $m > 1$ のとき上のシステムは**独立同分布でないランダム力学系**であり、本稿で一番興味があるのはこの場合である。

以下この節では、決定論的複素力学系および独立同分布ランダム複素力学系に関する結果を述べることにより本研究の背景を紹介する。特に、吸引力的な周期点についての結果が重要である。

* E-mail: watanabe.takayuki.43c@st.kyoto-u.ac.jp

Definition 1.3. $f \in \text{Rat}$ とする. 決定論的力学系の文脈において, 点 $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ が f の周期点であるとはある $p \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_p(z_0) = f^{\circ p}(z_0) = z_0$$

となることをいう. f の周期点 $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ が吸引的であるとは, z_0 での座標 φ について $\varphi \circ f^{\circ p} \circ \varphi^{-1}$ の $\varphi(z_0)$ における複素微分の絶対値が 1 よりも小さいことをいう.

吸引的周期点 z_0 の周期軌道を $\gamma = \{z_0, f(z_0), \dots, f^{\circ p-1}(z_0)\}$ とすると, テイラーの定理より z_0 の近傍の点 z の軌道は γ に吸引される; $f^{\circ np+k}(z) \rightarrow f^{\circ k}(z_0)$ ($n \rightarrow \infty$). このような z の集合を γ の吸引領域といい, 上記のように吸引領域では力学系が安定的である. 決定論的な力学系で古くから知られているこの結果を, ランダム力学系の視点から考えたい. まずは一つの例を定義する.

Definition 1.4. Λ を連結複素多様体とする. 非定数有理関数の族 $\{f_\lambda : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}\}_{\lambda \in \Lambda}$ が Λ 上の holomorphic family であるとは, $\Theta(z, \lambda) = g_\lambda(z)$ によって定まる写像 $\Theta : \widehat{\mathbb{C}} \times \Lambda \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ が正則であることをいう.

Example 1.5. Λ をエルミート計量付きの連結複素多様体とし, $c_0 \in \Lambda$ を中心とする半径 δ の閉球を $B(c_0, \delta)$ と記す. $\{f_\lambda : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}\}_{\lambda \in \Lambda}$ を Λ 上の holomorphic family とする. 設定 1.1 において $m = 1$ とし, τ_{11} を $B(c_0, \delta)$ 上の正規化されたルベグ測度とする. こうして定まるマルコフシステムにおいて, 初期値 $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ のランダム軌道は

$$f_{c_N} \circ \cdots \circ f_{c_2} \circ f_{c_1}(z), \quad N \in \mathbb{N}, c_n \in B(c_0, \delta) (\forall n = 1, 2, \dots, N)$$

の形をしている. ここで, 各 c_n は確率測度 τ_{11} に従ってランダムに (独立同分布で) 選択される.

Example 1.5 は有理関数 f_{c_0} のランダム摂動と呼ぶべき独立同分布ランダム力学系である. Fornaess と Sibony は 1991 年にこのようなランダム力学系を考え, f_{c_0} が吸引的周期軌道を持つ場合について次の定理を示した.

Theorem 1.6 ([1]). 有理関数 f_{c_0} が $k \geq 1$ 個の吸引的周期軌道 $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ を持ったとする. Example 1.5 から定まる f_{c_0} のランダム摂動であって, $\Theta : \widehat{\mathbb{C}} \times \Lambda \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ が次を満たすとする.

- (i) 各 $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $c \mapsto \Theta(z, c)$ は非定数.
- (ii) 複素偏微分 $\partial\Theta/\partial c$ が点 $(z_0, c_0) \in \widehat{\mathbb{C}} \times B(c_0, \delta)$ で 0 ならば, $(\partial\Theta/\partial z)(z_0, c_0) \neq 0$ かつ $z_0 = \Theta(w_0, c_0)$ なる任意の $w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $(\partial\Theta/\partial c)(w_0, c_0) \neq 0$.

