

Loop homology algebra of discrete torsion

東京大学大学院数理科学研究科

浅尾泰彦 (Yasuhiko ASAO)

概要

Chas-Sullivan によるストリングトポロジーのオービフォールド (有限群商) への拡張として、Lupercio-Uribe-Xicoténcatl は有向閉多様体のボレル構成の自由ループ空間のホモロジーに次数付き可換結合的な積構造 (ループ積) を構成し、それがオービフォールド不変量であることを示した。しかし一般に自由ループ空間のホモロジーを計算することは難しく、この積構造もまた非常に計算例に乏しい。講演者は群の作用がホモトピー的に自明な場合に考察を深めることで計算可能な例を大幅に増やすことができた。またそれらの積構造は有限群のあるコホモロジー類を用いて記述されることを示し、群コホモロジーの計算によってホモロジーの積構造を計算することができた。この積構造は純代数的には R.Kauffman による “algebra of discrete torsion” として考察されている。

本稿では分野の雰囲気を経験者かでも知っていただけるように入門的な解説をするよう努めた。ループ積の定義と、オービフォールドに関する簡単な説明が書いてある。その後に少しだけ上の結果の説明をする。

1 導入

1.1 ストリングトポロジー

$\text{Map}(S^1, X)$ を X の自由ループ空間と呼び LX と書く。ここで X は位相空間であり $\text{Map}(S^1, X)$ はコンパクト開位相により位相空間とみなす。Chas-Sullivan [4] は有向閉多様体 M に対して、ホモロジー群 $H_*(LM)$ にループ積と呼ばれる積構造が存在することを発見した。ループ積の構成の基本的なアイデアは多様体の交叉積と、始点の一致した2つのループを繋ぐ操作を同時に行うというものである。ここでは Cohen-Jones [3] によるホモトピー論的なループ積の定義を紹介する。

M を d 次元有向閉多様体とし $ev_0 : LM \rightarrow M; l \mapsto l(0)$ とする。また $\Delta : M \rightarrow M \times M$ を対角埋め込みとする。次の pull-back 図式

$$\begin{array}{ccc} LM \times_M LM & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & LM \times LM \\ \downarrow ev_0 & & \downarrow ev_0 \times ev_0 \\ M & \xrightarrow{\Delta} & M \times M \end{array} \quad (1)$$

を考える。多様体の交叉積は Δ の誘導する「逆向きの写像」 $\Delta_*^! : H_*(M \times M) \rightarrow H_{*-d}(M)$ (Δ の法バンドルに対する Pontrjagin-Thom 構成と Thom 同型を合成して得られる) によって定義される。したがってこれと両立するような $\tilde{\Delta}_*^! : H_*(LM \times LM) \rightarrow H_{*-d}(LM)$ を構成しループを繋ぐ写像

$$\gamma : LM \times_M LM \rightarrow LM;$$

$$\gamma(l_1, l_2)(t) = \begin{cases} l_1(2t) & (0 \leq t \leq 1/2), \\ l_2(2t - 1) & (1/2 \leq t \leq 1). \end{cases}$$

と合成するというのがアイディアである。つまり

$$\circ : H_p(LM) \otimes H_q(LM) \xrightarrow{\times} H_{p+q}(LM \times LM) \xrightarrow{\tilde{\Delta}_*^!} H_{p+q-d}(LM \times_M LM) \xrightarrow{\gamma_*} H_{p+q-d}(LM). \quad (2)$$

で定義される。 $\tilde{\Delta}_*^!$ は次のように構成される。

$i : A \rightarrow X$ を cofibration としコホモロジー類 $u \in H^n(X, X - A)$ を 1 つ固定しておく。 A の近傍 $A \subset U \subset X$ に対して $i_{U*}^! : H_*(X) \rightarrow H_{*-n}(U)$ を

$$i_{U*}^! : H_*(X) \rightarrow H_*(X, X - A) \xrightarrow{\cong} H_*(U, U - A) \xrightarrow{\cap u} H_{*-n}(U) \quad (3)$$

