

曲がった薄膜領域上の ナビエ・ストークス方程式に関する特異極限問題

東京大学 大学院数理科学研究科
三浦達彦 (Tatsu-Hiko MIURA)*†

概要

薄膜領域とは空間内のある方向への幅が他の方向に比べて非常に小さい領域である。本講演では膜の厚さがゼロに近づくときに与えられた 2 次元閉曲面に退化するような 3 次元空間内の曲がった薄膜領域を扱い、滑り境界条件を課した薄膜領域上のナビエ・ストークス方程式を考える。本講演の目的は膜の厚さがゼロに近づくときの方程式の解の挙動を調べ、薄膜領域上の方程式から極限曲面上の極限方程式を導出することである。

1 導入

薄膜領域とは空間内のある（1 つまたは複数の）方向への幅が他の方向に対して非常に小さい領域である。薄い板や細長い棒のような薄膜領域は弾性体の分野における主要な研究対象であり、また物質の反応や拡散、流体運動などの自然現象を偏微分方程式により数理モデル化する際にも多く現れる。例えば、シャーレを用いた化学実験、細胞膜中の物質輸送、海流や大気の流れのような地球流体、細い血管を流れる血液などが薄膜領域上の偏微分方程式により数理モデル化される現象である。

薄膜領域上の偏微分方程式の数学解析においては領域の幅の小ささに応じて方程式の適切性や解の性質などがどのように変化するかを調べるのが主な問題となる。例えば、3 次元のナビエ・ストークス方程式の適切性の成否は永年の未解決問題である一方 2 次元ではその成立がよく知られているため、2 次元領域に近い 3 次元薄膜領域での方程式の適切性は 2 次元の場合にどの程度「近い」かを調べる研究が行われている。また、薄膜領域が膜の厚さゼロの極限で低次元集合に退化する際、薄膜領域上の方程式（薄膜方程式）の解は何らかの意味で極限集合上の方程式（極限方程式）に漸近すると予想される。そのような極限方程式を発見し、薄膜方程式との比較を行うことで薄膜領域上の現象における極限集合と膜の厚さ方向の影響を明らかにすることも重要な問題である。

上記の問題に関する数学研究は Hale–Raugel による反応拡散方程式の研究 [5] に始まり、これまで主に反応拡散方程式とナビエ・ストークス方程式について様々な研究が行われてきた。Hale–Raugel [5] は低次元領域に退化する平らな薄膜領域における反応拡散方程式とその極限方程式の固有値や力学系の比較を行った。反応拡散方程式に関する研究はその後 L 字型の薄膜領域 [6] や低次元多様体に退化する曲がった薄膜領域 [17] など様々な形状の薄膜領域の場合に拡張されている（薄

* 本研究は科研費 (課題番号:16J02664) の助成を受けたものである。

† 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科, e-mail: thmiura@ms.u-tokyo.ac.jp

膜領域の形状の例については [18] を参照せよ）。一方、ナヴィエ・ストークス方程式については Raugel–Sell [19] による 2 次元領域に退化する平らな 3 次元薄膜領域における方程式の適切性の研究が最初の結果であり、以後平らな薄膜領域上でディリクレ、周期、滑りなど様々な境界条件を課したナヴィエ・ストークス方程式が研究されている [7, 8, 25]。また、Temam–Ziane [26] は 3 次元の薄い球殻（2 つの球面の間の領域）におけるナヴィエ・ストークス方程式を考え、方程式の適切性の証明や薄膜方程式と極限方程式の比較を行った。超曲面に退化する曲がった薄膜領域上の偏微分方程式の数学解析については論文 [9, 20, 27] のように膜の厚さゼロ極限における薄膜領域上のラプラス作用素の固有値の漸近挙動に関する研究が多い。しかし、曲がった薄膜領域上の発展方程式については上述の研究 [17, 26] の他にはあまり研究がなされていないのが現状である。

そこで、本講演では 3 次元の曲がった薄膜領域上で次のナヴィエ・ストークス方程式を考える：

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u^\varepsilon + (u^\varepsilon \cdot \nabla) u^\varepsilon - \nu \Delta u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f^\varepsilon & \text{in } \Omega_\varepsilon \times (0, \infty), \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon \times (0, \infty), \\ u^\varepsilon \cdot n_\varepsilon = 0 & \text{on } \Gamma_\varepsilon \times (0, \infty), \\ P_\varepsilon[\sigma(u^\varepsilon, p^\varepsilon)n_\varepsilon] + \gamma_\varepsilon u^\varepsilon = 0 & \text{on } \Gamma_\varepsilon \times (0, \infty), \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0^\varepsilon & \text{in } \Omega_\varepsilon. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

ここで Ω_ε は膜の厚さが $\varepsilon > 0$ のオーダーであるような $\mathbb{R}^3$ 内の有界な曲がった薄膜領域、 Γ_ε は Ω_ε の境界、 n_ε は Γ_ε の外向き単位法線ベクトル、 $P_\varepsilon a := a - (a \cdot n_\varepsilon)n_\varepsilon$ はベクトル $a \in \mathbb{R}^3$ の境界 Γ_ε における接線方向成分、 $\nu > 0$ は ε に依存しない粘性係数、 $\gamma_\varepsilon \geq 0$ は ε に依存する摩擦係数である。また I_3 を 3 次単位行列として応力テンソルを次で定める：

$$\sigma(u^\varepsilon, p^\varepsilon) := 2\nu D(u^\varepsilon) + p^\varepsilon I_3 \quad \left(D(u^\varepsilon) := \frac{\nabla u^\varepsilon + (\nabla u^\varepsilon)^T}{2} \text{ は歪み速度テンソル} \right).$$

