

# ミューテーション列に付随する行列式の恒等式

東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系 数理・計算科学コース  
水野勇磨 (Yuma Mizuno)

## 1 導入

クラスター代数の理論は Fomin と Zelevinsky によって 2000 年頃に導入された [2]. 彼らのもともとの動機は全正値性現象および標準基底について理解することであったのだが, その当初の目的を超えてクラスター代数は, クイバーの表現論, Teichmüller理論, Donaldson–Thomas 理論, ミラー対称性などといった幅広い分野と関連することが明らかになっていった. クラスター代数においてミューテーションと呼ばれる重要な操作があるのだが, これが多くの数学の分野に興味深い形で現れるのである.

このようにクラスター代数にまつわる話題は数多くあるのだが, そのうちのひとつに, Rogers のダイログ関数という特殊関数との関係がある. 簡単に言うと, クラスター代数におけるある種の関係式から, Rogers のダイログ関数の関数等式が導かれるというものである. このクラスター代数と Rogers のダイログ関数との関係は, 共形場理論における中心電化と呼ばれる値を Rogers のダイログ関数の特殊値を用いて表すという話とも関係していて興味深い.

このレポートでは, 上記の Rogers のダイログ関数の関数等式の類似として, クラスター代数における関係式からそれに付随する行列式の等式が導かれるということを紹介する. ここに登場する行列式は, 三次元トポロジーにおける Reidemeister トーションやアフィン Lie 代数の表現論における漸近的次元に関連すると予想される興味深い値になっている.

本文の流れは次のようである. 2 節でミューテーション (クイバーのミューテーションと  $Y$  種子のミューテーションという二種類のミューテーションがある) について復習して, 3 節でクラスター代数における関係式から Rogers のダイログ関数の関数等式が得られるということを紹介したのち, 4 節で行列式の等式について解説する.

## 2 クイバーのミューテーションと $Y$ 種子のミューテーション

正の整数  $n$  を固定する. クイバーとは, 頂点が  $\{1, \dots, n\}$  の有向グラフのこととする. ただし, クイバーは次の形は含まないこととする.



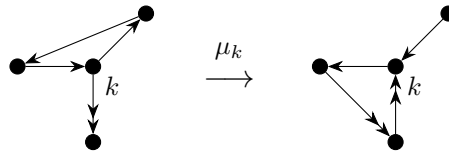
クイバー  $Q$  に対して,  $Q_{ij}$  で頂点  $i$  から頂点  $j$  への辺の本数を表す.

**Definition 2.1.**  $Q$  をクイバーとして,  $k$  をその頂点とする. 頂点  $k$  におけるクイバーのミューテーションと

は、以下で定義されるような、クイバー  $Q$  を別のクイバー  $\mu_k(Q)$  に変形する操作のことをいう。

1. 各パス  $i \rightarrow k \rightarrow j$  について新しい矢印  $i \rightarrow j$  を加える。
2. 頂点  $k$  とつながっている矢印の向きを反転させる。
3. 長さ 2 のサイクル  $\bullet \rightleftarrows \bullet$  が生じていたら、それらをすべて消去する。

例えば、

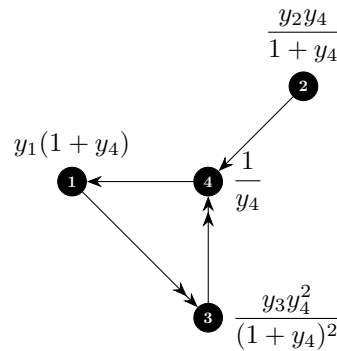


がクイバーのミューテーションである。

次は、 $Y$  種子のミューテーションを定義する。可換な変数  $y_1, \dots, y_n$  を用意する。組  $(Q, Y)$  が  $Y$  種子であるとは、

- $Q$  はクイバー
- $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  は  $Q$  の各頂点に割り当てられた  $y_1, \dots, y_n$  の subtraction-free な有理関数