で定義する。ただし 2 番目の同型写像は切除同型である。 $\{i_{U*}^!\}_{A \subset U}$ は U の包含に関して逆系をなす。

$i_*^! : H_*(X) \rightarrow H_{*-n}(A)$ を

$$i_*^! := \varprojlim_{A \subset U} i_{U*}^! : H_*(X) \rightarrow \varprojlim_{A \subset U} H_{*-n}(U) \cong H_{*-n}(A) \quad (4)$$

で定義する。ただし最後の同型は i が cofibration であることから従う。 $(X, A) = (M \times M, M)$ とし $u \in H^d(M \times M, M \times M - M)$ を M の Thom 類とすることで $\tilde{\Delta}_*^!$ が構成できる。

$i_*^!$ に関して次の自然性が成立する。

Lemma 1.1. $i : A \rightarrow X$ を cofibration, $f : \hat{X} \rightarrow X$ を fibration とし、コホモロジー類 $u \in H^n(X, X - A)$ を固定する。このとき次の pull-back 図式

$$\begin{array}{ccc} \hat{A} & \xrightarrow{\hat{i}} & \hat{X} \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{i} & X \end{array} \quad (5)$$

に関して $f'_* \circ \hat{i}_*^! = i_*^! \circ f_*$ が成り立つ。ただし $i_*^!, \hat{i}_*^!$ はそれぞれ $u \in H^n(X, X - A)$, $f^*u \in H^n(\hat{X}, \hat{X} - \hat{A})$ について上のように構成した準同型である。

Lemma 1.2. 次の可換図式

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{j} & Y \\ \downarrow h & & \downarrow h' \\ A & \xrightarrow{i} & X \end{array} \quad (6)$$

において i, j は cofibration とする。コホモロジー類 $u \in H^n(X, X - A)$ と $h'^*u \in H^n(Y, Y - B)$ に対して $h_* \circ j_*^! = i_*^! \circ h'_*$ が成立する。

これらの自然性から上で定義したループ積の結合性や次数付き可換性が証明できる。また以下では $H_*(LM)$ を環として扱う際には次数の都合により $\mathbb{H}_*(LM) := H_{*+d}(LM)$ という記号を用いる。

1.2 計算例

位相空間 X の自由ループ空間 LX の構造は非常に複雑でそのホモロジー群が計算されている例は少ないが、以下に挙げるものはループ積構造も含めてホモロジー群が計算されている。

- コンパクトリー群 G に対して群同型 $LG \cong G \times \Omega G$ が成り立ち、環同型 $H_*(LG) \cong H_*(G) \otimes H_*(\Omega G)$ が成り立つ。ただし ΩG は単位元を基点とする G の基点付きループ空間を表し、 $H_*(\Omega G)$ は Pontrjagin 環を表す。
- Cohen-Jones-Yan[2] は Serre スペクトル系列を用いて S^n や CP^n の場合に具体的にその積構造を記述した。例えば奇数次元球面に対しては $H_*(LS^{2n+1}) \cong H_*(S^{2n+1}) \otimes H_*(\Omega S^{2n+1})$ である。
- Tamanoi [7] は複素 Stiefel 多様体のループホモロジー環構造を決定している。
- aspherical 多様体 $K(\pi, 1)$ に対して、ホモトピー同値 $LK(\pi, 1)\pi \simeq \coprod_{[g]} BC(g)$ が成立する。ここで右辺は共役類全体に関する g の中心 $C(g)$ の分類空間の直和である。また Hochschild コホモロジーとの環同型 $HH^*(\mathbb{Z}\pi; \mathbb{Z}\pi) \cong H_*(LK(\pi, 1))$ も成立する ([8])。

