一般化複素連分数展開に関する等角反復関数系の極限集合の次元と測度

京都大学大学院 人間・環境学研究科 共生人間専攻
伊縫 寛治 (Kanji INUI)

概要

Cantor set や Sierpiński gasket などを含む多くのフラクタルは有限個の縮小写像による反復関数系 (以後 IFS と記す) の極限集合として定義され, よく研究されてきた. しかし近年, Mauldin, Urbański の 2 人により可算無限個の縮小写像による等角 IFS(以後 CIFS と記す) の極限集合に関する研究が始まった. 特に, 彼らは, 極限集合の Hausdorff 次元を h とするとき, 極限集合の h 次元 Hausdorff 測度が 0 であるが, h 次元 packing 測度が正であるような性質を持つ無限反復関数系を構成した. この性質は有限個の縮小写像による CIFS では起こりえない性質である. 本稿では, 上記の CIFS を基に複素平面上の部分集合によってパラメーター化された可算無限個の縮小写像による CIFS の族を導入し, その CIFS の族に対応する Hausdorff 次元関数とその族の CIFS それぞれに対応する極限集合の Hausdorff 測度や packing 測度に関する結果を紹介する. またこの研究は角大輝教授 (京都大学人間・環境学研究科) との岡田熙氏 (大阪大学理学研究科) との共同研究である.

1 導入

現代数学において, 反復関数系は様々な状況で現れる. 反復関数系を用いる例として最も有名なものの一つは, 反復関数系によって構成されるフラクタルの研究である. この研究は 1970 年代から始まり, 様々な方向に発展した. 以後, 縮小写像による反復関数系 ((contractive) iterated function system) を IFS と記すことにする. ここで, 有限個の相似写像からなる IFS は, 今までよく研究されていることに注意する (例えば, [1], [2], [3] などを参照).

しかし, 1990 年頃から, 可算無限個の写像からなる IFS(以後, 無限 IFS と記す) により構成されるフラクタルの研究が始まった (例えば, [5], [6], [7] などを参照). 特に, Mauldin and Urbański の 2 人は可算無限個の等角写像からなる IFS の極限集合 (フラクタル) に関する研究を行った. 以後, 等角写像からなる IFS(conformal IFS) を CIFS と記すことにする (Definition 2.4 参照). 彼らは CIFS により構成された極限集合の Hausdorff 次元を与える公式や Hausdorff 測度や packing 測度を与える条件に関する一般論を発見している. さらに, 彼らは無限 CIFS により構成された極限集合の興味深い例を与えている.

加えて, CIFS の族に関する研究も近年見られるようになった. Roy and Urbański の二人は CIFS の族に対応する Hausdorff 次元関数の研究を行った ([8] を参照). 彼らは, "λ-topology" という CIFS の集合上に定義できる位相によって, Hausdorff 次元関数が連続であることを示し, 加えて CIFS の

族が良い性質を持てば, Hausdorff 次元関数が劣調和かつ実解析的であることも示した.

これまで見てきたように, CIFS や CIFS の族に関する一般論はよく調べられている. しかし, CIFS の族に関する一般論を適用できる例がまだ十分に見つかっていないのではないかと考えた ([4], [9], [10]). そこで本稿では, 無限 CIFS の族に関する例を導入し, その族に対応する極限集合の Hausdorff 次元関数やその族の各 CIFS に対応する極限集合の Hausdorff 測度や packing 測度について考える. この研究は角大輝教授 (京都大学人間・環境学研究科) との岡田熙氏 (大阪大学理学研究科) との共同研究である.

2 一般的な設定

この章では, 後の章で述べる定理を説明するために必要な定義や命題を述べる.

2.1 等角反復関数系 (CIFS) と極限集合

この節では, CIFS やそれに対応する極限集合を定義し, その性質を述べる.

Definition 2.1 (可算無限個の元による記号の空間)**.** I を要素を 2 つ以上持つ高々可算個の集合とし, この I を alphabet と呼ぶ. I に discrete topology を入れ, $I^\infty := I^{\mathbb{N}}$ に product topology を入れる. 以後, I^∞ の元 w を $w_1 w_2 \cdots w_n \cdots$ と記す.

このとき, 次が成り立つ.