のときをいう。例えば、



が  $Y$  種子である。

**Definition 2.2.**  $(Q, Y)$  を  $Y$  種子,  $k$  を  $Q$  の頂点とする。頂点  $k$  における  $Y$  種子のミューテーションとは、 $(Q, Y)$  を新しい  $Y$  種子  $\mu_k(Q, Y) = (\tilde{Q}, \tilde{Y})$  に変形する操作のことである。ここで、 $\tilde{Q} := \mu_k(Q)$  は先ほど定義したクイバーのミューテーションであり、 $\tilde{Y}$  は

$$\tilde{Y}_i := \begin{cases} Y_i^{-1} & \text{if } i = k, \\ Y_i \cdot z_+^{Q_{ki}} & \text{if } i \neq k, Q_{ki} \geq 0, \\ Y_i \cdot z_-^{Q_{ki}} & \text{if } i \neq k, Q_{ik} \geq 0, \end{cases}$$

で定義される。ただし、

$$z_+ = \frac{Y_k}{1 + Y_k}, \quad z_- = \frac{1}{1 + Y_k}$$

である。

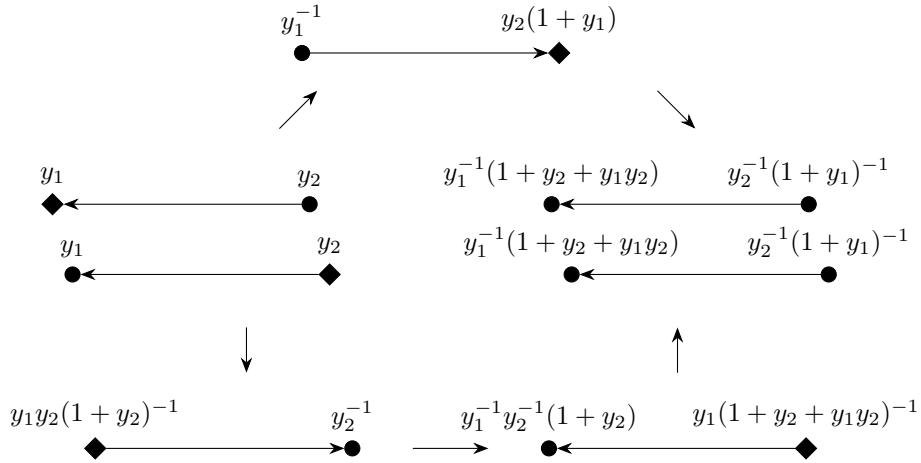


図1 Y 種子のミューテーションの 2-3 関係式. ダイヤモンドの頂点はミューテーションが行われる頂点を意味する.

$Q$  をクイバーとして,  $m = (m_1, \dots, m_T)$  を  $Q$  の頂点の列,  $\nu$  を  $Q$  の頂点の置換とする. このとき,  $Q(0) := Q$  と  $Y(0) := (y_1, \dots, y_n)$  から始まる Y 種子の列

$$(Q(0), Y(0)) \xrightarrow{\mu_{m_1}} (Q(1), Y(1)) \xrightarrow{\mu_{m_2}} \dots \xrightarrow{\mu_{m_T}} (Q(T), Y(T)) \xrightarrow{\nu} (\nu(Q(T)), \nu(Y(T))) \quad (1)$$

が定まる. ただし, 置換は Y 種子に  $\nu(Q)_{ij} = Q_{\nu^{-1}(i)\mu^{-1}(j)}$  および  $\nu(Y)_i = Y_{\nu^{-1}(i)}$  と作用する. 最初と最後のクイバーが等しい, すなわち  $\nu(Q(T)) = Q$  のとき, 三つ組  $\gamma = (Q, m, \nu)$  を ( $Q$  上の) ミューテーション・ループという. また,  $T$  をミューテーション・ループの長さということにする.

ミューテーション・ループにおいては  $\nu(Q(T)) = Q$  であるが,  $\nu(Y(T)) = y$  となるとは一般には限らない. そこで有理関数  $\nu(Y(T))$  を  $f_\gamma(y)$  と書くことにする.

クイバー  $Q$  上の二つの異なるミューテーション・ループ  $\gamma$  および  $\gamma'$  をとってきたときに,  $f_\gamma(y) = f_{\gamma'}(y)$  となることがある. その中で最も単純な (そして最も重要と考えられている) 非自明な例は 2-3 関係式と呼ばれるものである. これは

$$Q = \bullet \xleftarrow{1} \bullet \xrightarrow{2} \bullet$$

上のミューテーション・ループ

$$\gamma = (Q, (1, 2), \text{id}), \quad (2)$$

$$\gamma' = (Q, (2, 1, 1), (1 \ 2)) \quad (3)$$

について,  $f_\gamma(y) = f_{\gamma'}(y)$  が成り立つというものである (図 1).