1.3 オービフォールド

多様体が「局所的に $\mathbb{R}^n$ と同相な T_2 空間」として定義されるように、オービフォールドは「局所的に有限群商 $\mathbb{R}^n/G$ と同相な T_2 空間」として定義される幾何学的対象である。（「」をつけたのはもちろんこれだけでは定義されずいくつかの座標間の両立性を満たさなければいけないからであるが、それはここで述べるにははんざつで入門の目的を見失う恐れがあるため触れない。また有限群 G は座標ごとに異なっても良い。）特に多様体はオービフォールドである。一方でオービフォールドを「固有かつエタールなリー亜群」として定義することができる。（「固有かつエタール」という条件には先と同じ理由で触れない。）リー亜群とは亜群であってその構造写像が全て滑らか（さらに一部は沈め込み）であるものである。つまり亜群を圏と見たときに対象と射の集合がそれぞれすでに多様体の構造をもっている。この点においてもはやこの定義ではオービフォールドを多様体の一般化と呼ぶことに抵抗があるが、この視点はその圏論的な特性によって要所で議論がしやすくなるという利点がある。

本稿では以下で説明する有限群商オービフォールドを扱う。 M を C^∞ 多様体とし G を M に滑らかに作用する有限群とする。このとき有限群商オービフォールド $[M/G]$ とは $\text{Mor} = M \times G, \text{Ob} = M$ を持つ亜群であり、射 (m, g) は m から mg に伸びる。関手 $F: [M/G] \rightarrow [N/K]$ はそれが「滑らかな圏同値」であるときに同値と呼ばれる。つまり「本質的全射かつ忠実充満」に倣った次の条件

- F は全射準同型 $\rho: G \rightarrow K$ と ρ 同変な全射局所可微分同相写像 $M \rightarrow N$ から構成されており、

- 次の図式は pullback である。

$$\begin{array}{ccc} M \times G & \xrightarrow{f \times \rho} & N \times K \\ s \times t \downarrow & & \downarrow s \times t \\ M \times M & \xrightarrow{f \times f} & N \times N \end{array} \quad (7)$$

を満たすときである。「本質的全射かつ忠実充満なら圏同値」という主張は逆写像が滑らかと限らないためリー重群については成り立たない。そのため次のような同値関係を考える。つまり二つの関手 $X \leftarrow Y \rightarrow Z$ が同値のとき、 X と Z は森田同値という。これが同値関係であることが確かめられる。もちろん最初に紹介した定義に則ってオービフォールドの同型を定義することもできる（つまり T_2 空間の間の連続写像であって座標間では同変滑らかなものを射とする圏での同型）。さらにリー重群としてのオービフォールド X から最初の定義のオービフォールド $|X|$ を構成することができ、 X と Z が森田同値であれば $|X|$ と $|Z|$ はこの意味で同型であることも知られている。したがってどちらの定義を用いても大方支障はないが、今見た通りリー重群を用いれば「座標」という概念を経由せずに議論が可能である。

$[M/G]$ に対して n 個の合成可能な射の空間を X_n とする。通常の圏の単体的ナーブと同様に単体的位相空間 $X_\bullet$ が得られ、その幾何的实现 (Top での coend) は $[M/G]$ の分類空間と呼ばれる。分類空間のホモトピー型は森田同値不変量であることが知られている。また $[M/G]$ の分類空間は Borel 構成 $M \times_G EG$ とホモトピー同値である。

オービフォールドに関しては [1] が詳しく [6] が入門的である。

1.4 オービフォールドストリングトポロジー

自由ループ空間のループ積は有向閉多様体のみならずより広い空間のクラスに拡張されている。以下で Lupercio-Urbe-Xicoténcatl [5] によるオービフォールドへのループ積の拡張を紹介する。

M を d 次元有向閉多様体とし、 G を M に滑らかに右から作用する有限群とする。 G の元 g に対して空間 $P_g M := \{\sigma : [0, 1] \rightarrow M \mid \sigma(1) = \sigma(0)g\}$ をパス空間 $\text{Map}([0, 1], M)$ の部分空間として定義する。 $P_G M = \coprod_{g \in G} P_g M$ とすると有限群 G は空間 $P_G M$ に $(\sigma, g)h = (\sigma h, h^{-1}gh)$ によって連続に作用する。この作用に関する Borel 構成 $P_G M \times_G EG$ は G の M への作用に関する Borel 構成 $M \times_G EG$ の自由ループ空間と弱ホモトピー同値になる。つまり $P_G M \times_G EG \simeq L(M \times_G EG)$ である。オービフォールド $[M/G]$ に対して Borel 構成 $M \times_G EG$ のホモトピー型はオービフォールド不変量であることに注意する。

