

トロピカル幾何学と Riemann-Roch の定理

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻

鷺見拳 (Ken SUMI)

1 導入

トロピカル幾何は、雑に言えばトロピカル半体 $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ 上の代数幾何である。トロピカル半体は集合 $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ に加法として $\max$ 、乗法として $+$ を入れたものであり、加法について半群でしかない。

トロピカル幾何は代数幾何とはかなり異なった構造をしているが、以下のような類似の結果が成り立つ。

- Curve counting (曲面上の正則曲線の数の対応) [5]
- コンパクトトロピカル曲線上の Riemann-Roch の定理 [1] [6] [3]
- トロピカル曲面に対する添加公式 [4]
- トロピカル曲面に対する Noether の公式 [2] [4]

今回はこの二つ目、Riemann-Roch の定理とその高次元化について説明する。コンパクトトロピカル曲面に対する Riemann-Roch の定理は次のものである。

定理 1. C をコンパクトトロピカル曲線、すなわち有限距離付きグラフとし、 g を C の種数とする。 C 上の因子 $D = \sum a_i p_i$ 、 $a_i \in \mathbb{Z}$ 、 $p_i \in C$ に対し、 $h^0(C, D)$ を次の条件を満たす最小の整数 k とする。

$$\text{ある次数 } k \text{ の有効因子 } E \text{ が存在して、} |D - E| = \emptyset$$

このとき次が成り立つ。

$$h^0(C, D) - h^0(C, K - D) = \deg D + 1 - g$$

ここで $K = \sum (\text{val}(p) - 2)p$ は C 上の標準因子である。 $\text{val}(p)$ は p から出る辺の本数であり、したがって p が本質的な頂点でないときは 2 である。

注意 2. D が定める線束 $L(D)$ の正則切断の集合 $H^0(C, L(D))$ はベクトル空間にはならないが自然に多面体複体となる。したがって位相的にその次元を考えることが可能ではあるが、一般にはその次元は上で現れた h^0 とは異なることもある。ここが古典的な場合との大きな違いの一つである。

Riemann-Roch の公式の高次元化がトロピカル幾何においても存在し成り立つのかというのは自然な疑問である。今回はその高次元化をトロピカルアーベル多様体に対して調べた結果を紹介する。

2 基本的な概念

3 トロピカル多様体、正則関数

定義 3. $\mathbb{T}^n$ 上のトロピカル多項式とは、通常の変数 $x_1, \dots, x_n$ の多項式の演算をトロピカルなものに変えた関数である。すなわち $\mathbb{T}^n$ 上の関数であって、ある有限集合 $S \subset (\mathbb{Z}^n)^*$ とその各元 $n \in S$ に対しある実数 a_n が存在して $\max_{n \in S} \{a_n + n \cdot x\}$ と書かれるものである。特に $S \subset (\mathbb{Z}_{\geq 0}^n)^*$ のときトロピカル多項式という。トロピカル多項式はその形から整の傾きをもつ区分線形凸関数であることが分かる。

トロピカル多項式同士の和や積も同様に通常の変数の $\max, +$ と定義することで、 n 変数トロピカル多項式全体の集合 $\mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]$ は半環となる。したがって代数幾何の場合に仕えていた様々な議論が使えない点に注意されたい。(例えばイデアルによる商が well-defined でないことなど。)

代数幾何では代数多様体は局所的に多項式の零点の集合として表せるものであった。トロピカル幾何では、トロピカル多様体は局所的にトロピカル多項式の特異点集合として表せるものと定める。これは一般には多面体複体となる。

例 4. 以下はトロピカル多項式 $f_1 = \max\{x, y, 0\}$ 、 $f_2 = \max\{2x, y, x + y, 0\}$ が定める $\mathbb{R}^2$ 内のトロピカル曲線 $V(f_1)$ 、 $V(f_2)$ である。

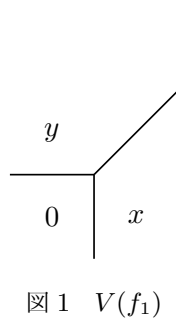


図 1 $V(f_1)$

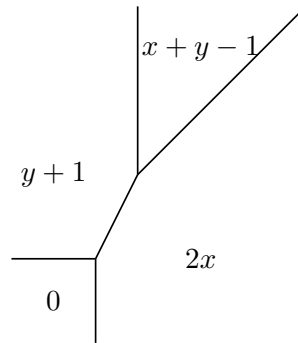


図 2 $V(f_2)$

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ もトロピカル多様体であり、階数 n の部分格子 $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ による商 $\mathbb{R}^n/\Lambda$ もまたトロピカル多様体である。これはトロピカルトーラスと呼ばれる。

