

Global existence and asymptotic behavior in a Keller–Segel system with signal-dependent sensitivity

東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻
水上雅昭 (Masaaki MIZUKAMI)*

概要

本講演では、次の感応性関数をもつ Keller–Segel 系を Neumann 境界条件と初期条件の下で考える：

$$u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot (uS(v)\nabla v), \quad v_t = \Delta v - v + u, \quad x \in \Omega, \quad t > 0. \quad (\text{KS})$$

ここで、 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) はなめらかな境界をもつ有界領域とし、 $\chi > 0$, S は $S(v) \leq (a+v)^{-k}$ ($k \geq 1, a \geq 0$) を満たす既知関数とする。本講演では、 $k = 1$ の場合と $k > 1$ の場合を統一的に扱う手法を用いて、時間大域的古典解の存在を導く χ の条件を導出する。さらに、問題 (KS) の時間大域的古典解の漸近挙動を導く χ の条件を決定する。

1 導入

偏微分方程式は解析学における一つの研究分野であり、多くの数学者がさまざまな偏微分方程式の研究に従事している。偏微分方程式はしばしば自然現象を数学的に記述しており、自然現象を数学的に解明する手段として研究されている。特に、物理や化学だけではなく、工学や生物、医学などを背景にもつ偏微分方程式も近年広く扱われている。ここでは、生物現象、特に走化性による生物の集中現象に焦点を当てる。走化性とは、生物や細胞が化学物質に反応して方向性をもった運動をする性質であり、例えば癌細胞の浸潤現象、免疫、リンパ球や神経細胞の遊走などの生命活動において重要な役割をもつ性質である。Keller–Segel [4, 5] は走化性をもつ細胞性粘菌の一種であるキイロタマホコリカビの集中現象について研究を行い、Keller–Segel 系と呼ばれる次の問題を提唱した：

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot (uS(v)\nabla v), & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ v_t = \Delta v - v + u, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \nabla u \cdot \nu = \nabla v \cdot \nu = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, \quad v(\cdot, 0) = v_0, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで、 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) はなめらかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域、 ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルであり、 $\chi > 0$ は定数、 S, u_0, v_0 は既知関数とする。Keller–Segel 系は 2 本の偏微分方程式の連立系を Neumann 境界条件と初期条件のもとで考える問題であり、未知関数の u と v はそれぞれ生物の密

* 本研究は JSPS 科研費 (No. 17J00101) の助成を受けたものである。

度と化学物質の濃度を表している．この問題の第一方程式の右辺第一項の Δu は生物の拡散を表す項であり，右辺第二項の $-\chi \nabla \cdot (nS(v)\nabla v)$ は走化性による生物の集中現象を表す項である．ここで，走化性項が集中現象を記述している理由を説明する． v を既知関数として， Δu をなくした第一方程式

$$u_t = -\chi \nabla \cdot (uS(v)\nabla v)$$

は，連続の方程式の観点から考えると，流れ $\chi S(v)\nabla v$ の方向に移動する密度 u の生物の運動を記述しており， ∇v は v の値が高い方向に向かう勾配ベクトルであるため，走化性項は生物が v の値が高い方向に移動する現象を記述していることがわかる (図 1 参照)．特に，流れ $\chi S(v)\nabla v$ の長さは $\chi S(v)$ の影響を強く受けるため， $\chi S(v)$ の値が小さいときは走化性の力が弱いことを表し，値が大きい場合は走化性の力が強いことを表している．ここで， $S(v)$ の例として想定されている関数は

$$S(v) = 1, \quad S(v) = \frac{1}{v}, \quad S(v) = \frac{1}{(a+v)^k} \quad (a \geq 0, k > 1)$$

などが挙げられるが， $S(v) = 1/v$ の場合や $S(v) = 1/(a+v)^k$ ($a \geq 0, k > 1$) の場合には v が大きくなるにつれて $\chi S(v)$ が小さくなるため，感応性関数 $S(v)$ は走化性の力を抑制する効果をもつ．

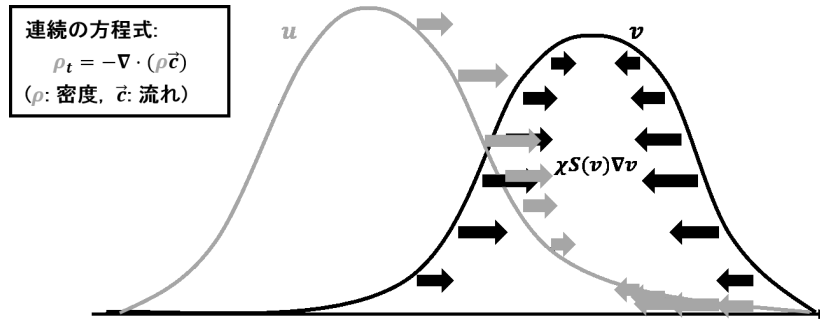


図 1: 走化性項による生物の集中現象

2 先行研究

Keller–Segel 系の研究において，拡散現象と集中現象のどちらがより強い影響をもつのかを明らかにすることが重要な研究テーマの 1 つである． $S(v) = 1$ の場合には，次の結果が知られている：