方程式 (1.1) の第 1 式は流体の運動量保存則を、第 2 式は（非圧縮流体に対する）質量保存則を表す。また第 3 式は「流体が領域の内外に出入りしない」という物理的状況を、第 4 式は「流体が領域の境界で応力ベクトル $\sigma(u^\varepsilon, p^\varepsilon)n_\varepsilon$ の接線方向成分に比例する速度で摩擦力を受けながら滑る」という状況を表す。これらの境界条件は Navier [15] が提唱したものであり、（ナヴィエの）滑り境界条件と呼ばれている。特に $\gamma_\varepsilon = 0$, $\gamma_\varepsilon > 0$ の場合はそれぞれ完全滑り、部分滑り境界条件と呼ばれることもある。また第 4 式の両辺を γ_ε で割り $\gamma_\varepsilon \rightarrow \infty$ （摩擦力無限大）とすると通常のディリクレ境界条件（滑り無し境界条件） $u^\varepsilon = 0$ on Γ_ε を得る。なお $P_\varepsilon n_\varepsilon = 0$ であるため (1.1) の第 4 式は

$$2\nu P_\varepsilon D(u^\varepsilon)n_\varepsilon + \gamma_\varepsilon u^\varepsilon = 0 \quad \text{on } \Gamma_\varepsilon \times (0, \infty)$$

という圧力 p^ε に依存しない形で表されることに注意する（講演では初めからこの形式で書く）。

本講演の目的は (1.1) の解 u^ε の $\varepsilon \rightarrow 0$ での挙動を調べることである。具体的には、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき Ω_ε が与えられた 2 次元閉曲面 Γ に退化するという仮定の下、 u^ε の膜の厚さ方向への積分平均が Γ 上の適切な関数空間内で収束し、かつその極限が Γ 上の極限方程式の解であることを示す。

2 記号

本節では主定理を述べるために必要な記号を与える。時間の都合上、講演中はいくつかの記号について注意するにとどめる。また本節で与える関数などは特に指定がなければ全て十分滑らかであると

仮定する．関数の正則性などに関する詳細な設定については [12] を参照せよ．

以下では $\mathbb{R}^3$ の直交座標系を 1 つ取って固定し, $x \in \mathbb{R}^3$ と $i = 1, 2, 3$ に対して x_i を固定された座標系での x の第 i 成分とする．また I_3 を 3 次単位行列とし, $\mathbb{R}^3$ 内のベクトル $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ とベクトル場 $u = (u_1, u_2, u_3)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ に対して次のように記号を定める：

$$a \otimes b := \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}, \quad \nabla u := \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_1 u_2 & \partial_1 u_3 \\ \partial_2 u_1 & \partial_2 u_2 & \partial_2 u_3 \\ \partial_3 u_1 & \partial_3 u_2 & \partial_3 u_3 \end{pmatrix} \quad \left(\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

$$(\varphi \cdot \nabla)u := \sum_{i=1}^3 \varphi_i \partial_i u = (\varphi \cdot \nabla u_1, \varphi \cdot \nabla u_2, \varphi \cdot \nabla u_3).$$

2.1 2 次元閉曲面

Γ を $\mathbb{R}^3$ 内の向き付けられた連結な 2 次元閉曲面（コンパクトかつ境界を持たない曲面）とし, その外向き単位法線ベクトルを n とする．また κ_1 と κ_2 を Γ の主曲率とし, $H := \kappa_1 + \kappa_2$ と $K := \kappa_1 \kappa_2$ を Γ の平均曲率（の 2 倍）とガウス曲率とする． Γ の接平面への直交射影 $P = (P_{ij})_{i,j}$ を $P := I_3 - n \otimes n$ で定め, Γ 上の関数 η に対してその接勾配 $\nabla_\Gamma \eta$ と接微分 $\underline{D}_i \eta$ を次のように定める：

$$\nabla_\Gamma \eta := P \nabla \tilde{\eta}, \quad \underline{D}_i \eta := \sum_{j=1}^3 P_{ij} \partial_j \tilde{\eta} \quad \text{on } \Gamma, i = 1, 2, 3.$$

