点付きトーラス上の有限巡回群作用のリフトの構成について

高橋 典寿 (Norihisa Takahashi)
(立命館大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻)

1 背景と目的

種数 g の向き付け可能閉曲面を Σ_g と表す．Σ_g 上の向きを保つ可微分同相写像の isotopy 類の全体は写像の合成を積とし群をなす．これを Σ_g の写像類群と呼び，$\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ で表す．

$\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ の群構造に関しては，様々な研究が存在する．M. Dehn 氏, W. B. R. Lickorish 氏は，有限個の Dehn twist と呼ばれる Σ_g 上の可微分同相写像によって $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ が生成されることを示した．さらに S. P. Humphries 氏は，Σ_g 上の $2g+1$ 個の単純閉曲線に関する Dehn twist によって，$\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ が生成されることを示した．

廣瀬進氏 [3] は種数 4 以下の全ての極大有限巡回群作用の Dehn twist 表示を与えた．石坂瑞穂氏 [4] は Σ_g 上の超楕円的周期的写像を共役の差を除き分類し，それらの Dehn twist 表示を与えた．さらに中村豪氏，中西敏浩氏 [5] は，$\mathrm{Mod}(\Sigma_2)$ の全ての有限部分群に Dehn twist 表示を与えた．しかし，一般の写像類群の任意の有限部分群に対し，Dehn twist による表示を与えることは未だ出来ていない．

また，J. S. Birman 氏, H. M. Hilden 氏は，$2g+2$ 点付き球面上の任意の同相写像が Σ_g に持ち上がることを示した．さらに T. Ghaswala 氏, R. R. Winarski 氏 [2] は点付き球面上の巡回分岐被覆写像であって，点付き球面上の任意の同相写像が Σ_g に持ち上がる条件を求めた．

本稿では，Σ_g 上の有限巡回群であって，$2g-2$ 点付きトーラス上の有限巡回群の持ち上げとして得られるものの構成を行う．本稿は，野澤啓氏 (立命館大学 理工) との共同研究に基づく．

2 周期的写像の分類

$f \in \mathrm{Diff}_+(\Sigma_g)$ に対し，$f^n = id_{\Sigma_g}$ なる自然数 n が存在するとき，f は周期的であるという．また，$x \in \Sigma_g$ が周期的写像 f の重複点であるとは，f の周期 n よりも小さい自然数 k が存在し，$f^k(x) = x$ となることである．ここで，f の重複点全体の集合を M_f とおき，$\pi_f : \Sigma \to \Sigma/\langle f \rangle$ を n 重分岐被覆写像とする．$B_f := \pi(M_f)$ を f の分岐集合と呼ぶ．$b_i \in B_f$ に対し，$p_i \in M_f$ を任意に一つ固定する．p_i に置ける π_f の分岐指数を λ_i とおく．σ_i $(1 \leq \sigma_i < \lambda_i)$ を p_i の近傍の境界への $f^{\frac{n}{\lambda_i}}$ の作用が $\frac{\sigma_i}{\lambda_i}2\pi$ であるように選ぶ．このとき $\frac{\sigma_i}{\lambda_i}$ を p_i を含む f の特異軌道の *valency* と呼び，$[\,g, n\,;\, \frac{\sigma_1}{\lambda_1} + \frac{\sigma_2}{\lambda_2} + \cdots + \frac{\sigma_s}{\lambda_s}\,]$ を f の *total valency* と呼ぶ．total valency は周期的写像類の共役類を完全に分類することが知られている．

3 $2g-2$ 点付きトーラス上の周期的写像とその作用の分類

以下，$g \geq 2$ とする．$\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}) \ltimes T^2$ の T^2 への作用から以下が分かる．

命題 3.1. $2g-2$ 点付きトーラス T^2_{2g-2} 上の有限巡回群の生成元の共役類は以下のいずれかの冪乗で尽くされる：

1. $[\,f_{1,1}\,] = [\,1, 6\,;\, \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\,]$,
2. $[\,f_{1,2}\,] = [\,1, 4\,;\, \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,]$,
3. $[\,f_{1,3}\,] = [\,1, \frac{2g-2}{\mathrm{lcm}(k, 2g-2)}\,;\, *\,]$.