- 1 次元の場合：有界な時間大域的古典解が存在する (Osaki–Yagi [10]).
- 2 次元の場合：ある定数 $C > 0$ が存在し，次が成り立つ ($C = 4\pi$ or $C = 8\pi$):
 - $\int_{\Omega} u_0 < C$ のとき，有界な時間大域的古典解が存在する (Nagai–Senba–Yoshida [9]).
 - $m > C$ のとき，対応する解が爆発するようなある u_0 で $\int_{\Omega} u_0 = m$ を満たすものが存在する (Horstmann–Wang [3], Mizoguchi–Winkler [6]).
- 3 次元以上の場合：任意の $m > 0$ に対して，対応する解が爆発するようなある u_0 で $\int_{\Omega} u_0 = m$ を満たすものが存在する (Winkler [12]).

このように， $S(v) = 1$ の場合は次元に応じて性質が変わり，特に，次元が上がるにつれて爆発解が存在しやすくなっている．

感応性関数 S が $S(v) = 1/v$ の場合, χ に対する小ささの条件の下で時間大域的古典解の存在が示されている. $S(v) = 1/v$ のとき, Fujie [2] が $\chi < \sqrt{2/n}$ という条件の下で時間大域的古典解の存在を示した. 一方, $S(v) = 1/(a+v)^k$ ($a \geq 0, k > 1$) の場合, Winkler [11] によりすべての $\chi > 0$ に対して有界な時間大域的古典解の存在が主張されていたが, その証明には本質的な間違いがある. そのため, $S(v) = 1/(a+v)^k$ のときの時間大域的古典解の存在と有界性を導出する条件はまだ得られていない. さらに, $S(v) = 1/v$ のときと $S(v) = 1/(a+v)^k$ のときは別々に考えられており, 両者の数学的つながりは解明されていない. また, $S(v) = 1/(a+v)^k$ の場合における問題 (1.1) の解の漸近挙動についてはまだ明らかになっていない. 本研究の目的は次の 2 つの課題を解決することである:

- 問題 (1.1) の時間大域的古典解の存在と有界性を導出する χ の適切な条件を明確にし, $S(v) = 1/v$ の場合と $S(v) = 1/(a+v)^k$ の場合を数学的につなげる.
- 問題 (1.1) の時間大域的古典解の解の挙動を導く条件を決定する.

3 主定理

感応性関数 S 及び初期値 u_0, v_0 は次の (A1), (A2) を満たすと仮定する:

$$\begin{cases} S \in C^{1+\theta}([0, \infty)) \ (\exists \theta > 0), \\ \exists a \geq 0 \ \exists k \geq 1; \ 0 < S(v) \leq \frac{1}{(a+v)^k}, \end{cases} \quad (\text{A1})$$

$$0 \leq u_0 \in C(\bar{\Omega}) \setminus \{0\}, \quad \begin{cases} 0 < v_0 \in W^{1,q}(\Omega) \ (\exists q > n) & (a = 0), \\ 0 \leq v_0 \in W^{1,q}(\Omega) \setminus \{0\} \ (\exists q > n) & (a > 0). \end{cases} \quad (\text{A2})$$

このとき, [7] における手法を応用して, 有界な時間大域的古典解の存在に関する次の定理を得た.

主定理 1 ([8, Theorem 1.1]). 感応性関数 S , 初期値 u_0, v_0 はそれぞれ (A1), (A2) を満たすとし, $\chi > 0$ は

$$\chi < k(a+\eta)^{k-1} \sqrt{\frac{2}{n}} \quad (\text{A3})$$

を満たすと仮定する. ここで, η はある定数 $c_0 > 0$ を用いて次のように表せる:

$$\eta := \sup_{\tau > 0} \left(\min \left\{ e^{-2\tau} \min_{x \in \bar{\Omega}} v_0(x), \ c_0 \|u_0\|_{L^1(\Omega)} (1 - e^{-\tau}) \right\} \right).$$

このとき, (1.1) の時間大域的古典解が一意的に存在し, 次の意味で有界である:

$$\exists C > 0; \ \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot, t)\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C \quad (t \geq 0).$$

注意. 条件 (A3) は大域解の存在と有界性を導出する自然な条件となっている. 実際, $k = 1$ のとき, 条件 (A3) は $S(v) = 1/v$ のときの条件になる:

$$\chi < \left(k(a+\eta)^{k-1} \sqrt{\frac{2}{n}} \right) \Big|_{k=1} = \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

