トーラス上のホモロジー的ミラー対称性に関するいくつかの注意点

千葉大学大学院理学研究科　基盤理学専攻　数学・情報数理学コース
小林和志 *　(Kazushi Kobayashi)

1　導入

1.1　背景

本稿では, 一貫してトーラス上におけるミラー対称性, 特にホモロジー的ミラー対称性と呼ばれるものに関連した話題をとりあつかう. そのため, ここではまずそれらについての簡単な説明を行うことにする.

はじめに, ミラー対称性とはそもそも何なのかということに関して言及しておく. M をカラビ・ヤウ多様体とする. カラビ・ヤウ多様体は複素構造 J とシンプレクティック構造 ω を両方備えているので, (何かしらの意味で定義された)M の複素構造のみに依存して定まる量を $J(M)$, M のシンプレクティック構造のみに依存して定まる量を $\omega(M)$ と書くことにする. このとき, ミラー対称性とは, 任意のカラビ・ヤウ多様体 M に対してあるカラビ・ヤウ多様体 $\check{M}$ が存在し,

$$J(M) \cong \omega(\check{M}) \tag{1}$$

といった関係式が成り立つという現象のことである. 特に, このような関係にあるカラビ・ヤウ多様体の組 $(M, \check{M})$ はしばしばミラー対と呼ばれる. ミラー対の例として最も基本的であると考えられているのは楕円曲線の組であるが, これを高次元化したものである複素トーラスとシンプレクティックトーラスの組もミラー対の例を与える.

実際には, 一口にミラー対称性 (予想) と言っても, 上記の (1) における $J(M)$ や $\omega(\check{M})$ のとり方に応じていくつかの定式化の仕方が考えられる. そのような定式化の中の 1 つであって, (1) における $J(M)$, $\omega(\check{M})$ の部分をそれぞれある適切な導来圏 (三角圏) としたようなものが 1994 年に Kontsevich によって提案されたホモロジー的ミラー対称性 (予想) [12] であり, これを正確に述べると以下のようになる.

予想 1.1 (Kontsevich)**.** *任意のカラビ・ヤウ多様体 M に対してあるカラビ・ヤウ多様体 $\check{M}$ が存在し, M 上で定義される連接層の成す有界導来圏 $D^b(Coh(M))$ と $\check{M}$ 上で定義される深谷圏 $Fuk(\check{M})$ から得られる三角圏 $Tr(Fuk(\check{M}))$ の間に, 三角圏としての圏同値*

$$D^b(Coh(M)) \cong Tr(Fuk(\check{M})) \tag{2}$$

が存在する.

*E-mail : afka9031@chiba-u.jp

この予想 1.1 に関して, いくつか注意事項を記しておく. まず, 深谷圏 $Fuk(\check{M})$ とは, $\check{M}$ 内のラグランジュ部分多様体 [1] とその上のユニタリ局所系の組の成す A_∞ 圏のことである [4]. 今回は A_∞ 圏の定義等の詳細は省略するが, ここで注意すべき点は, $Fuk(\check{M})$ はあくまでも A_∞ 圏であって三角圏の構造を持つわけではないので直接左辺の $D^b(Coh(M))$ と比較することができないということである. そこで必要となるのが Bondal, Kapranov, Kontsevich によって考案された A_∞ 圏 $\mathscr{C}$ から三角圏 $Tr(\mathscr{C})$ を作り出す構成法 [3], [12] であり, これによって A_∞ 圏 $Fuk(\check{M})$ を用いて三角圏 $Tr(Fuk(\check{M}))$ を構成することができ, この $Tr(Fuk(\check{M}))$ と $D^b(Coh(M))$ を三角圏として比較してみると実は本質的に同じものになっているのではないだろうか?ということを問うているのがホモロジー的ミラー対称性 (予想) というわけである. 歴史的には, この予想 1.1 はまず始めに楕円曲線上における場合が研究され ([17], [16], [1] など), その後, それの一般化としてアーベル多様体上における場合に関する研究も成されていった ([5] など).