ここで $\tilde{\eta}$ は $\mathbb{R}^3$ 内での Γ の開近傍への η の拡張であるが, $\nabla_\Gamma \eta$ と $\underline{D}_i \eta$ の値は $\tilde{\eta}$ の選び方にはよらないことに注意する（例えば [4, Section 16.1] を見よ）．次に, 法線方向成分を含む Γ 上のベクトル場 $v = (v_1, v_2, v_3)$ に対して接勾配行列 $\nabla_\Gamma v$, 曲面上の歪み速度テンソル $D_\Gamma(v)$, 曲面発散 $\text{div}_\Gamma v$ を

$$\nabla_\Gamma v := \begin{pmatrix} \underline{D}_1 v_1 & \underline{D}_1 v_2 & \underline{D}_1 v_3 \\ \underline{D}_2 v_1 & \underline{D}_2 v_2 & \underline{D}_2 v_3 \\ \underline{D}_3 v_1 & \underline{D}_3 v_2 & \underline{D}_3 v_3 \end{pmatrix}, \quad D_\Gamma(v) := P \left(\frac{\nabla_\Gamma v + (\nabla_\Gamma v)^T}{2} \right) P,$$

$$\text{div}_\Gamma v := \text{tr}[\nabla_\Gamma v] = \sum_{i=1}^3 \underline{D}_i v_i \quad \text{on } \Gamma \quad (\text{tr は行列のトレースを表す})$$

で定める．また Γ 上のベクトル場 $v = (v_1, v_2, v_3)$ と $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ に対して

$$(\eta \cdot \nabla_\Gamma) v := \sum_{i=1}^3 \eta_i \underline{D}_i v = (\eta \cdot \nabla_\Gamma v_1, \eta \cdot \nabla_\Gamma v_2, \eta \cdot \nabla_\Gamma v_3) \quad \text{on } \Gamma$$

と書き, 行列値関数 $A: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ に対して $\text{div}_\Gamma A = ([\text{div}_\Gamma A]_1, [\text{div}_\Gamma A]_2, [\text{div}_\Gamma A]_3)$ を次で定める：

$$[\text{div}_\Gamma A]_j := \sum_{i=1}^3 \underline{D}_i A_{ij} \quad \text{on } \Gamma, j = 1, 2, 3 \quad \left(\text{ここで } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \text{ である} \right).$$

次に Γ 上の関数空間を定義する．関数 $\eta, \xi \in C^1(\Gamma)$ と $i = 1, 2, 3$ に対して部分積分公式

$$\int_\Gamma (\eta \underline{D}_i \xi + \xi \underline{D}_i \eta) d\sigma = - \int_\Gamma \eta \xi H n_i d\sigma \quad (d\sigma \text{ は } \Gamma \text{ の面積要素, } n_i \text{ は } n \text{ の第 } i \text{ 成分})$$

が成り立つことが知られている（例えば [4, Lemma 16.1] を見よ, ただし本稿では平均曲率 H を曲面 Γ の次元 2 で割っていないことに注意せよ）. この公式に基づき, Γ 上の L^2 関数の弱接微分を次のように定義する: $\eta \in L^2(\Gamma)$ と $i = 1, 2, 3$ に対して $\eta_i \in L^2(\Gamma)$ が存在し, 全ての $\xi \in C^1(\Gamma)$ に対して

$$\int_{\Gamma} \eta_i \xi \, d\sigma = - \int_{\Gamma} \eta (\underline{D}_i \xi + \xi H n_i) \, d\sigma$$

となるとき η_i を η の弱接微分と呼び $\underline{D}_i \eta = \eta_i$ と書く. また Γ 上のソボレフ空間を

$$H^1(\Gamma) := \{\eta \in L^2(\Gamma) \mid \underline{D}_1 \eta, \underline{D}_2 \eta, \underline{D}_3 \eta \in L^2(\Gamma)\}$$

で定め, $\mathcal{X} = L^2, H^1$ と Γ 上の関数 g に対して Γ 上の接ベクトル場の関数空間を

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\Gamma, T\Gamma) &:= \{v = (v_1, v_2, v_3) \mid v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{X}(\Gamma), v \cdot n = 0 \text{ on } \Gamma\}, \\ \mathcal{X}_{g\sigma}(\Gamma, T\Gamma) &:= \{v \in \mathcal{X}(\Gamma, T\Gamma) \mid \operatorname{div}_{\Gamma}(gv) = 0 \text{ on } \Gamma\} \end{aligned}$$

で定める. さらに $H^{-1}(\Gamma, T\Gamma)$ を $H^1(\Gamma, T\Gamma)$ の双対空間とし,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &:= \{w(x) = a \times x + b, x \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}^3, w|_{\Gamma} \cdot n = 0 \text{ on } \Gamma\}, \\ \mathcal{K}(\Gamma) &:= \{v \in H^1(\Gamma, T\Gamma) \mid D_{\Gamma}(v) = 0 \text{ on } \Gamma\} \end{aligned}$$

とする. $w \in \mathcal{R}$ は $\mathbb{R}^3$ 内の微小な回転と平行移動の合成を表すベクトル場であって Γ 上接ベクトル場となるものである. また $v \in \mathcal{K}(\Gamma)$ であるとき Γ 上の任意の接ベクトル場 X と Y に対して

$$\overline{\nabla}_X v \cdot Y + X \cdot \overline{\nabla}_Y v = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (\text{ここで } \overline{\nabla}_X v := P(X \cdot \nabla_{\Gamma})v \text{ は共変微分を表す})$$

が成り立ち, したがって v は ($\mathbb{R}^3$ の内積から定まる) Γ のリーマン計量を保存する. このようなベクトル場は Γ 上のキリングベクトル場と呼ばれる (詳しくは [16, 23] などを見よ). 直接計算によって $\mathcal{R}$ の元の Γ への制限は $\mathcal{K}(\Gamma)$ の元となること, すなわち $\mathcal{R}|_{\Gamma} := \{w|_{\Gamma} \mid w \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{K}(\Gamma)$ であることが分かる. 集合 $\mathcal{R}|_{\Gamma}$ は $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた曲面 Γ の外在的な無限小対称性を表し, $\mathcal{K}(\Gamma)$ は抽象的なリーマン多様体 Γ の内在的な無限小対称性を表す. 閉曲面 Γ が $\mathbb{R}^3$ 内の回転面または凸曲面のときは $\mathcal{R}|_{\Gamma} = \mathcal{K}(\Gamma)$ となることが知られているが, 他の閉曲面で同じ関係が成り立つかは分かっていない.