次に、問題 (1.1) の解の挙動について扱う。ここで、主定理 1 における条件 $\chi < k(a + \eta)^{k-1} \sqrt{2/n}$ は、走化性の力が十分弱く、問題 (1.1) で $\chi = 0$ とした熱方程式の初期値境界値問題

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & x \in \Omega, \ t > 0, \\ \nabla u \cdot \nu = 0, & x \in \partial\Omega, \ t > 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, & x \in \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

と問題 (1.1) が十分近いということを意味していることが予想される。そのため、まず始めに問題 (3.1) の漸近挙動について検討する。ここで、問題 (3.1) の解 u は $\int_{\Omega} u(\cdot, t) = \int_{\Omega} u_0$ ($t \geq 0$) を満たすことに注意する。実際、 u に関する境界条件と Gauss の発散定理から

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u = \int_{\Omega} \Delta u = \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla u = 0$$

となるため、 $\int_{\Omega} u(\cdot, t) = \int_{\Omega} u_0$ となることがわかる。これより、関数 f に対して $\bar{f} := (1/|\Omega|) \int_{\Omega} f$ と定めると、部分積分と等式 $\bar{u} = (1/|\Omega|) \int_{\Omega} u = (1/|\Omega|) \int_{\Omega} u_0 = \bar{u}_0$ 、Poincaré の不等式から

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u - \bar{u}_0)^2 = 2 \int_{\Omega} (u - \bar{u}_0) \Delta u = -2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq -C_P \int_{\Omega} (u - \bar{u}_0)^2$$

がわかる ($C_P > 0$ はある定数)。この微分不等式と Neumann 熱半群の評価により、ある定数 $C, \kappa > 0$ に対して

$$\|u - \bar{u}_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C e^{-\kappa t} \quad (t > 0)$$

が成り立つことが示せる。このように、問題 (3.1) においては、 $\int_{\Omega} u = \int_{\Omega} u_0$ が成り立つことから、関数

$$\mathcal{F}_1(t) := \int_{\Omega} (u(\cdot, t) - \bar{u}_0)^2$$

が問題 (3.1) の Lyapunov 関数として機能し、問題 (3.1) の解 u が初期値 u_0 の平均に指数関数的に収束することがわかる。ここで、問題 (1.1) においても、 u に関する境界条件と Gauss の発散定理から $\int_{\Omega} u(\cdot, t) = \int_{\Omega} u_0$ ($t \geq 0$) が示せるため、 χ が小さいという条件の下で Lyapunov 関数が構成でき、問題 (1.1) の解の第一成分である u は初期値 u_0 の平均に収束することが期待できる。実際、Winkler–Yokota [13] の手法を参考にして、指数関数的に収束するような時間大域的古典解の存在に関する次の定理を得た。

主定理 2 ([1, Theorem 1.1]). 感応性関数 S がある定数 $k > 1$, $a \geq 0$ に対して (A1) を満たしていると仮定すると、任意の定数 $M > 0$, $v_* > 0$ に対してある定数 $\delta = \delta(k, a, M, v_*) > 0$ が存在し、次の主張が成り立つ: 初期値 u_0, v_0 が (A2) 及び $\int_{\Omega} u_0 = M$, $\min_{x \in \bar{\Omega}} v_0(x) = v_*$ を満たしていると仮定すると、任意の $\chi \in (0, \delta)$ に対して問題 (1.1) の時間大域的古典解 (u, v) が一意的に存在して、ある定数 $C, \kappa > 0$ に対して

$$\|u(\cdot, t) - \bar{u}_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot, t) - \bar{u}_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C e^{-\kappa t} \quad (3.2)$$

がすべての $t > 0$ で成り立つ。ここで、 $\bar{u}_0 := (1/|\Omega|) \int_{\Omega} u_0$ 。

ここで、 $M \rightarrow \infty$ のとき $\delta(k, a, M, v_*) \nearrow k(a + v_*)^{k-1} \sqrt{2/n}$ となることから、 $M = \int_{\Omega} u_0$ が十分大きい場合に関する次の定理を得た。

系 ([1, Theorem 1.3]). 感応性関数 S がある定数 $k > 1$, $a \geq 0$ に対して (A1) を満たすとする, 任意の定数 $v_* > 0$, $\chi_0 \in (0, k(a + v_*)^{k-1} \sqrt{2/n})$ に対してある定数 $M_0 = M_0(k, a, v_*, \chi_0) > 0$ が存在して次の主張が成り立つ: 初期値 u_0, v_0 が (A2) 及び

$$\int_{\Omega} u_0 = M \geq M_0,$$

$\min_{x \in \bar{\Omega}} v_0(x) = v_*$ を満たすとする, 任意の $\chi \in (0, \chi_0)$ に対して問題 (1.1) の時間大域的古典解 (u, v) が一意的に存在して, ある定数 $C, \kappa > 0$ に対して (3.2) が成り立つ.