Proposition 2.2. I を alphabet とする. このとき, I^∞ は Polish 空間である. さらに, もし $|I| < \infty$ ならば, I^∞ は compact 空間である.

また, $I^* := \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n$ と定める. 以後, $n \in \mathbb{N}$ に対し, I^n の元 w を $w_1 w_2 \cdots w_n$ と記す. さらに, $w \in I^* \cup I^\infty$ に対し, $|w| := n$ と定める. ここで, n は $w \in I^n$ を満たすただ一つの $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ である. $w \in I^* \cup I^\infty$ と $n < |w|$ なる $n \in \mathbb{N}$ に対し, $w|_n := w_1 w_2 \cdots w_n$ と定める. 以後, I は固定して考える.

この I に対して, 等角反復関数系 (CIFS) を以下のように定義する.

Definition 2.3. W を $(\mathbb{R}^d, |\cdot|)$ 上の開集合とし, $f\colon W \to f(W)$ を微分同相写像とする（ただし, $f(W)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の開集合とする）. このとき, 全ての $x \in W$ と $v, u \in \mathbb{R}^d$ に対して, 微分係数 $f'(x)$ が $|f'(x)v - f'(x)u| = |f'(x)| \cdot |v - u|$ を満たすとき, f は W 上等角写像であるという. ここで, f の $x \in X$ における微分 $f'(x)$ に対し, $\mathbb{R}^d$ 上の通常のノルムに関する $f'(x)$ の作用素ノルムを $|f'(x)|$ と表す.

Definition 2.4. X を $(\mathbb{R}^d, |\cdot|)$ 上の空でない連結コンパクト集合とし, I を Definition 2.1 のものとする. このとき, 以下の条件を満たす $S := \{\phi_i\colon X \to X \mid i \in I\}$ を (I を添え字集合とする X 上の) 等角反復関数系 (以後, CIFS と記す) という.

1. 単射性: 全ての $i \in I$ に対し, $\phi_i\colon X \to X$ は単射である.

2. 一様縮小性: ある $c \in (0,1)$ が存在して, 全ての $i \in I$ と $x, y \in X$ に対し, 次が成り立つ.

$$|\phi_i(x) - \phi_i(y)| \leq c|x-y|.$$

3. 等角性: ある $\epsilon > 0$ と $X \subset V$ なる連結開集合 $V \subset \mathbb{R}^d$ が存在して, 全ての $i \in I$ に対し, ϕ_i は V 上の $C^{1+\epsilon}$ 級微分同相写像に拡張されて, かつ ϕ_i は V 上等角である.
4. 開集合条件: 全ての $i \neq j$ なる $i, j \in I$ に対し, $\phi_i(\mathrm{Int}(X)) \subset \mathrm{Int}(X)$ かつ

$$\phi_i(\mathrm{Int}(X)) \cap \phi_j(\mathrm{Int}(X)) = \emptyset$$

が成り立つ. ここで, $\mathrm{Int}(X)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の通常の位相における X の内部を表す.
5. Bounded Distortion Property(BDP): ある $K \geq 1$ が存在して, 全ての $x, y \in V$ と $w \in I^*$ に対し, 次が成り立つ.

$$|\phi'_w(x)| \leq K \cdot |\phi'_w(y)|.$$

ここで, $n \in \mathbb{N}$ と $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in I^n$ に対し, $\phi_w := \phi_{w_1} \circ \phi_{w_2} \circ \cdots \circ \phi_{w_n}$ と定め, さらに ϕ_w の $x \in X$ における微分 $\phi'_w(x)$ に対し, $\mathbb{R}^d$ 上の通常のノルムに関する $\phi'_w(x)$ の作用素ノルムを $|\phi'_w(x)|$ と表す.
6. Cone Condition: 全ての $x \in \partial X$ に対し, 頂点 x, 方向 u, 長さ $|u|$, 角度 α である open cone $\mathrm{Con}(x, u, \alpha)$ が存在して, $\mathrm{Con}(x, u, \alpha) \subset \mathrm{Int}(X)$ が成り立つ.

Definition 2.4 における一様縮小性から次の命題を得る.