このとき, 摂動の幅 δ が十分に小さければ, 初期値 z のランダム軌道 $f_{c_N} \circ \cdots \circ f_{c_2} \circ f_{c_1}(z)$ が $N \rightarrow \infty$ のとき γ_j の吸引領域に吸引される確率の関数 $T_{\gamma_j} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow [0, 1]$ は $\widehat{\mathbb{C}}$ 上連続になる. さらに, 任意の $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ に対して $\sum_{j=1}^k T_{\gamma_j}(z) = 1$ である.

Theorem 1.6 は決定論的な複素力学系では成立しない. というのも, 決定論的な力学系では確率の関数 T_{γ_j} は 0 か 1 の値を取り, それは連続になり得ない. そして, 有理関数 f_{c_0} が「カオス的」振る舞いをする初期値が必ず存在し, その点の軌道はどの周期軌道にも吸引されない.

このような、決定論力学系では起こらないランダム力学系特有の現象を**ランダム性誘起現象（または雑音誘起現象）**という。ランダム性誘起現象を探すことはランダム力学系の研究における最も重要なテーマの一つである。

一方、Fornaess と Sibony の結果を振幅の幅 δ が大きい場合へと拡張することは応用上重要である。実際、多項式の根を探すためのよく知られたアルゴリズムであるニュートン法にランダム項を掛けた「ランダム緩和ニュートン法」の研究の過程で、角はランダム性（ノイズ）が大きいときに力学系が安定的になり、決定論的な場合よりもランダムな場合の方がより効率的に多項式の根を計算できる可能性があることを示唆した。ランダム緩和ニュートン法以外にも、自然界の現象を記述する数理モデルに応用できる可能性を考えると、ランダム性が小さい時のみを対象とするのでは不十分である。

加えて、Fornaess と Sibony の結果や角による研究はほとんどが独立同分布の場合について考えている。数学的にも応用的にも、これらの結果を独立同分布でない場合に拡張することは非常に自然かつ重要であると筆者は考える。その第一歩として、Setting 1.1 のようなランダム力学系を考えたい。

このマルコフシステムは一つ前の過去に依存して分布が変化する、ある意味で「マルコフ的」なシステムである。そして、遷移確率を制御する $\tau = (\tau_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ は大きなランダム性を含むことも可能である。この2点の特長をマルコフシステムは持っている。

2 マルコフシステムにおけるジュリア集合と確率測度

Setting 1.1 のマルコフシステムに対し、次のような有向グラフを用いてその性質を解析する。

Definition 2.1. Setting 1.1 にある測度の組み τ が与えられたとき、 S_τ を次で定める。頂点集合を $V := \{1, 2, \dots, m\}$ 、辺集合を $E := \{(i, j) \in V \times V \mid p_{ij} > 0\}$ とする有向グラフを考える。各有向辺 $e = (i, j) \in E$ に有理関数族 $\text{supp } \tau_e$ ($\tau_e = \tau_{ij}$) を対応させる。これらの組み $S_\tau := (V, E, (\text{supp } \tau_e)_{e \in E})$ を有理関数からなる $\hat{\mathbb{C}}$ 上のマルコフシステムという。また、 $i, t: E \rightarrow V$ を第一成分、第二成分への射影とし、 $i(e), t(e) \in V$ を有向辺 $e \in E$ の始点、終点と定める。

本稿では有向グラフ (V, E) が強連結であるようなシステム S_τ のみを考える。

Definition 2.2. (i) $e = (e_1, e_2, \dots, e_N) \in E^N$ が長さ $N \in \mathbb{N}$ の（有限）admissible word であるとは、任意の $n = 1, 2, \dots, N-1$ に対して、 $t(e_n) = i(e_{n+1})$ を満たすことである。この word に対し、 $i(e_1), t(e_N)$ を e の始点、終点といい、 $i(e), t(e)$ とおく。
(ii) admissible word $e = (e_1, e_2, \dots, e_N) \in E^N$ に付随する N 個の写像 $f_n \in \text{supp } \tau_{e_n}$ に対し、合成 $f_N \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$ の全体を $H(S_\tau)$ とする。これらのうち、 $i(e) = i$ となる合成の全体を $H_i(S_\tau)$ とし、さらに $t(e) = j$ となるもの全体を $H_i^j(S_\tau)$ とする。