以後の計算のために，分岐指数及び total valency に関する 2 つの主張を紹介する．

補題 3.2 (Harvey, ([1] 参照))**.** Σ_g 上の周期 n の周期的写像及び，f に対応する n 重分岐被覆写像 $\pi_f : \Sigma_g \to \Sigma_{g'}$ を考える．$(\,\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell\,)$ を π_f の各分岐点における分岐指数とし，$M = \mathrm{lcm}(\,\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell\,)$ とする．このとき，以下が成り立つ．

1. $g' = 0$ ならば，$M = n$,
2. $2 \mid M$ ならば，$q \mid M$ なる最大の 2 の冪 q に対し，$q \mid \lambda_i$ なる i の数は偶数である．

補題 3.3 (Nielsen, ([1] 参照))**.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} \frac{\sigma_1}{\lambda_i}$ は整数である．

f の Σ_g への持ち上げを $\tilde{f} \in \mathrm{Diff}_+(\Sigma_g)$ とおく．本稿では $[\,f\,] = [\,f_{1,2}\,]$ なる T^2 上の周期的写像 f を考える．特に，$G = \langle\, f\,\rangle$ の Σ_g への持ち上げ $\tilde{G}$ であって，$\tilde{f}$ で生成される巡回群の構成を行う．$\Sigma_g \to T^2_{2g-2}$ が二重分岐被覆写像であることから，$\tilde{f}$ の周期は 4 もしくは 8 であることが従う．以下，T^2 上の $2g-2$ 点を上記二重分岐被覆写像の分岐点と見做す．

f の T^2 への作用は，各分岐点への f の作用を分類することによって以下のように類別される．

1. g が奇数であって，かつ $M_f \cap B_\iota \neq \emptyset$,
2. g が奇数であって，かつ $M_f \cap B_\iota = \emptyset$,
3. g が偶数であって，かつ $\mathrm{Fix}(f) \cap B_\iota \neq \emptyset$,
4. g が偶数であって，かつ $\mathrm{Fix}(f) \cap B_\iota = \emptyset$.

また，それぞれに対応する $\Sigma_g \to \Sigma_g/\langle\,\tilde{f}\,\rangle$ の分岐指数 $(\,\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell\,)$ は以下で与えられる．

1. $(\,8, 8, 4, 2, \cdots, 2\,)$ $(\,\ell = \frac{g+3}{2}\,)$,
2. $(\,4, 4, 2, \cdots, 2\,)$ $(\,\ell = \frac{g+5}{2}\,)$,
3. $(\,8, 8, 2, \cdots, 2\,)$ $(\,\ell = \frac{g}{2} + 2\,)$,
4. $(\,4, 4, 4, 2, \cdots, 2\,)$ $(\,\ell = \frac{g}{2} + 2\,)$.

ここで，Riemann-Hurwitz の公式と補題 3.2 の 2 を用いることで, 上記 2 の場合は種数が 2 以上の場合では起こり得ないことが分かる．また，補題 3.2 の 2 から上記 4 は起こり得ないことが分かる．