オービフォールドループ積を定義するためにホモロジー群 $H_*(P_G M)$ 上に積 $\bullet : H_p(P_G M) \otimes H_q(P_G M) \rightarrow H_{p+q-d}(P_G M)$ を定義する。 G の元 g, h に対して pull-back 図式

$$\begin{array}{ccc} P_g M \times_M P_h M & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & P_g M \times P_h M \\ \downarrow \text{ev}_1 \times_M \text{ev}_0 & & \downarrow \text{ev}_1 \times \text{ev}_0 \\ M & \xrightarrow{\Delta} & M \times M \end{array} \quad (8)$$

を考える。 $\tilde{\Delta}_* : H_*(P_g M \times P_h M) \rightarrow H_{*-d}(P_g M \times_M P_h M)$ が既に説明した方法で構成できるので、連続

写像 $\gamma : P_g M \times_M P_h M \rightarrow P_{gh} M$;

$$\gamma(\sigma_g, \sigma_h)(t) = \begin{cases} \sigma_g(2t) & (0 \leq t \leq 1/2), \\ \sigma_h(2t-1) & (1/2 \leq t \leq 1). \end{cases}$$

と合成することで準同型 $H_p(P_g M) \otimes H_q(P_h M) \rightarrow H_{p+q-d}(P_{gh} M)$ が得られる。これらの直和を $\bullet : H_p(P_G M) \otimes H_q(P_G M) \rightarrow H_{p+q-d}(P_G M)$ と定義する。

次に被覆の transfer map について説明する。 $\pi : X \rightarrow Y$ を正則 G 被覆写像とする。このとき準同型 $\theta_* : H_*(Y; R) \rightarrow H_*(X; R)$ を $\theta_*(\Delta) := \sum_{\text{lift of } \Delta} \tilde{\Delta}$ で定義し、被覆写像 π の transfer map という。係数環 R の標数が G の位数と互いに素の場合は θ_* は単射となりその像は G 作用の不変部分空間 $H_*(X; R)^G$ と一致する。

オービフォールドループ積は積 $\bullet$ と transfer map を用いて次のように定義される。

$$\circ : H_p(P_G M \times_G EG) \otimes H_q(P_G M \times_G EG) \xrightarrow{\theta_* \otimes \theta_*} H_p(P_G M) \otimes H_q(P_G M) \xrightarrow{\bullet} H_{p+q-d}(P_G M) \xrightarrow{P_*} H_{p+q-d}(P_G M \times_G EG) \quad (9)$$

ここで $p : P_G M \times EG \rightarrow P_G M \times_G EG$ は G の作用による商写像、特に被覆写像である。また θ_* は被覆写像 p の transfer map である。このようにして定義されたオービフォールドループ積は結合性と次数付き可換性を満たし、特に G の作用が固定点自由の時は通常のループ積と一致する。またオービフォールド不変量であることも知られている ([5])。

2 主結果

M を滑らかな有向閉多様体、 $\mathcal{G}$ を M に作用する弧状連結位相群とする。 G をその有限部分群とし、 M には滑らかに作用しているとする。主結果は次の二つのパートに分けられる。

- (1) 組 $(\mathcal{G}, G)$ に対するある条件の下で加群としての同型 $H_*(L[M/G]; k) \cong H_*(LM; k) \otimes Z(k[G])$ を示した。
- (2) 上の同型はループ積に関する代数の同型であり、右辺の代数構造はあるコホモロジー類 $c \in H^2(G; A)$ を用いて書けることを示した。また具体的な空間に対して計算を行った。