トロピカル多様体上の正則関数、有理関数などの概念が、局所的にトロピカル多項式、それらのトロピカル商でかけている関数として定まる。そのとき、可逆な正則関数というのは、古典的には零点を持たない正則関数であるが、トロピカルの場合には特異点を持たない正則関数、すなわち整の傾きを持つアフィン線形関数となる。

3.1 トロピカル線束

トロピカル線束は、 $\mathbb{T}$ 束であって変換関数が整の傾きを持つアフィン線形関数を足すもの、つまりトロピカルにはかけるものとして複素幾何と同様に定まる。複素幾何と同様に同値な線束などの概念も定まり、トロピカル多様体 X 上の線束の同値類全体は $H^1(X, \text{Aff}_{\mathbb{Z}})$ と同一視される。ここで $\text{Aff}_{\mathbb{Z}}$ とは整の傾きを持つアフィン線形関数の層である。

定義 5. X がトロピカルトーラス $\mathbb{R}^n/\Lambda$ のとき、群完全列

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \text{Aff}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \underline{(\mathbb{Z}^n)^*} \rightarrow 0$$

よりコホモロジーの写像 $c_1: H^1(X, \text{Aff}_{\mathbb{Z}}) \rightarrow H^1(X, \underline{(\mathbb{Z}^n)^*})$ が得られる。これによるトロピカル線束 L の像を Q_L とおく。自然な同型 $H^1(X, \underline{(\mathbb{Z}^n)^*}) \cong (\Lambda)^* \otimes (\mathbb{Z}^n)^*$ によって Q_L を $\mathbb{R}^n$ 上の双一次形式としてみることができる。上の完全列から得られるコホモロジーの完全列を調べることで、 Q_L は $\mathbb{R}^n$ 上の対称形式であることが分かる。この Q_L は L の第一 Chern 類と呼ばれる。

Q_L が正定値対称形式のとき、線束 L は豊富であるという。

トロピカルアーベル多様体とは、豊富な線束をもつトロピカルトーラスのことである。

3.2 因子

n 次元トロピカル多様体上のトロピカル線束の有利切断が与えられたとき、その特異点集合は $n-1$ 次元の多面体複体を与える。その $n-1$ 次元の多面体に対し、有理切断のその近傍での傾きの差として重みが与えられる。有理切断によって与えられるこの重み付きの多面体複体は因子と呼ばれる。逆に因子から線束を復元することも可能である。詳細は省くが、トロピカル幾何においても交点理論が存在し、因子の自己交点数 D^n が定義できる。

4 主結果

定理 6. $X = \mathbb{R}^n/\Lambda$ を n 次元トロピカルアーベル多様体、 D を X 上の因子とする。 $h^0(X, D)$ を、次を満たす最小の整数とする。

X のある k 点 $p_1, \dots, p_k$ が存在して、 D に線形同値な有効因子 E ですべての p_i を通るものが存在しないこのとき、次が成り立つ。

1. $H^0(X, L(D))$ はある $h^0(X, D)$ 次元凸多面体と自然に同一視される。
2. $\frac{D^n}{n!}$ は整数となる。
3. 特に $n = 2$ のとき、次の Riemann-Roch 不等式が成り立つ。

$$h^0(X, D) + h^0(X, -D) \geq \frac{1}{2}D^2$$

二つ目、三つ目の主張は交点数が連続変形で不変なものと具体計算によって、 $\frac{D^n}{n!} = \det Q_{L(D)}$ が

得られることからわかる。ここで $Q_{L(D)} \in (\Lambda)^* \otimes (\mathbb{Z}^n)^*$ に対しその行列式は $(\Lambda)^*$ 、 $(\mathbb{Z}^n)^*$ の同じ向きの基底に関するものとする。よってこれは整数である。

一つ目の主張の証明にはトロピカルテータ関数を用いる。証明については述べないが、トロピカルテータ関数について簡単に説明しよう。

5 トロピカルテータ関数

簡単のため、 $X = \mathbb{R}^n / \Lambda$ をトロピカルアーベル多様体、 D を X 上の豊富な因子とする。 D から得られる線束 $L(D)$ を普遍被覆 $\mathbb{R}^n \rightarrow X$ によって引き戻すことで、 $L(D)$ の $-\infty$ でない大域正則切断全体 $H^0(X, L(D)) \setminus -\infty$ は次の集合と同一視される。

$$\left\{ \Theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} \Theta(x + \lambda) = \Theta(x) + Q_{L(D)}(\lambda, x) + \frac{1}{2}Q_{L(D)}(\lambda, \lambda) + Q_{L(D)}(c, x), \lambda \in \Lambda, x \in \mathbb{R}^n \\ \Theta(x) \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ 上の正則関数} \end{array} \right. \right\}$$