2.2 曲がった薄膜領域

g_0 と g_1 を Γ 上の関数として, ある定数 $c > 0$ が存在して次の不等式が成り立つと仮定する:

$$g := g_1 - g_0 \geq c \quad \text{on } \Gamma.$$

このとき十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $\mathbb{R}^3$ 内の曲がった薄膜領域 Ω_{ε} とその内側と外側の境界 $\Gamma_{\varepsilon}^0, \Gamma_{\varepsilon}^1$ を

$$\Omega_{\varepsilon} := \{y + rn(y) \mid y \in \Gamma, r \in (\varepsilon g_0(y), \varepsilon g_1(y))\}, \quad \Gamma_{\varepsilon}^i := \{y + \varepsilon g_i(y)n(y) \mid y \in \Gamma\}, \quad i = 0, 1$$

で定め, $\Gamma_{\varepsilon} := \Gamma_{\varepsilon}^0 \cup \Gamma_{\varepsilon}^1$ を Ω_{ε} の境界全体とする. Ω_{ε} 上の関数 φ に対して

$$M\varphi(y) := \frac{1}{\varepsilon g(y)} \int_{\varepsilon g_0(y)}^{\varepsilon g_1(y)} \varphi(y + rn(y)) \, dr, \quad y \in \Gamma$$

と定め, M を膜の厚さ方向への平均作用素と呼ぶ. またベクトル場 $u: \Omega_{\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対してその平均の接線方向成分を $M_{\tau}u := PMu$ で表す ($M_{\tau}u$ は Γ 上の接ベクトル場である).

3 主定理と証明の概要

本講演の主定理に必要な仮定を与える. γ_ε^0 と γ_ε^1 を非負の定数として Γ_ε 上の摩擦定数を

$$\gamma_\varepsilon := \gamma_\varepsilon^i \quad \text{on } \Gamma_\varepsilon^i, i = 0, 1$$

で定める. また関数空間を

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i &:= \{w \in \mathcal{R} \mid w|_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma g_i = 0 \text{ on } \Gamma\}, \quad i = 0, 1, \\ \mathcal{R}_g &:= \{w \in \mathcal{R} \mid w|_\Gamma \cdot \nabla_\Gamma g = 0 \text{ on } \Gamma\}, \\ \mathcal{K}_g(\Gamma) &:= \{v \in \mathcal{K}(\Gamma) \mid v \cdot \nabla_\Gamma g = 0 \text{ on } \Gamma\} \end{aligned}$$

で定め, $\mathcal{R}_g|_\Gamma := \{w|_\Gamma \mid w \in \mathcal{R}_g\}$ とする. 定数 $\gamma_\varepsilon^0, \gamma_\varepsilon^1$ と閉曲面 Γ に対して以下の仮定を課す:

仮定 3.1. ある定数 $c > 0$ が存在して $i = 0, 1$ と任意の $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して $\gamma_\varepsilon^i \leq c\varepsilon$ が成り立つ.

仮定 3.2. 以下の条件のいずれかが成り立つ:

- (A1) ある定数 $c > 0$ が存在して $\gamma_\varepsilon^0 \geq c\varepsilon$ または $\gamma_\varepsilon^1 \geq c\varepsilon$ が任意の $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して成り立つ.
- (A2) $\mathcal{K}_g(\Gamma) = \{0\}$.
- (A3) $\mathcal{R}_g = \mathcal{R}_0 \cap \mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_g|_\Gamma = \mathcal{K}_g(\Gamma)$ かつ任意の $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して $\gamma_\varepsilon^0 = \gamma_\varepsilon^1 = 0$ が成り立つ.

これらの仮定は滑り境界条件の下での Ω_ε 上のストークス作用素 A_ε に対する一様ノルム同値性

$$\begin{aligned} c^{-1} \|u\|_{H^k(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|A_\varepsilon^{k/2} u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c \|u\|_{H^k(\Omega_\varepsilon)}, \quad u \in D(A_\varepsilon^{k/2}), k = 1, 2 \\ (c > 0 \text{ は } \varepsilon \text{ によらない定数, } D(A_\varepsilon^{k/2}) &\subset L^2(\Omega_\varepsilon)^3 \text{ は作用素 } A_\varepsilon^{k/2} \text{ の定義域}) \end{aligned}$$

を示すのに必要となるが, 本講演ではこのことに関する説明は行わない (詳しくは [12] を見よ).