一般に, クイバー  $Q$  上のミューテーション・ループ  $\gamma$  および  $\gamma'$  が  $f_\gamma(y) = f_{\gamma'}(y)$  を満たすとき,  $\gamma$  と  $\gamma'$  は同値であるといい,  $\gamma \sim \gamma'$  と書くことにする.

### 3 クラスター代数と Rogers のダイログ関数の等式

Rogers のダイログ関数とは, 次で定義される関数である.

$$L(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x \left\{ \frac{\log(1-y)}{y} + \frac{\log y}{1-y} \right\}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Rogers のダイログ関数が持つ最も重要な性質は、以下のペンタゴン関係式 (もしくは 2-3 関係式ともいう) である:

$$L(x) + L(y) = L\left(\frac{y(1-x)}{1-xy}\right) + L(xy) + L\left(\frac{x(1-y)}{1-xy}\right) \quad (4)$$

Rogers のダイログ関数のペンタゴン関係式は古典的に知られていたものであるのだが、驚くことに、このペンタゴン関係式は、前節で述べた  $Y$  種子の 2-3 関係式と関係している。ペンタゴン関係式は 2 つのダイログ関数の和が 3 つのダイログ関数の和と等しいというものであり、 $Y$  種子の 2-3 関係式は長さ 2 のミューテーション・ループと長さ 3 のミューテーション・ループが同値であるというものであるが、ここで 2 と 3 という数字がどちらにも表れていることは偶然ではない。この関係をもう少し詳しく見てみることにする。まず、ミューテーション・ループに対して、

$$z_+(t) = \frac{Y_{m_t}}{1 + Y_{m_t}} \quad (5)$$

という有理関数を考える。ここで、 $Y_{m_t}$  は  $Y_{m_t}(t-1)$  の略記であり、(1) で定まる。ミューテーション・ループ  $\gamma, \gamma'$  に対応する  $z_+ = (z_+(1), \dots, z_+(T))$  をそれぞれ  $z_+, z'_+$  と書くことにする。すると、図 1 の計算より

$$z_+ = \left( \frac{y_1}{1+y_1}, \frac{y_2(1+y_1)}{1+y_2+y_1y_2} \right),$$

$$z'_+ = \left( \frac{y_2}{1+y_2}, \frac{y_1y_2}{1+y_2+y_1y_2}, \frac{y_1}{(1+y_1)(1+y_2)} \right)$$

を得る。ここで、

$$x = \frac{y_1}{1+y_1}, \quad y = \frac{y_2(1+y_1)}{1+y_2+y_1y_2}$$

とおくと、Rogers のダイログ関数のペンタゴン関係式の右辺に現れる引数は

$$\frac{y(1-x)}{1-xy} = \frac{y_2}{1+y_2},$$

$$xy = \frac{y_1y_2}{1+y_2+y_1y_2},$$

$$\frac{x(1-y)}{1-xy} = \frac{y_1}{(1+y_1)(1+y_2)}$$

となる。これらはまさに  $z'_+$  の成分そのものになっている。すなわち、Rogers のダイログ関数のペンタゴン関係式は

$$L(z_+(1)) + L(z_+(2)) = L(z'_+(1)) + L(z'_+(2)) + L(z'_+(3))$$

と書き直すことができる。

より一般に、長さ  $T$  のミューテーション・ループと長さ  $T'$  のミューテーション・ループが同値なとき、

$$(T \text{ 個の Rogers ダイログ関数の和}) = (T' \text{ 個の Rogers ダイログ関数の和})$$

という形の等式が得られることが中西 [8] によって証明された。すなわち、クラスター代数における  $Y$  種子のミューテーションの間の関係式から、Rogers ダイログ関数の関数等式が得られるのである。

## 4 ミューテーション・ループに付随する行列式の等式

前節では、二つの同値なミューテーション・ループが与えられると、それに付随して Rogers ダイログ関数の等式が得られるという結果を紹介した。この節では、その結果の類似として、二つの同値なミューテーション・ループが与えられたときにそれに付随する行列式の等式が得られるという [6] の結果を紹介する。もう少し詳しくいうと、長さ  $T$  のミューテーション・ループと長さ  $T'$  のミューテーション・ループが同値なとき、 $T \times T$  行列の行列式と  $T' \times T'$  行列の行列式が等しいという等式が得られる。その例として、この節の最後では、 $Y$  種子の 2-3 関係式から得られる  $2 \times 2$  行列の行列式と  $3 \times 3$  行列の行列式の間の等式を書き下す。