$\hat{\mathbb{C}}$ は1次元複素射影空間であり、実2次元の球面と同相であるからコンパクト距離空間である。

Definition 2.3. 写像族 $\mathcal{H}$ が点 z_0 で同程度連続であるとは、任意の正の数 ϵ に対して、ある正の数 δ が存在して、 z_0 との距離が δ 未満の任意の点 z と任意の $h \in \mathcal{H}$ に対して、 $h(z)$ と $h(z_0)$ との距離が ϵ 未満となることをいう。写像族 $\mathcal{H}$ が点 z で局所同程度連続であるとは、 z の近傍 U が存

在して、その各点 $z_0 \in U$ で同程度連続であることをいう。

- (i) 写像族 $H(S_\tau)$ が局所同程度連続になる点の全体を $F(S_\tau)$ とおき、マルコフシステム S_τ のファトウ集合という。そうでない点の全体を $J(S_\tau)$ とおき、 S_τ のジュリア集合という。
- (ii) $i \in V$ に対し、写像族 $H_i(S_\tau)$ が局所同程度連続になる点の全体を $F_i(S_\tau)$ とおき、マルコフシステム S_τ の i におけるファトウ集合という。そうでない点の全体を $J_i(S_\tau)$ とおき、 S_τ の i におけるジュリア集合という。

ファトウ集合・ジュリア集合は力学系を考える上で最も基本的な対象である。実際、ファトウ集合は「力学系が安定的な振る舞いをする初期値」の集合である。すなわち、初期値 z が少しずれても、時間発展した点は少ししかずれない。ジュリア集合はそうではない初期値の集合である。つまり、初期値に対し鋭敏に反応し、誤差を許しても時間発展した時の様子が予測できないことを意味する。後者になることは決して稀ではなく、例えば次数 2 以上の有理関数を $H(S_\tau)$ が含んでいれば、そのジュリア集合 $J(S_\tau)$ は非可算集合になる。

次の集合はジュリア集合の中でも「最もカオス的」な初期値の集合である。

Definition 2.4. 集合 $J_{\ker, i}(S_\tau) := \bigcap_{j \in V} \bigcap_{h \in H_i^j(S_\tau)} h^{-1}(J_j(S_\tau))$ をマルコフシステム S_τ の $i \in V$ における核ジュリア集合という。 $\mathbb{J}_{\ker}(S_\tau) := \bigcup_{i \in V} J_{\ker, i}(S_\tau) \times \{i\} \subset \widehat{\mathbb{C}} \times V$ とおく。

続いて、自然な確率測度を次のように構成する。

Definition 2.5. $(\text{Rat} \times E)^\mathbb{N}$ 上のボレル確率測度 $\tilde{\tau}_i$ を次のように定める：

Rat の N 個のボレル集合 A_n ($n = 1, \dots, N$) と $(e_1, \dots, e_N) \in E^N$ に対して、 $A'_n = A_n \times \{e_n\}$ とする。このとき

$$\begin{aligned} & \tilde{\tau}_i(A'_1 \times \cdots \times A'_N \times \prod_{N+1}^\infty (\text{Rat} \times E)) \\ &= \begin{cases} \tau_{e_1}(A_1) \cdots \tau_{e_N}(A_N) & , (e_1, \dots, e_N) \text{ が } i \in V \text{ から始まるアドミッシブルワード} \\ 0 & , \text{ そうでないとき} \end{cases} \end{aligned}$$

となるような確率測度が一意に定まる。ここで、 $e = (ij)$ に対し $\tau_e = \tau_{ij}$ である。

次の結果は本稿の主結果の一つである。

Main Result A (協調原理の一般化). $\mathbb{J}_{\ker}(S_\tau) = \emptyset$ なら、任意の $i \in V$ について

$$\text{Leb}(\{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid \text{写像族 } \{f_N \circ \cdots \circ f_1\}_{N \in \mathbb{N}} \text{ が } z \text{ で局所同程度連続でない}\}) = 0$$