注意 3.3. 仮定 3.2 の条件 (A2) について, 閉曲面 Γ の種数が 2 以上の場合は $\mathcal{K}(\Gamma) = \{0\}$, すなわち Γ 上の非自明なキリングベクトル場は存在しないことが知られている (例えば [21, Proposition 2.2] を見よ). したがってこの場合は任意の関数 $g = g_1 - g_0$ に対して条件 (A2) が満たされる. また条件 (A3) が成り立つ典型的な例は $\mathbb{R}^3$ の単位球面 S^2 に退化するような薄い球殻

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < |x| < 1 + \varepsilon\} \quad (\Gamma = S^2, g_0 = 0, g_1 = 1)$$

である. この場合は S^2 上 $\nabla_\Gamma g_0 = \nabla_\Gamma g_1 = \nabla_\Gamma g = 0$ であり

$$\mathcal{R} = \{w(x) = a \times x, x \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}^3\}, \quad \mathcal{R}|_{S^2} = \mathcal{K}(S^2) = \{w(y) = a \times y, y \in S^2 \mid a \in \mathbb{R}^3\}$$

となる. ただしこの場合はナビエ・ストークス方程式 (1.1) を完全滑り境界条件

$$u \cdot n_\varepsilon = 0, \quad P_\varepsilon D(u) n_\varepsilon = 0 \quad \text{on } \Gamma_\varepsilon$$

の下で考えることに注意する. 上記の薄い球殻におけるナビエ・ストークス方程式は滑り境界条件とは別の境界条件の下で Temam–Ziane [26] により研究され, 膜の厚さ ε が十分小さいときの方程式の適切性の証明および $\varepsilon \rightarrow 0$ での極限方程式の導出が行われている. 論文 [26] で導出された S^2 上の極限方程式と本研究で得られた極限方程式の比較については [12, Remark 1.11] を参照せよ.

薄膜領域 Ω_ε における L^2 ソレノイダル空間を

$$L_\sigma^2(\Omega_\varepsilon) = \{u \in L^2(\Omega_\varepsilon)^3 \mid \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega_\varepsilon, u \cdot n_\varepsilon = 0 \text{ on } \Omega_\varepsilon\}$$

で表し, 仮定 3.1 と 3.2 の下で Ω_ε 上の関数空間 $\mathcal{H}_\varepsilon$ と $\mathcal{V}_\varepsilon$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon &:= \begin{cases} L_\sigma^2(\Omega_\varepsilon) & \text{(条件 (A1) または (A2) が満たされている場合),} \\ L_\sigma^2(\Omega_\varepsilon) \cap \mathcal{R}_g^\perp & \text{(条件 (A3) が満たされている場合),} \end{cases} \\ \mathcal{V}_\varepsilon &:= H^1(\Omega_\varepsilon)^3 \cap \mathcal{H}_\varepsilon \end{aligned}$$

で定める. ただし $\mathcal{R}_g^\perp$ は $\mathcal{R}_g$ の $L^2(\Omega_\varepsilon)^3$ における直交補空間である.

以上の設定の下, 本講演での主定理を述べる.

定理 3.4 ([12, Theorem 1.6]). 仮定 3.1 と 3.2 の下, $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して

$$u_0^\varepsilon \in \mathcal{V}_\varepsilon, \quad f^\varepsilon \in L^\infty(0, \infty; \mathcal{H}_\varepsilon)$$

とする. さらに以下の条件が成り立つと仮定する:

(a) ある定数 $c > 0$, $\varepsilon_1 \in (0, 1)$, $\alpha \in (0, 1)$ が存在して任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ に対して

$$\|u_0^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|f^\varepsilon\|_{L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega_\varepsilon))}^2 \leq c\varepsilon^{-1+\alpha}$$

が成り立つ.

(b) ある $v_0 \in L^2(\Gamma, T\Gamma)$ と $f \in L^\infty(0, \infty; H^{-1}(\Gamma, T\Gamma))$ が存在して

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\tau u_0^\varepsilon &= v_0 \quad \text{weakly in } L^2(\Gamma, T\Gamma), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\tau f^\varepsilon &= f \quad \text{weakly-}\star \text{ in } L^\infty(0, \infty; H^{-1}(\Gamma, T\Gamma)) \end{aligned}$$

が成り立つ.

(c) $i = 0, 1$ に対してある定数 $\gamma^i \geq 0$ が存在して $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \gamma_\varepsilon^i = \gamma^i$ が成り立つ.

このときある定数 $\varepsilon_2 \in (0, 1)$ が存在し, 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ に対して (1.1) の時間大域的な強解

$$u^\varepsilon \in C([0, \infty); \mathcal{V}_\varepsilon) \cap L_{loc}^2([0, \infty); H^2(\Omega_\varepsilon)^3) \cap H_{loc}^1([0, \infty); \mathcal{H}_\varepsilon)$$

が存在して

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M u^\varepsilon \cdot n = 0 \quad \text{strongly in } C([0, \infty); L^2(\Gamma))$$

が成り立つ. さらに Γ 上の接ベクトル場

$$v \in C([0, \infty); L_{g\sigma}^2(\Gamma, T\Gamma)) \cap L_{loc}^2([0, \infty); H_{g\sigma}^1(\Gamma, T\Gamma)) \cap H_{loc}^1([0, \infty); H^{-1}(\Gamma, T\Gamma))$$