上のような正則関数をトロピカルテータ関数と呼ぶ。

$Q_{L(D)}$ は正定値な $(\Lambda)^* \otimes (\mathbb{Z}^n)^* \cong \text{Hom}(\Lambda, (\mathbb{Z}^n)^*)$ の元であるから、 $(\mathbb{Z}^n)^* / Q_{L(D)}(\Lambda)$ は有限集合となる。 $B \subset (\mathbb{Z}^n)^*$ をその代表元集合とする。このとき、任意のトロピカルテータ関数は

$$\max_{b \in B} \{ \Theta_b(x) + s_b \}, \quad s_b \in \mathbb{T}$$

と表すことができる。ここで Θ_b は、その傾きの集合が $b + \Lambda$ と一致するトロピカルテータ関数である。 Θ_b はトロピカルの定数倍を除いて、すなわち定数差を除いて一意に定まる。

このとき全射 $\mathbb{T}^{|B|} \rightarrow H^0(X, L(D))$ が $\{s_b\}_{b \in B} \mapsto \max_{b \in B} \{ \Theta_b(X) + s_b \}$ で定まる。この全射の右逆写像を次のように定める。

定義 7. $\varphi: H^0(X, L(D)) \rightarrow \mathbb{T}^{|B|}$ を、

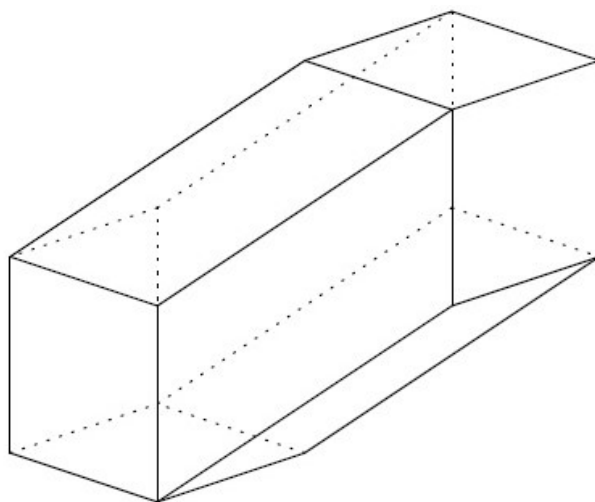
$$\begin{aligned} \varphi^b(\Theta) &= \max \{ s_b \mid \Theta(x) \geq \Theta_b(x) + s_b \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \} \\ &= \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \Theta(x) - \Theta_b(x) \}. \end{aligned}$$

で定める。これは $\mathbb{T}^{|B|}$ への単射となり、 $H^0(X, L(D))$ の形が定まる。

例 8. Q を行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とし、 Λ を $\mathbb{R}^n$ の格子 $Q^{-1}(((2\mathbb{Z})^2)^*)$ とする。

L を $\mathbb{R}^n / \Lambda$ 上の線束で $Q_{L(D)} = Q$ となるものとする。このとき $H^0(\mathbb{R}^n / \Lambda, L)$ は 4 元で生成される。

$H^0(\mathbb{R}^n / \Lambda, L)$ の $\mathbb{T}^4$ 内でのトロピカル射影化は、下図のような 14 個の頂点を持つ凸多面体となる。



参考文献

- [1] Baker, M., Norine, S.: Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph, *Advances in Mathematics*, 215.2, 766-788 (2007)
- [2] Cartwright, D.: Combinatorial tropical surfaces, arXiv preprint, arXiv:1506.02023 (2015)
- [3] Gathmann, A., Kerber, M.: A Riemann-Roch theorem in tropical geometry, *Mathematische Zeitschrift*, 259.1, 217-230 (2008)
- [4] Kristin, S.: Tropical surfaces, arXiv preprint, arXiv:1506.07407 (2015)
- [5] Mikhalkin, G.: Tropical geometry and its applications, arXiv preprint, math/0601041 (2006)
- [6] Mikhalkin, G., Zharkov, I.: Tropical curves, their Jacobians and theta functions, *Curves and abelian varieties*, 465, 203-230, (2008)