Proposition 2.5. S を CIFS とする. このとき, 全ての $w \in I^\infty$ に対し, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \phi_{w|_n}(X)$ は一点集合である.

この一点集合の元を $x_w \in X$ と記すとき, 写像 $\pi\colon I^\infty \to X$ を $\pi(w) := x_w$ $(w \in I^\infty)$ と定める. この写像 π を coding map と呼ぶ. これより, CIFS に対し, 極限集合が定まる.

Definition 2.6. S を CIFS とする. このとき, S に対応する極限集合 J_S が以下のように定まる.

$$J_S := \pi(I^\infty) = \bigcup_{w \in I^\infty} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \phi_{w|_n}(X).$$

また, CIFS S に対し, J_S の Hausdorff 次元を h_S と記す. この極限集合に対し, 以下の命題が成り立つ.

Proposition 2.7. J_S を S に対応する極限集合とする. このとき, 以下が成り立つ.

1. $J_S = \bigcup_{i \in I} \phi_i(J_S)$ である.
2. $J_S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{w \in I^n} \phi_{w|_n}(X)$ である.

特に, J_S は Borel 可測集合である.

Definition 2.8. $|I| = \infty$ とし, S を CIFS とする. $S = \{\phi_i\}_{i \in I}$ と表す. $I' \subset I$, $|I'| = \infty$ なる, 添え字集合 I' とする X 上の点の族 $\{z_i\}_{i \in I'}$ と $z \in X$ が, 全ての $\epsilon > 0$ に対し, ある $|F'| < \infty$ な

る $F' \subset I'$ が存在して, もし $i \in I' \setminus F'$ ならば, $|z_i - z| < \epsilon$ が成り立つとき, $\lim_{i \in I'} z_i = z$ と記す. さらに, $X_S(\infty) \subset X$ を以下のように定める.

$$X_S(\infty) := \left\{ \lim_{i \in I'} z_i \in X \mid {}^{\exists} I' \subset I, {}^{\exists} \{z_i\}_{i \in I'} \text{ s.t. } |I'| = \infty, z_i \in \phi_i(X) \ \ (i \in I') \right\}.$$

2.2 Pressure function

この節では, CIFS S に対し, S の pressure function P_S を定義し, その性質を述べる.

Definition 2.9 (Pressure function)**.** S を CIFS とする. このとき, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\psi_S^n \colon [0, \infty) \to [0, \infty]$ を

$$\psi_S^n(t) := \sum_{w \in I^n} \left(\sup_{z \in X} |\phi_w'(z)| \right)^t \quad (t \geq 0).$$

と定める. さらに, $P_S \colon [0, \infty) \to (-\infty, \infty]$ を

$$P_S(t) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \psi_S^n(t) \in (-\infty, \infty].$$

と定める. この P_S を S の pressure function と呼ぶ. また, $\theta_S := \inf\{t \geq 0 | \ \psi_S^1(t) < \infty\}$ と定める.

この P_S が well-defined であることは次の命題による.

Proposition 2.10. S を CIFS とする. このとき, 全ての $m, n \in \mathbb{N}$ と $t \geq 0$ に対し, $\psi_S^{m+n}(t) \leq \psi_S^m(t) \psi_S^n(t)$ が成り立つ. 特に, 全ての $t \geq 0$ に対し, 実数列 $\{\log \psi_S^n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は劣加法的である.

pressure function の性質は以下の通りである.

Proposition 2.11. S を $X (\subset \mathbb{R}^d)$ 上の CIFS とし, P_S を S の pressure function とする. このとき, 次が成り立つ.

1. $P_S(0) = \log |I|$ である.
2. $t_0 \geq 0$ が $P(t_0) < \infty$ を満たすならば, 全ての $t \geq t_0$ に対し, $P(t) < \infty$ である.
3. $P_S(d) \leq 0$ である.
4. P $\{t \geq 0 \mid P(t) < \infty\}$ 上狭義単調減少かつ凸である.
5. $\lim_{t \to \infty} P(t) = -\infty$ である.

この pressure function を用いて, "良い性質" を持つ CIFS が以下のように定まる.