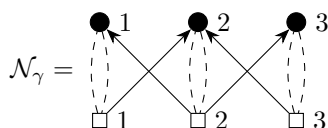
ミューテーション・ループ  $\gamma$  から、ミューテーション・ネットワークと呼ばれるグラフ  $\mathcal{N}_\gamma$  を定義することができる。ミューテーション・ネットワークはももとは場の理論の研究において導入された [9]。紙面の都合上完全な定義を書き下すことはできないが、 $\mathcal{N}_\gamma$  は次の性質を持つものである。

- 二種類の頂点を持つ (● と □)
- 三種類の辺を持つ (●-----□ と ●←——□ と ●——→□)
- ● はクイバーの頂点, □ はミューテーションを表す
- 三種類の辺は、クイバーの頂点が各ミューテーションとどのように関係しているかを表す

例えば  $\gamma$  をミューテーション列

$$\underline{1} \rightarrow 2 \rightarrow 3 \xrightarrow{\mu_1} 1 \leftarrow \underline{2} \rightarrow 3 \xrightarrow{\mu_2} 1 \rightarrow 2 \leftarrow \underline{3} \xrightarrow{\mu_3} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$$

としたときは、



となる。完全な定義については [6] を参照してほしい。

ミューテーション・ネットワークは二種類の頂点 (四角の頂点と黒丸の頂点) および三種類の辺 (点線と四角から黒丸への矢印と黒丸から四角への矢印) からなる。辺の種類が三つあることから、 $\gamma$  の隣接行列として三つの行列  $N_0, N_+$  および  $N_-$  を得る。上の例においては

$$N_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, N_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

**Definition 4.1.**  $A_+ = N_0 - N_+$  および  $A_- = N_0 - N_-$  で定まる行列  $A_+, A_-$  を  $\gamma$  の Neumann-Zagier 行列という。

ミューテーション・ループ  $\gamma = (Q, m, \nu)$  が fully mutated であるとは、集合  $\{\nu^n(m_t) \mid n \in \mathbb{Z}, 1 \leq t \leq T\}$  が  $\{1, \dots, n\}$  と一致するときをいう。これは大雑把にいうと、すべての頂点で少なくとも一度はミューテーションが行われるということである。例えば、 $Y$  種子の 2-3 関係式で出てきた  $\gamma, \gamma'$  はどちらも fully mutated

である. 長さが  $T$  の fully mutated なミューテーション・ループの Neumann-Zagier 行列は  $T \times T$  行列になる. 以下, ミューテーション・ループは fully mutated であると仮定する.

(5) で定義された有理関数  $z_+(t)$  に加えて, 有理関数  $z_-(t) = 1 - z_+(t)$  を定める. すなわち,

$$z_+(t) = \frac{Y_{m_t}}{1 + Y_{m_t}}, \quad z_-(t) = \frac{1}{1 + Y_{m_t}}$$

とする.  $Z_+$  および  $Z_-$  を  $T \times T$  の対角行列で,  $t$  番目の成分がそれぞれ  $z_+(t)$  および  $z_-(t)$  であるものとする. Neumann-Zagier 行列および行列  $Z_+, Z_-$  を用いて,  $\tau_\gamma(y)$  という量を

$$\tau_\gamma(y) = \det(A_+ Z_- + A_- Z_+)$$

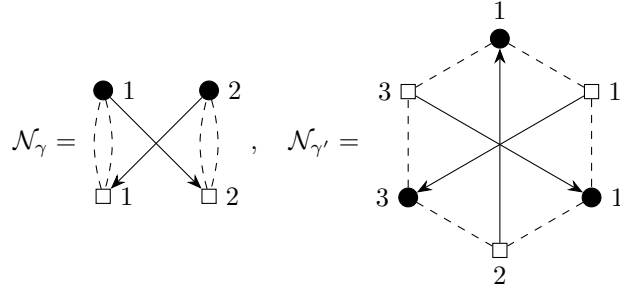
で定める.

**Theorem 4.2** (M [6]).  $Q$  をクイバーとする.  $Q$  上の fully mutated なミューテーション・ループが  $\gamma, \gamma'$  が  $\gamma \sim \gamma'$  を満たすとき,

$$\tau_\gamma(y) = \tau_{\gamma'}(y)$$

が成り立つ.