が存在し, 任意の $T > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\tau u^\varepsilon &= v \quad \text{weakly in } L^2(0, T; H^1(\Gamma, T\Gamma)), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \partial_t M_\tau u^\varepsilon &= \partial_t v \quad \text{weakly in } L^2(0, T; H^{-1}(\Gamma, T\Gamma)) \end{aligned}$$

が成り立ち、かつ v は以下の方程式の唯一の弱解である：

$$\left\{ \begin{array}{l} g\left(\partial_t v + \overline{\nabla}_v v\right) - 2\nu \left\{ P \operatorname{div}_\Gamma [g D_\Gamma(v)] - \frac{1}{g} (\nabla_\Gamma g \otimes \nabla_\Gamma g) v \right\} \\ \quad + (\gamma^0 + \gamma^1) v + g \nabla_\Gamma q = g f \quad \text{on } \Gamma \times (0, \infty), \\ \operatorname{div}_\Gamma(gv) = 0 \quad \text{on } \Gamma \times (0, \infty), \\ v|_{t=0} = v_0 \quad \text{on } \Gamma. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

ここで $\overline{\nabla}_v v = P(v \cdot \nabla_\Gamma) v$ は接ベクトル場 v のそれ自身に沿った共変微分、 q は流速 v に付随する圧力である。方程式 (3.1) の弱解の定義については [12, Section 10.5] を参照せよ。以下方程式 (3.1) を Ω_ε 上のナビエ・ストークス方程式 (1.1) の極限方程式と呼ぶ。

定理 3.4 の証明の概略を述べる。証明は次の 4 つの段階からなる：

- (1) 方程式 (1.1) の強解 u^ε の満たす弱形式から $M_\tau u^\varepsilon$ の満たす弱形式を導出する。
- (2) 平均の接線方向成分 $M_\tau u^\varepsilon$ に対するエネルギー評価を示す。
- (3) 関数列 $\{M_\tau u^\varepsilon\}_\varepsilon$ の部分列が (3.1) の弱解に収束することを示す。
- (4) 方程式 (3.1) の弱解の一意性を示し、関数列 $\{M_\tau u^\varepsilon\}_\varepsilon$ 全体の (3.1) の弱解への収束を示す。

このうち (3) と (4) の議論は $\mathbb{R}^2$ 内の有界領域におけるナビエ・ストークス方程式の弱解の構成およびその一意性の証明と同様である（例えば [2] を見よ）ので本稿および講演での説明は省略する。

(1) では薄膜領域 Ω_ε の膜の厚さ方向への平均作用素 M と積分の変数変換公式

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \varphi(x) dx = \int_\Gamma \left(\int_{\varepsilon g_0(y)}^{\varepsilon g_1(y)} \varphi(y + rn(y)) J(y, r) dr \right) d\sigma \quad (J(y, r) \text{ はヤコビアン})$$

を用いて方程式 (1.1) の強解 u^ε の満たす弱形式（方程式に対応する試験関数との積に関する積分等式）をその平均の接線方向成分 $M_\tau u^\varepsilon$ の満たす弱形式に変形する。ここで $M_\tau u^\varepsilon$ の弱形式に現れる残余項が ε に関して「十分小さい」ことを示すために (1.1) の強解 u^ε に対する一様評価

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq c\varepsilon^{-1+\alpha}, \quad \int_0^t \|u^\varepsilon(s)\|_{H^2(\Omega_\varepsilon)}^2 ds \leq c\varepsilon^{-1+\alpha}(1+t), \quad t \geq 0$$

が必要となる（ $c > 0$ は ε によらない定数、詳しくは [12, Theorem 8.4 and Section 10] を見よ）。

(2) では $M_\tau u^\varepsilon$ の満たす弱形式を用いて $M_\tau u^\varepsilon$ に対するエネルギー評価を導く。通常の 2 次元ナビエ・ストークス方程式の（近似）解に対するエネルギー評価は弱形式の試験関数に解そのものを代入することにより得られるが、 $M_\tau u^\varepsilon$ はその弱形式における試験関数の空間 $H_{g\sigma}^1(\Gamma, T\Gamma)$ の元ではないためそれ自身を代入することはできない。そこで Γ 上の接ベクトル場 $v \in L^2(\Gamma, T\Gamma)$ に対する重み付きヘルムホルツ分解（詳しくは [12, Section 9] を参照せよ）

$$v = v_g + g \nabla_\Gamma q \quad \text{in } L^2(\Gamma, T\Gamma), \quad v_g \in L_{g\sigma}^2(\Gamma, T\Gamma), \quad g \nabla_\Gamma q \in L_{g\sigma}^2(\Gamma, T\Gamma)^\perp$$

を用いて $M_\tau u^\varepsilon$ の満たす弱形式をその重み付きソレノイダル部分 $v^\varepsilon \in H_{g\sigma}^1(\Gamma, T\Gamma)$ の満たす弱形式に変換する。その弱形式の試験関数に v^ε を代入することで v^ε のエネルギー評価を導出し、 $M_\tau u^\varepsilon$ と v^ε の差分に対する評価と組み合わせることで $M_\tau u^\varepsilon$ のエネルギー評価を得る。