2.1 (1) について

$\mathcal{G}$ 上の道の族 $\{\theta_g\}_{g \in G}$ で、 $\begin{cases} \theta_g(0) = e, \\ \theta_g(1) = g \end{cases}$ を満たすものを 1 つ固定する。このとき各 $g \in G$ に対して $\tau_g(\gamma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma(0)\theta_g(2-2t) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$ で定義されるホモトピー同値写像 $\tau_g : P_g M \rightarrow LM$ を得る。直和を取ることでホモトピー同値写像 $\tau_G : P_G M \rightarrow LM \times G$ を得るが、これが (ある条件のもとで) ホモトピーの差を除いて G 同変であることを示すことで次を証明した。

Theorem 2.1. $|G|$ と $|(\pi_1 \mathcal{G})^{\text{tor}}|$ が互いに素のとき、上の写像は加群の同型 $H_*(L[M/G]; k) \cong$

$H_*(P_G M; k)^G \cong H_*(LM; k) \otimes Z(k[G])$ を誘導する。ここで 1 つ目の同型は被覆のトランスファーによるものであり、 Z は環の中心を表す。

2.2 (2) について

上の定理の同型写像が誘導する積構造を調べる。写像 $c : G \times G \rightarrow \pi_1 \mathcal{G}$ を $c(g, h) = \theta_h * \theta_g h * \theta_{gh}^{-1}$ で定める。ここで位相群の基本群は必ずアーベル群であることに注意する。 c は 2 コサイクルであることが確認できる。一方で合成写像 $\pi_1 \mathcal{G} \rightarrow \pi_1 \text{aut}_1 M \rightarrow H_{\dim M}(LM; \mathbb{Z})$ を考える ($\text{aut}_1 M$ は自己写像空間の Id 連結成分)。ここで 1 つ目の写像は作用写像 $\mathcal{G} \rightarrow \text{aut}_1 M$ が誘導する写像であり、2 つ目は $\text{aut}_1 M \subset [M, LM] \ni l \mapsto l_*[M]$ で定義する ($[M]$ は基本類)。この写像は像 ($=: A$) の上でループ積に関して群準同型である。したがって c を合成することで 2 コサイクルを得る。これも同じ記号 $c \in Z^2(G; A)$ で表す。すると $x, y \in H_*(LM; k), g, h \in G$ に対して

$$(x \otimes g) \circ (y \otimes h) := xyc(g, h) \otimes gh \quad (10)$$

は $H_*(LM; k) \otimes Z(k[G])$ 上の積を定めることが確認できる。

Theorem 2.2. 定理 (2.1) の同型は積構造 (10) に関して同型であり、その同型類は道の族 $\{\theta_g\}$ の取り方に依らない。

したがって例えば $\text{rank } H_{\dim M}(LM; k) = 1$ のとき $H^2(G; A) = 0$ なので積構造は常に自明になる。

参考文献

- [1] Alejandro Adem, Johann Leida, and Yongbin Ruan. Orbifolds and stringy topology , volume 171 of Cambridge Tracts in Mathematics . Cambridge University Press, Cambridge, 2007
- [2] R. L. Cohen, J. D. S. Jones, J. Yan, The loop homology algebra of spheres and projective spaces. Categorical decomposition techniques in algebraic topology , 77-92, Progr. Math., 215, Birkhäuser, Basel, 2004.
- [3] R. L. Cohen, J. D. S. Jones, A homotopy theoretic realization of string topology. *Math. Ann.* **324** (2002), no. 4, 773-798.
- [4] M. Chas, D. Sullivan, String Topology, preprint, arxiv:math.GT/9911159.
- [5] E. Lupercio, B. Uribe, and M. A. Xicoténcatl, Orbifold string topology, *Geom. Topol.* **12**(4) (2008), 2203-2247.
- [6] I. Moerdijk, Orbifolds as Groupoids: an introduction, preprint(2002), arXiv:math/020310
- [7] H. Tamarai, Batalin-Vilkovisky Lie algebra structure on the loop homology of complex Stiefel manifolds, *Int. Math. Res. Not.* 2006, Art. ID 97193, **23** pp.55-48.
- [8] D. Vaintrob, The string topology BV algebra, Hochschild cohomology and the Goldman bracket on surfaces, preprint(2007), arXiv:math/0702859