この定理を  $Y$  種子の 2-3 関係式に適用したときに得られる行列式の間の特等式について見てみることにする. (2) および (3) のミューテーション・ループ  $\gamma$  および  $\gamma'$  に対応するミューテーション・ネットワークは



で与えられる. これより,

$$\begin{aligned} \tau_\gamma(y) &= \det(A_+ Z_- + A_- Z_+) \\ &= \det \left( \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Z_- + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} Z_+ \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} 2 & -\frac{y_1}{1+y_1} \\ -\frac{y_2(1+y_1)}{1+y_2+y_1 y_2} & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \tau_{\gamma'}(y) &= \det \left( \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} Z_- + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} Z_+ \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+y_2}{1+y_2+y_1 y_2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1+y_2+y_1 y_2}{(1+y_1)(1+y_2)} \\ -\frac{1}{1+y_2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る. よって, 定理 4.2 より

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -\frac{y_1}{1+y_1} \\ -\frac{y_2(1+y_1)}{1+y_2+y_1y_2} & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+y_2}{1+y_2+y_1y_2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1+y_2+y_1y_2}{(1+y_1)(1+y_2)} \\ -\frac{1}{1+y_2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

という  $2 \times 2$  行列の行列式と  $3 \times 3$  行列の行列式の間の等式を得ることができる. いまの場合はもちろんこれらの値を直接計算することができて, 実際に両辺ともに

$$\frac{4 + 4y_2 + 3y_1y_2}{1 + y_2 + y_1y_2}$$

となることを確かめることができる.

最後に補足をする. このレポートでは行列式の間で等式について述べたが, 行列式そのものの値の意義については何も述べなかった. このことについては

- 長尾-寺嶋-山崎 [7] によるクラスター代数と三次元双曲幾何学との関係を用いると, 本レポートの行列式は Dimofte-Garoufalidis [1] による Reidemeister トーションの予想式のクラスター代数における類似物と見ることができる.
- ミューテーション・ループとして [3, 4] で用いられている  $(X_r, \ell)$  型の  $Y$  システムに付随するものと考えてきたときは, 本レポートの行列式の値は, アフィン Lie 代数の表現論における漸近的次元と関係するということが [5] で予想されている.

といった話題がある.

## 謝辞

講演の機会を作ってくださった第15回数学総合若手研究集会～数学の交叉点～の世話人の皆様に感謝を申し上げます. 本研究は科研費 (課題番号: JP18J22576) の助成を受けたものである.

## 参考文献

- [1] Tudor Dimofte and Stavros Garoufalidis, *The quantum content of the gluing equations*, Geom. Topol. **17** (2013), no. 3, 1253–1315.
- [2] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky, *Cluster algebras. I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 2, 497–529.
- [3] Rei Inoue, Osamu Iyama, Bernhard Keller, Atsuo Kuniba, and Tomoki Nakanishi, *Periodicities of  $T$ -systems and  $Y$ -systems, dilogarithm identities, and cluster algebras I: type  $B_r$* , Publ. Res. Inst. Math. Sci. **49** (2013), no. 1, 1–42.
- [4] ———, *Periodicities of  $T$ -systems and  $Y$ -systems, dilogarithm identities, and cluster algebras II: types  $C_r$ ,  $F_4$ , and  $G_2$* , Publ. Res. Inst. Math. Sci. **49** (2013), no. 1, 43–85.
- [5] Yuma Mizuno, *Exponents associated with  $y$ -systems and their relationship with  $q$ -series*, arXiv preprint arXiv:1812.05863 (2018).
- [6] ———, *Jacobian matrices of  $Y$ -seed mutations*, arXiv preprint arXiv:1805.00044 (2018).

- [7] Kentaro Nagao, Yuji Terashima, and Masahito Yamazaki, *Hyperbolic 3-manifolds and cluster algebras*, Nagoya Mathematical Journal (2017), 1–25.
- [8] Tomoki Nakanishi, *Periodicities in cluster algebras and dilogarithm identities*, Representations of algebras and related topics, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2011, pp. 407–443.
- [9] Yuji Terashima and Masahito Yamazaki,  $\mathcal{N} = 2$  theories from cluster algebras, PTEP **2014** (2014), no. 2, 023B01.