が任意の $i \in V$ と $\tilde{\tau}_i$ -a.e. $(f_n, e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{supp } \tilde{\tau}_i$ について成り立つ。

3 多項式マルコフシステムと ∞ に収束する確率

Poly を 2 次以上の多項式全体の空間とする. 点 $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ は各多項式の吸引的固定点 (周期 1 の周期点) であることに注意する. 以下, 各 $e \in E$ に対し $\text{supp } \tau_e$ が Poly 内のコンパクト集合であると仮定する. このとき, ランダム軌道が ∞ に吸引される確率の関数を次で定める.

Definition 3.1. 関数 $T_\infty: \widehat{\mathbb{C}} \times V \rightarrow [0, 1]$ を次で定める.

$$T_\infty(z, i) := \tilde{\tau}_i(\{(f_n, e_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\text{Rat} \times E)^{\mathbb{N}} \mid f_N \circ \cdots \circ f_1(z) \rightarrow \infty (N \rightarrow \infty)\}).$$

次の結果は本稿の主結果の一つである.

Main Result B. $\mathbb{J}_{\text{ker}}(S_\tau) = \emptyset$ なら ∞ に吸引される確率の関数 T_∞ は $\widehat{\mathbb{C}} \times V$ 上連続である.

すなわち, 任意の初期値に対しあるランダム軌道がジュリア集合 (力学系が鋭敏に反応する初期値の集合) を避けるならば, 力学系が安定的になり T_∞ が連続になる. 次の結果はいつ $\mathbb{J}_{\text{ker}}(S_\tau) = \emptyset$ になるかを述べており, Fornaess と Sibony による定理 1.6 の部分的一般化である.

Main Result C. ある $e \in E$ が存在して, 任意の $z \in J_{i(e)}(S_\tau)$ に対して, ある holomorphic family $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \text{supp } \tau_e$ が存在して, $\Lambda \ni \lambda \mapsto f_\lambda(z) \in \widehat{\mathbb{C}}$ が非定数であると仮定する. このとき, $\mathbb{J}_{\text{ker}}(S_\tau) = \emptyset$ となり, したがって T_∞ は $\widehat{\mathbb{C}} \times V$ 上連続である.

Corollary 3.2. ある $e \in E, f \in \text{Poly}, c_0 \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0$ に対し $\text{supp } \tau_e \supset \{f + c \mid |c - c_0| < \varepsilon\}$ が成り立つならば, $\mathbb{J}_{\text{ker}}(S_\tau) = \emptyset$ となる.

前述の通り決定論的力学系では T_∞ が空間全体で連続になることは起こらないため, これらの結果はランダム性誘起現象の一種である. 一方で, 次の結果は独立同分布の場合とそうでない場合との違いについて言及している.

Main Result D (独立同分布の場合とそうでない場合との違い). $\sum_{i \in V} p_i = 1$ なる正のベクトル $(p_1, \dots, p_m)$ に対し, 関数 $T_\infty: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow [0, 1]$ を $T_\infty(z) = \sum_{i \in V} p_i T_\infty(z, i)$ によって定める. $m = 1$ (システムが独立同分布) のとき, T_∞ は恒等的に 1 であるか零点を持つかである. $m \geq 2$ のとき, あるマルコフシステム S_τ が存在して, T_∞ は恒等的に 1 でなく零点を持たず, かつ連続である.

参考文献

- [1] John Fornaess and Nessim Sibony, Random iterations of rational functions. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 11 (1991), 687-708.
- [2] Hiroki Sumi and Takayuki Watanabe, Non-i.i.d. random holomorphic dynamical systems and the probability of tending to infinity, preprint, <https://arxiv.org/abs/1810.09922>.
- [3] 渡邊天鵬, マルコフシステムのランダム複素力学系, 第 14 回数学総合若手研究集会: 数学の交叉点, 北海道大学数学講究録 **173** (2018), 387-393.