4　f の持ち上げの構成

補題 3.3 を用いて計算することで，$\tilde{f}$ の total valency が決定される．

定理 4.1. $\tilde{G}$ の生成元の共役類は以下のいずれかで与えられる：

1. $[\,g, 8\,;\ \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\,],\ (g \equiv 1 \mod 4,\ \lambda=\frac{g-3}{2})$,
2. $[\,g, 8\,;\ \frac{1}{8}+\frac{5}{8}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\,],\ (g \equiv 1 \mod 4,\ \lambda=\frac{g-3}{2})$,
3. $[\,g, 8\,;\ \frac{1}{8}+\frac{5}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\,],\ (g \equiv 3 \mod 4,\ \lambda=\frac{g-3}{2})$,
4. $[\,g, 8\,;\ \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\,],\ (g \equiv 3 \mod 4,\ \lambda=\frac{g-3}{2})$,
5. $[\,g, 8\,;\ \frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\,],\ (g \equiv 2 \mod 4,\ \lambda=\frac{g}{2})$,
6. $[\,g, 8\,;\ \frac{1}{8}+\frac{7}{8}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\,],\ (g \equiv 0 \mod 4,\ \lambda=\frac{g}{2})$.

(ここで，λ は valency が $\frac{1}{2}$ である特異軌道の数である．)

Σ_g 上の $\tilde{G}$-作用を具体的に構成する．そのために，以下のように total valency 同士の和を定義する．

$$[\,g, n\,;\ \cdots+\frac{\theta_p}{\lambda_p}+\cdots\,]\,\#_{\frac{\theta_p}{\lambda_p}}\,[\,h, n\,;\ \cdots+\frac{\lambda_p-\theta_p}{\lambda_p}+\cdots\,] = [\,g+h+\frac{n}{\lambda_p}-1, n\,;\ \cdots+\check{\frac{\theta_p}{\lambda_p}}+\cdots+\check{\frac{\lambda_p-\theta_p}{\lambda_p}}+\cdots\,]$$

上記定義は，Σ_g 上の valency が $\frac{\sigma_p}{\lambda_p}$ である特異軌道上の各重複点の円盤近傍及び，Σ_h 上の valency が $\frac{\lambda_p-\sigma_p}{\lambda_p}$ である特異軌道上の各重複点の円盤近傍を切除し，それらの境界を貼り合せることで，Σ_g と Σ_h の巡回群作用で不変な連結和を取ることに対応する．

f を定理 4.1 内のいずれかの total valency を持つ Σ_g 上の周期的写像とする $\mathrm{Op}: [\,f\,] \mapsto \mathrm{Op}([\,f\,])$ を $\mathrm{Op}([\,f\,]) = [\,f\,]\,\#_{\frac{1}{8}}\,[4, 8 \mid \frac{1}{8}+\frac{7}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,]$ で定める．

定理 4.2. f は以下のいずれかの周期的写像に Op を有限回施すことで得られる:

$[5, 8\,;\ \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\,]$,　$[5, 8\,;\ \frac{1}{8}+\frac{5}{8}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\,]$,　$[3, 8\,;\ \frac{1}{8}+\frac{5}{8}+\frac{1}{4}\,]$,
$[3, 8\,;\ \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\,]$,　$[2, 8\,;\ \frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\,]$,　$[4, 8\,;\ \frac{1}{8}+\frac{7}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,]$.

他の持ち上げに関しても，同様の手法で得ることが出来る．

参考文献

[1] T. Ashikaga and M. Ishizaka, “Classification of degenerations of curves of genus three via Matsumoto-Montesinos’ theorem”, Tohoku Math. J. **54** (2002), 195–226.

[2] T. Ghaswala and R.R. Winarski, “Lifting homeomorphisms and cyclic branched covers of spheres”, Mishigan Math. J. **66** (2017), 885–890.

[3] S. Hirose, “Presentations of periodic maps on oriented closed surfaces of genera up to 4”, Osaka J. Math. **47** (2010), 385–421.

[4] M. Ishizaka, “Presentation of hyperelliptic periodic monodromies and splitting families”, Rev. Mat. Complut. **20**(2) (2007), 483–495.

[5] G. Nakamura and T. Nakanishi, “Generation of finite subgroups of the mapping class group of genus 2 surface by Dehn twists”, J. Pure. Appl. Algebra, **222** (2018), 3585–3594.