Definition 2.12 (Regular, Strongly regular, Hereditarily regular)**.** S を CIFS とする. $P_S(t) = 0$ なる $t \geq 0$ が存在するとき, S を regular CIFS という. さらに, $P_S(t) \in (0, \infty)$ なる $t \geq 0$ が存在するとき, S を strongly regular CIFS という. 加えて, 全ての $|I \setminus I'| < \infty$ なる $I' \subset I$ に対し, $S' := \{\phi_i \colon X \to X \mid i \in I'\}$ が regular CIFS であるとき, S を hereditarily regular CIFS という.

ここで, もし S が hereditarily regular CIFS ならば, S は strongly regular CIFS であることと, もし S が strongly regular CIFS ならば, S は regular CIFS であることに注意する.

2.3 CIFS の族

この節では, CIFS の族について述べる. $\mathbb{C}$ 上の空でない連結コンパクト集合 X と可算無限個の I に対し, CIFS(X, I) を I を添え字集合とする X 上の CIFS の集合と定める. 各 $S \in$ CIFS(X,I) に対し, $\pi_S \colon I^\infty \to X$ を S の coding map と定める.

$\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CIFS}(X, I)^{\mathbb{N}}$, $S \in$ CIFS(X,I) とする. $S^n = \{\phi_i^n\}_{i\in I}$, $S = \{\phi_i\}_{i\in I}$ と表す. このとき, 本稿において, $\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CIFS}(X, I)^{\mathbb{N}}$ と $S \in$ CIFS(X,I) が以下の条件を満たすとき $\lambda(\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}}) := S$ と定める.

(L1) 全ての $i \in I$ に対し, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in X}|\phi_i^n(x) - \phi_i(x)| + \sup_{x\in X}|(\phi_i^n)'(x) - (\phi_i)'(x)|\right) = 0$ が成り立つ.

(L2) ある $C > 0$ と $M \in \mathbb{N}$ と 有限集合 $F \subset I$ が存在して, 全ての $i \in I \setminus F$ と $n \geq M$ に対し, $\displaystyle\left|\log\left(\sup_{x\in X}|(\phi_i^n)'(x)|\right) - \log\left(\sup_{x\in X}|\phi_i'(x)|\right)\right| \leq C$ が成り立つ.

$\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CIFS}(X, I)^{\mathbb{N}}$ が全ての $S \in$ CIFS(X,I) に対し, 条件 (L1), (L2) を満たさないとき, $\lambda(\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \emptyset$ と定める. $\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CIFS}(X, I)^{\mathbb{N}}$ が $\lambda(\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}}) \in$ CIFS(X, I) であるとき, $\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CIFS}(X, I)^{\mathbb{N}}$ は λ -converging であるという. この λ により, CIFS(X,I) に位相が定まる ([8]). このとき以下の命題が成立する.

Proposition 2.13 ([8] Lemma 3.3)**.** Z を位相空間とし, CIFS(X, I) に λ-topology が入っているとする. さらに, $f \colon$ CIFS$(X, I) \to Z$ とする. このとき, 次は同値である.

1. $f \colon$ CIFS$(X, I) \to Z$ は連続である.
2. もし $\{S^n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{CIFS}(X, I)^{\mathbb{N}}$ は λ -converging ならば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(S^{\mu_n}) = f(\lambda(\{S^{\mu_n}\}_{n\in\mathbb{N}}))$ である.

さらに, 複素平面上の部分集合によってパラメーター付けされた CIFS の族について述べる.

Definition 2.14. Λ を $\mathbb{C}$ 上の連結開集合とし, $\{S^\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ を, 各 $\mu \in \Lambda$ に対し, $S^\mu \in$ CIFS(X, I) なる CIFS の族とする. また, 各 $\mu \in \Lambda$ に対し, $S^\mu = \{\phi_i^\mu\}_{i\in I}$ と表す. このとき, 全ての $x \in X$ と $i \in I$ に対し, 写像 $\mu \mapsto \phi_i^\mu(x)$ が Λ 上正則であるとき, $\{S^\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ は plane-analytic であるという. 加えて, plane-analytic な CIFS の族 $\{S^\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ に対し, ある $\mu_0 \in \Lambda$ が存在して, 以下の条件を満たすとき, $\{S^\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ regularly plane-analytic という.