4 極限方程式と多様体上のナヴィエ・ストークス方程式

最後に極限方程式 (3.1) と抽象的なリーマン多様体上のナヴィエ・ストークス方程式との関係について述べる. 極限方程式 (3.1) は g が定数 (例えば $g \equiv 1$) かつ $\gamma^0 = \gamma^1 = 0$ のとき

$$\partial_t v + \bar{\nabla}_v v - 2\nu P \operatorname{div}_\Gamma [D_\Gamma(v)] + \nabla_\Gamma q = f, \quad \operatorname{div}_\Gamma v = 0 \quad \text{on } \Gamma \times (0, \infty) \quad (4.1)$$

という形になる. また Ric を Γ のリッチ曲率, $\Delta_B = -\bar{\nabla}^* \bar{\nabla}$ を Γ 上のボホナーラプラシアンとする (例えば [24, Appendix C] を見よ) と, Γ は 2 次元曲面であるから Γ 上の接ベクトル場 v に対して $\operatorname{Ric}(v) = Kv$ が成り立ち, さらに v が Γ 上 $\operatorname{div}_\Gamma v = 0$ を満たすならば

$$2P \operatorname{div}_\Gamma [D_\Gamma(v)] = \Delta_B v + Kv \quad \text{on } \Gamma$$

が成り立つ (証明は [13, Lemma 2.5] を参照せよ). したがって方程式 (4.1) は

$$\partial_t v + \bar{\nabla}_v v - \nu \{\Delta_B v + \operatorname{Ric}(v)\} + \nabla_\Gamma q = f, \quad \operatorname{div}_\Gamma v = 0 \quad \text{on } \Gamma \times (0, \infty) \quad (4.2)$$

というリーマン多様体 Γ の内在的な量のみで表現される方程式となる. この方程式は論文 [3, 22] において「正しい」リーマン多様体上のナヴィエ・ストークス方程式と呼ばれており, Mitrea–Taylor [10], Nagasawa [14], Taylor [22] などにより研究されている. したがって極限方程式 (3.1) はリーマン多様体上の重み付きナヴィエ・ストークス方程式に消散項 $(\gamma^0 + \gamma^1)v$ を加えたものと考えられる.

ここで論文 [3, 22] による「正しい」という表現は粘性項 $\nu \{\Delta_B v + \operatorname{Ric}(v)\}$ の定め方に対するものである. リーマン多様体上のオイラー方程式 (非圧縮非粘性流体の方程式) は (4.2) で $\nu = 0$ としたものであることが Arnol'd [1] により示されている (論文 [3] も参照せよ). 一方で非圧縮粘性流体に対するナヴィエ・ストークス方程式については平らな空間での方程式

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$$

の類推から球面 S^2 や多様体 Γ 上の方程式では粘性項を $\mathbb{R}^3$ 上のベクトルラプラシアンの S^2 への制限や Γ 上のホッジラプラシアン $\Delta_D = -(\mathbf{d}_\Gamma \delta_\Gamma + \delta_\Gamma \mathbf{d}_\Gamma)$ とする論文が多い. (ここで $\mathbf{d}_\Gamma$ と δ_Γ は Γ 上の微分形式に対する外微分と余微分であり, また Γ のリーマン計量 θ を用いて Γ 上のベクトル場と 1 次微分形式を同一視している.) これに対して論文 [3, 22] では $\mathbb{R}^3$ での方程式の粘性項が歪み速度テンソル $D(u) = \{\nabla u + (\nabla u)^T\}/2$ の発散で与えられること, すなわち

$$2 \operatorname{div}[D(u)] = \Delta u + \nabla(\operatorname{div} u) = \Delta u \quad (\text{第 2 式は } \operatorname{div} u = 0 \text{ による})$$

であることに着目し, Γ 上のベクトル場 v に対して歪み速度テンソル $\operatorname{Def} v$ を

$$(\operatorname{Def} v)(X, Y) := \frac{1}{2} \left\{ \theta(\bar{\nabla}_X v, Y) + \theta(X, \bar{\nabla}_Y v) \right\} \quad (X \text{ と } Y \text{ は } \Gamma \text{ 上のベクトル場})$$

で定め作用素 Def と L^2 内積による (負号を付けない) 形式的共役作用素 Def^* を用いて粘性項を

$$2 \operatorname{Def}^* \operatorname{Def} v = -\Delta_B v - \nabla_\Gamma(\operatorname{div} v) - \operatorname{Ric}(v) = -\Delta_B v - \operatorname{Ric}(v) \quad (\text{第 2 式は } \operatorname{div}_\Gamma v = 0 \text{ による})$$

とすべきであると述べている．また三松-矢野 [11] は流体の粘性摩擦とそれによって引き起こされるエネルギー散逸に対する幾何学的考察を通じて多様体上のナビエ・ストークス方程式が (4.2) の形になることを示している．ところで $\Gamma = S^2$ のときに

$$v(y) = a \times y, \quad q(y) = \frac{1}{2}|v(y)|^2, \quad y \in S^2 \quad (a \in S^2, \times \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ でのベクトル積})$$

とすると v は S^2 上の接ベクトルであり, $\mathbb{R}^3$ の座標系を用いての直接計算により

$$D_\Gamma(v) = P \left(\frac{\nabla_\Gamma v + (\nabla_\Gamma v)^T}{2} \right) P = 0, \quad \bar{\nabla}_v v + \nabla_\Gamma q = 2D_\Gamma(v)v = 0, \quad \operatorname{div}_\Gamma v = 0 \quad \text{on } S^2$$