4 証明の方針

主定理 1 の証明の鍵は, 条件 (A1) における $1/(a + v)^k$ を用いてテスト関数 $\varphi_r(v)$ を

$$\varphi_r(v) = \exp \left\{ -r \int_0^v \frac{1}{(a + s)^k} ds \right\}$$

とおき, 問題 (1.1) の解 (u, v) とある定数 $\varepsilon \in [0, 1)$, $r, c > 0$ に対して,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p \varphi_r(v) + \varepsilon p(p-1) \int_{\Omega} u^{p-2} \varphi_r(v) |\nabla u|^2 \leq c \int_{\Omega} u^p \varphi_r(v) - r \int_{\Omega} u^{p+1} \frac{\varphi_r(v)}{(a + v)^k}$$

を導出することである. この不等式より $\int_{\Omega} u^p$ の評価を導出することができ, Neumann 熱半群の評価から u の L^∞ 評価を得ることができる. ここで, この証明は $k > 1$ の場合だけでなく $k = 1$ でも有効なため, これにより $S(v) = 1/v$ と $S(v) = 1/(a + v)^k$ の場合を数学的につなげることができた.

一方, 主定理 2 の証明の鍵は, 主定理 1 の証明で用いたエネルギー関数 $\varphi_r(v)$ を利用して次のような時間遠方での評価を与えることである:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u^p(\cdot, t) \varphi_r(v(\cdot, t)) \leq C_1 M$$

($C_1 = C_1(k, a, v_*) > 0$ はある定数). この評価により,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \chi \|u(\cdot, t) S(v(\cdot, t))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\chi C_2}{M^{k-1}}$$

($C_2 = C_2(k, a, v_*) > 0$ はある定数) が得られ, χ が十分小さい場合, 熱方程式における Lyapunov 関数 $\mathcal{F}_1$ に問題 (1.1) の解の第二成分である v のエネルギー関数を加えた関数

$$\mathcal{F}(u, v)(t) := \int_{\Omega} (u(\cdot, t) - \bar{u}_0)^2 + D \int_{\Omega} (v(\cdot, t) - \bar{u}_0)^2$$

(D はある定数) が時間遠方で問題 (1.1) の Lyapunov 関数であることを示すことができ, 問題 (1.1) の時間大域的古典解 (u, v) が $(\bar{u}_0, \bar{u}_0)$ に収束することが得られる.

参考文献

- [1] T. Black, J. Lankeit, and M. Mizukami. Stabilization in the Keller–Segel system with signal-dependent sensitivity. submitted.
- [2] K. Fujie. Boundedness in a fully parabolic chemotaxis system with singular sensitivity. *J. Math. Anal. Appl.*, 424:675–684, 2015.
- [3] D. Horstmann and G. Wang. Blow-up in a chemotaxis model without symmetry assumptions. *Eur. J. Appl. Math.*, 12:159–177, 2001.
- [4] E. F. Keller and L. A. Segel. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. *J. Theor. Biol.*, 26:399–415, 1970.
- [5] E. F. Keller and L. A. Segel. Traveling bands of chemotactic bacteria: A theoretical analysis. *J. Theor. Biol.*, 30:235–248, 1971.
- [6] N. Mizoguchi and M. Winkler. Blow-up in the two-dimensional parabolic Keller–Segel system. preprint.
- [7] M. Mizukami and T. Yokota. Global existence and asymptotic stability of solutions to a two-species chemotaxis system with any chemical diffusion. *J. Differential Equations*, 261:2650–2669, 2016.
- [8] M. Mizukami and T. Yokota. A unified method for boundedness in fully parabolic chemotaxis systems with signal-dependent sensitivity. *Math. Nachr.*, 290:2648–2660, 2017.
- [9] T. Nagai, T. Senba, and K. Yoshida. Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis. *Funkcial. Ekvac.*, 40:411–433, 1997.
- [10] K. Osaki and A. Yagi. Finite dimensional attractor for one-dimensional Keller–Segel equations. *Funkcial. Ekvac.*, 44:441–469, 2001.
- [11] M. Winkler. Absence of collapse in a parabolic chemotaxis system with signal-dependent sensitivity. *Math. Nachr.*, 283:1664–1673, 2010.
- [12] M. Winkler. Finite-time blow-up in the higher-dimensional parabolic-parabolic Keller–Segel system. *J. Math. Pures Appl.*, 100:748–767, 2013.
- [13] M. Winkler and T. Yokota. Stabilization in the logarithmic Keller–Segel system. *Nonlinear Anal.*, 170:123–141, 2018.