1. S^{μ_0} は strongly regular である.
2. ある $\eta \in (0,1)$ が存在して, 全ての $w \in I^\infty$ と $\mu \in \Lambda$ に対し, $|\kappa_w^{\mu_0}(\mu) - 1| \leq \eta$ を満たす. ここで, 各 $\mu_0 \in \Lambda$ と $w = w_1w_2\cdots \in I^\infty$ に対し,

$$\pi_\mu := \pi_{S_\mu}, \kappa_w^{\mu_0}(\mu) := \frac{(\phi_{w_1}^\mu)'(\pi_\mu(\sigma w))}{(\phi_{w_1}^{\mu_0})'(\pi_{\mu_0}(\sigma w))} \quad (\mu \in \Lambda) \text{ と定める.}$$

3 主要な結果

この章では, 主定理の証明に必要な定理を記す.

3.1 Mauldin and Urbański (1996) の結果

Theorem 3.1 ([5] Theorem 3.15)**.** S を CIFS とする. このとき, 次が成り立つ.

$$h_S = \inf\{t \geq 0 \mid P_S(t) < 0\} \geq \theta_S.$$

特に, $P_S(t) = 0$ なる $t \geq 0$ が存在するならば, t は P_S の唯一の零点であって, $t = h_S$ である.

Proposition 3.2 ([5] Lemma 3.13)**.** S を CIFS とする. このとき, S が regular CIFS ならば, 次の性質を満たす X 上の Borel 確率測度 m_S がただ一つ存在する.

1. $m_S(J_S) = 1$ が成り立つ.
2. 全ての X 上の Borel 集合 A と $i \in I$ に対し, $m_S(\phi_i(A)) = \int_A |\phi_i'(x)|^{h_S} m_S(\mathrm{d}x)$ が成り立つ.
3. 全ての $i \neq j$ なる $i, j \in I$ に対し, $m_S(\phi_i(X) \cap \phi_j(X)) = 0$ が成り立つ.

この確率測度 m_S を h_S-conformal measure と呼ぶ.

Theorem 3.3 ([5] Theorem 3.20)**.** $|I| = \infty$ とし, S を, I を添え字集合とする CIFS S とする. このとき, 次は同値である.

1. S は hereditarily regular である.
2. $\psi_S^1(\theta_S) = \infty$ が成り立つ.

特に, もし S が hereditarily regular ならば, $\theta_S < h_S$ が成り立つ.

Theorem 3.4 ([5] Proposition 4.4)**.** S を regular CIFS とする. このとき, もし $\lambda_d(\mathrm{Int}(X) \setminus X_1) > 0$ ならば, $h_S < d$ が成り立つ. ここで, λ_d は d 次元 Lebesgue 測度である. さらに, $X_1 := \cup_{i \in I} \phi_i(X)$ と定める.

Theorem 3.5 ([5] Theorem 4.9)**.** S を regular CIFS とし, m_S を S の conformal measure とする. このとき, もしある $X_S(\infty)$ 上の点列 $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ と正の実数列 $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ が存在して,

$$\limsup_{j \to \infty} \frac{m_S(B(z_j, r_j))}{r_j^{h_S}} = \infty,$$

が成り立つならば, $\mathcal{H}^{h_S}(J_S) = 0$ が成り立つ.

Theorem 3.6 ([5] Lemma 4.3)**.** S を regular CIFS とする. このとき, もし $J_S \cap \mathrm{Int}(X) \neq \emptyset$ が成り立つならば, $\mathcal{P}^h(J_S) > 0$ が成り立つ.

3.2　Roy and Urbański (2005) の結果

Theorem 3.7 ([8] Theorem 5.10)**.** 写像 $h\colon \mathrm{CIFS}(X,\, I) \to [0,\infty)$ を $h(S) := h_S$ と定め, $\mathrm{CIFS}(X,\, I)$ に λ-topology が入っているとする. このとき, h は連続である.

Theorem 3.8 ([8] Theorem 6.3)**.** Λ を $\mathbb{C}$ 上の連結開集合, $\{S^\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ を, 各 $\mu \in \Lambda$ に対し, $S^\mu \in \mathrm{CIFS}(X,\, I)$ なる CIFS の族とする. このとき, もし $\{S^\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ が plane-analytic ならば, 写像 $\mu \mapsto 1/h_{S^\mu}$ は Λ 上優調和である.