ここで, この予想 1.1 を攻略するためのあるアイディアを一つ紹介しておく. このアイディアとは, “ (2) における左辺を右辺の形に合わせて書き換える ”, すなわち, ある A_∞ 圏 $\mathscr{C}_M$ であって

$$Tr(\mathscr{C}_M) \cong D^b(Coh(M))$$

となるようなものを見つけるというものである. 実際には, この A_∞ 圏として DG 圏 DG_M(DG 圏とは, 高次の積が 0 となるような A_∞ 圏のことである) がとれることが期待されているので, とりあえずはそのような DG_M がとれたと仮定してみよう. するとこのとき, (Tr をとる前の)A_∞ 圏としての圏同値 $DG_M \cong Fuk(\check{M})$ が存在することが示せると, (Tr をとることによる) 三角圏としての圏同値 $Tr(DG_M) \cong Tr(Fuk(\check{M}))$ が存在する, すなわち予想 1.1 が成り立つという事実が自動的に従うことになる. このことに関して, 楕円曲線上においては DG_M に相当するものが実際に見つかっており [13], [1], より高次元の複素トーラス上においては DG_M に相当すると期待されている DG 圏の例が具体的に構成されている ([7], [8] などを参照せよ).

1.2 問題意識

一般的に, トーラス上におけるホモロジー的ミラー対称性について考える場合, 実 2 次元 (すなわち, 楕円曲線) の場合に比べて実 4 次元以上の高次元の場合は状況が複雑であり, 実 2 次元の場合に行っていた議論を直接実 4 次元以上の場合における議論に拡張することができない場合がある. 本稿でとりあつかう問題も, そのようなものの例である. まず, 1 次元複素トーラス $T^2_{J=T} := \mathbb{C}/2\pi(\mathbb{Z} \oplus T\mathbb{Z})$ ($T \in \mathbb{H}$) を一つとる. これに対応するミラーパートナー $\check{T}^2_{J=T}$ の複素化されたシンプレクティック形式は $-\frac{1}{T}$ または T を用いて定義される. 基本的にはこのようにしてミラー対 $(T^2_{J=T}, \check{T}^2_{J=T})$ を得ることができるのであるが, ここで, このやり方の高次元版, すなわち, $T^{2n}_{J=T} := \mathbb{C}^n/2\pi(\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n)$ ($n \geq 2$, T は虚部が正定値となるような n 次複素行列) のミラーパートナー $\check{T}^{2n}_{J=T}$ の定義の仕方について考えてみよう. このとき, 一見すると $\check{T}^{2n}_{J=T}$ の複素化されたシンプレクティック形式は ($n = 1$ の場合の安直な一般化として)$-(T^{-1})^t$ または T を用いて定義すればよいのではないか?という気がしてしまう. しかしながら, $n = 1$ の場合と違って $n \geq 2$ の場合にはそもそも T の逆元, すなわち逆行列 T^{-1} が存在しないことがあるので, その際には当然 $\check{T}^{2n}_{J=T}$ の複素化されたシンプレクティック形式を $-(T^{-1})^t$ を用いて定義することはできない. さらに, $\check{T}^{2n}_{J=T}$ の複素化されたシンプレクティック形式を T を用いて定義したとしても, 結局, 得られたミラー対 $(T^{2n}_{J=T}, \check{T}^{2n}_{J=T})$ の上でホモロジー的ミラー対称性を議論する際に (T^{-1} の存在性に関連した) 不都合が生じてしまうこと

[1] シンプレクティック多様体 (M, ω) 内のラグランジュ部分多様体 L とは, $\mathrm{dim}L = \frac{1}{2}\mathrm{dim}M$ となるような部分多様体であって, $\omega|_L = 0$ を満たすようなもののことである.

が確認されている. 以上のことを考慮し, 本稿では, まず T^{-1} が存在しない場合におけるミラー対 $(T^{2n}_{J=T}, \check{T}^{2n}_{J=T})$ の定義の仕方について提案し, その後, 得られたミラー対 $(T^{2n}_{J=T}, \check{T}^{2n}_{J=T})$ の上でホモロジー的ミラー対称性を議論する際に現れる圏の対象の対応のさせ方について説明する.