であることが確かめられる．このことから原点を通る直線の周りの微小回転を表すベクトル場 v は球面 S^2 上の方程式 (4.1) の, したがって (4.2) の定常解であることが分かるが, 粘性項がベクトルラプラシアンやホッジラプラシアンのみの場合は v は定常解にはならない．このように「回転が球面上の流体方程式の解になる」という直感に合う結果が得られることから方程式 (4.2) が「正しい」リーマン多様体上のナビエ・ストークス方程式であるように思われる．

参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, *Mathematical methods of classical mechanics*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 60, Springer-Verlag, New York, 1989, Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein.
- [2] F. Boyer and P. Fabrie, *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models*, Applied Mathematical Sciences, vol. 183, Springer, New York, 2013.
- [3] D. G. Ebin and J. Marsden, *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid*, Ann. of Math. (2), **92** (1970), 102–163.
- [4] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001, Reprint of the 1998 edition.
- [5] J. K. Hale and G. Raugel, *Reaction-diffusion equation on thin domains*, J. Math. Pures Appl. (9), **71** (1992), no. 1, 33–95.
- [6] J. K. Hale and G. Raugel, *A reaction-diffusion equation on a thin L-shaped domain*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **125** (1995), no. 2, 283–327.
- [7] L. T. Hoang and G. R. Sell, *Navier-Stokes equations with Navier boundary conditions for an oceanic model*, J. Dynam. Differential Equations, **22** (2010), no. 3, 563–616.
- [8] D. Iftimie, G. Raugel, and G. R. Sell, *Navier-Stokes equations in thin 3D domains with Navier boundary conditions*, Indiana Univ. Math. J., **56** (2007), no. 3, 1083–1156.
- [9] S. Jimbo and K. Kurata, *Asymptotic behavior of eigenvalues of the Laplacian on a thin domain under the mixed boundary condition*, Indiana Univ. Math. J., **65** (2016), no. 3, 867–898.
- [10] M. Mitrea and M. Taylor, *Navier-Stokes equations on Lipschitz domains in Riemannian manifolds*, Math. Ann., **321** (2001), no. 4, 955–987.

- [11] 三松佳彦・矢野泰久, Riemann 多様体上の非圧縮流体の幾何, 数理解析研究所講究録, **1260** (2002), 33–47.
- [12] T.-H. Miura, *Navier–Stokes equations in a curved thin domain*, preprint, arXiv:1811.09816.
- [13] T.-H. Miura, *On singular limit equations for incompressible fluids in moving thin domains*, Quart. Appl. Math., **76** (2018), no. 2, 215–251.
- [14] T. Nagasawa, *Construction of weak solutions of the Navier-Stokes equations on Riemannian manifold by minimizing variational functionals*, Adv. Math. Sci. Appl., **9** (1999), no. 1, 51–71.
- [15] C. L. M. H. Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mem. Acad. R. Sci. Inst. France, **6** (1823), 389–440.
- [16] P. Petersen, *Riemannian geometry*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 171, Springer, Cham, 2016.
- [17] M. Prizzi, M. Rinaldi, and K. P. Rybakowski, *Curved thin domains and parabolic equations*, Studia Math., **151** (2002), no. 2, 109–140.
- [18] G. Raugel, *Dynamics of partial differential equations on thin domains*, Dynamical systems (Montecatini Terme, 1994), Lecture Notes in Math., vol. 1609, Springer, Berlin, 1995, pp. 208–315.
- [19] G. Raugel and G. R. Sell, *Navier-Stokes equations on thin 3D domains. I. Global attractors and global regularity of solutions*, J. Amer. Math. Soc., **6** (1993), no. 3, 503–568.
- [20] M. Schatzman, *On the eigenvalues of the Laplace operator on a thin set with Neumann boundary conditions*, Appl. Anal., **61** (1996), no. 3-4, 293–306.
- [21] Y. Shimizu, *Green’s function for the Laplace-Beltrami operator on surfaces with a non-trivial Killing vector field and its application to potential flows*, preprint, arXiv:1810.09523.
- [22] M. E. Taylor, *Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes and other evolution equations*, Comm. Partial Differential Equations, **17** (1992), no. 9-10, 1407–1456.
- [23] M. E. Taylor, *Partial differential equations I. Basic theory*, second ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 115, Springer, New York, 2011.
- [24] M. E. Taylor, *Partial differential equations II. Qualitative studies of linear equations*, second ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 116, Springer, New York, 2011.
- [25] R. Temam and M. Ziane, *Navier-Stokes equations in three-dimensional thin domains with various boundary conditions*, Adv. Differential Equations, **1** (1996), no. 4, 499–546.
- [26] R. Temam and M. Ziane, *Navier-Stokes equations in thin spherical domains*, Optimization methods in partial differential equations (South Hadley, MA, 1996), Contemp. Math., vol. 209, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 281–314.
- [27] T. Yachimura, *Two-phase eigenvalue problem on thin domains with Neumann boundary condition*, Differential Integral Equations, **31** (2018), no. 9-10, 735–760.