Theorem 3.9 ([8] Theorem 6.1)**.** Λ を $\mathbb{C}$ 上の連結開集合, $\{S^\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ を, 各 $\mu \in \Lambda$ に対し, $S^\mu \in \mathrm{CIFS}(X,\, I)$ なる CIFS の族とする. このとき, もし $\{S^\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ が regularly plane-analytic ならば, 写像 $\mu \mapsto h_{S^\mu}$ は Λ 上実解析的である.

4　主結果

この章では, 本稿の主結果を述べる.

$A_0 := \{\tau = u + iv \in \mathbb{C} \mid u \geq 0, v \geq 1\}$ とする. 添え字集合を $I := \mathbb{N}^2$ とする $X := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1/2| \leq 1/2\}$ 上の一般化複素連分数展開による CIFS の族 $\{S_\tau\}_{\tau\in A_0}$ を

$$S_\tau := \{f_{(a,b)}(z) := 1/(z + a + b\tau) \mid (a,b) \in \mathbb{N}^2\} \qquad (\tau \in A_0)$$

と定める. $J_\tau \subset X$ を S_τ に対応する極限集合と表し, J_τ の Hausdorff 次元を h_τ と表す. さらに, s 次元 Hausdorff 測度, s 次元 Packing 測度をそれぞれ $\mathcal{H}^s$, $\mathcal{P}^s$ と表す. このとき, 次が得られた.

Theorem 4.1 (次元に関する結果, [4] Theorem1.2, Theorem1.3, Corollary 1.4 参照)**.** 全ての $\tau \in A_0$ に対し, $1 < h_\tau < 2$ が成り立つ. さらに, $\displaystyle\lim_{|\tau|\to\infty} h_\tau = 1$ が成り立つ. 加えて, 関数 $\tau \mapsto h_\tau$ は A_0 上で連続かつ A_0 の内部で実解析的かつ劣調和である. 特に, 関数 $\tau \mapsto h_\tau$ の最大値は存在し, その最大点は A_0 の境界に存在する. 加えて, A_0 に含まれるどんな開球 B に対しても, 関数 $\tau \mapsto h_\tau$ は B 上定数関数ではない.

Theorem 4.2 (測度に関する結果:角 大輝氏との共同研究)**.** 全ての $\tau \in A_0$ に対し, $\mathcal{H}^{h_\tau}(J_\tau) = 0$ かつ $\mathcal{P}^{h_\tau}(J_\tau) > 0$ である.

参考文献

[1] M. F. Barnsley, *Fractals everywhere: New Edition*, Dover Publications, (2012).

[2] J. Hutchinson, Fractals and Self-Similarity, Indiana Univ. Math. J. **30**, no. 5, (1981), pp.713–747.

[3] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, (1990).

[4] K. Inui, H. Okada, H. Sumi, The Hausdorff dimension function of the family of conformal iterated function systems of generalized complex continued fractions, preprint, submitted, https://arxiv.org/abs/1810.12599, (2018).

[5] R. D. Mauldin, M. Urbański, Dimensions and measures in infinite iterated function systems, Proceedings of the London Mathematical Society, **73**, no. 1, (1996), pp.105–154.

[6] R. D. Mauldin, M. Urbański, Conformal iterated function systems with applications to the geometry of continued fractions, Trans. Amer. Math. Soc. **351**, no. 12, (1999), pp.4995–5025.

[7] M. Moran, Hausdorff measure of infinitely generated self-similar sets, Monatsh. Math. **122**, no. 4, (1996), pp.387–399.

[8] M. Roy, M. Urbański, Regularity properties of Hausdorff dimension in infinite conformal iterated function systems, Ergodic Theory Dynam. Systems, **25**, no. 6, (2005), pp.1961–1983.

[9] H. Sugita, Dimension of limit sets of IFSs of complex continued fractions (in Japanese), Master thesis, under supervision of H. Sumi, Osaka University, (2014).

[10] S. Takemoto, Properties of the family of CIFSs of generalized complex continued fractions (in Japanese), Master thesis, under supervision of H. Sumi, Osaka University, (2015).