1.3 いくつかの記法

後で用いるいくつかの記法についてここで説明しておく. まず, 上でも既に用いた記法であるが, 虚部が正定値となるような n 次複素行列 $T \in M(n;\mathbb{C})$ を用いて定義される n 次元複素トーラス $\mathbb{C}^n/2\pi(\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n)$ は今後も $T^{2n}_{J=T}$ と書くことにする：

$$T^{2n}_{J=T} := \mathbb{C}^n/2\pi(\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n).$$

また, $2n$ 次元実トーラス T^{2n} のある局所座標 $(p := (p^1, \cdots, p^n)^t, q := (q^1, \cdots, q^n)^t)$ に対して $dp := (dp^1, \cdots, dp^n)^t$, $dq := (dq^1, \cdots, dq^n)^t$ としたとき, 複素化されたシンプレクティックトーラス $(T^{2n}, \tilde{\omega} = dp^t \tau dq)$ $(\tau \in M(n;\mathbb{C}))$ をしばしば $T^{2n}_{\tilde{\omega}=\tau}$ と略記する：

$$T^{2n}_{\tilde{\omega}=\tau} := (T^{2n}, \tilde{\omega} = dp^t \tau dq).$$

2 準備

本章では, まず現時点で既に議論が可能であるものの例として, $\mathrm{det}T' \neq 0$ となるような T' を用いて定義される $T^{2n}_{J=T'}$ とそのミラーパートナー $\check{T}^{2n}_{J=T'} := T^{2n}_{\tilde{\omega}=-(T'^{-1})^t}$ から構成されるミラー対を一つとり, その上でホモロジー的ミラー対称性を議論する際に現れる圏の対象の対応関係について説明する.

先に, 複素幾何学側の話から始める. $T^{2n}_{J=T'}$ の局所座標を $Z = X + T'Y$ と書く. ここで,

$$Z := (Z_1, \cdots, Z_n)^t,\ X := (X_1, \cdots, X_n)^t,\ Y := (Y_1, \cdots, Y_n)^t$$

である. 以下, $r \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij}) \in M(n;\mathbb{Z})$, $p := (p_1, \cdots, p_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $q := (q_1, \cdots, q_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $\mu := p + T'^t q \in \mathbb{C}^n$, $\zeta := e^{\frac{2\pi \mathbf{i}}{r}}$ $(\mathbf{i} = \sqrt{-1})$ とする. 複素幾何学側において考えるべき対象は, 以下のようにして構成される階数 r の正則ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T}$ である. まずは変換関数を定義したいわけであるが, これを厳密に書こうとすると表記が煩雑になるので, ここでは次のようなやや大雑把な説明をするにとどめる (厳密な定義については, [8] の section 2 を参照せよ). $s(X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n)$ を $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の滑らかな切断とする. このとき, $X_j \mapsto X_j + 2\pi$, $Y_k \mapsto Y_k + 2\pi$ $(j,\, k = 1, \cdots, n)$ とした場合の変換関数を

$$\begin{aligned} &s(X_1, \cdots, X_j + 2\pi, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n) = e^{\frac{\mathbf{i}}{r} a_j Y} V_j s(X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n), \\ &s(X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_k + 2\pi, \cdots, Y_n) = U_k s(X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n) \end{aligned}$$

で定める. ただし, $a_j := (a_{1j}, \cdots, a_{nj}) \in \mathbb{Z}^n$, V_j, $U_k \in U(r)$ である. 特に, これらの行列 V_j, U_k としては, コサイクル条件

$$V_j V_k = V_k V_j,\ U_j U_k = U_k U_j,\ \zeta^{-a_{kj}} U_k V_j = V_j U_k\ (j, k = 1, \cdots, n)$$

を満たすもののみを考え, そのような V_j, U_k 全体の成す集合を $\mathcal{U}$ と書く. さらに, 各 $j = 1, \cdots, n$ に対し, ξ_j, $\theta_j \in \mathbb{R}$ を

$$e^{\mathbf{i}\xi_j} = \mathrm{det} V_j,\ e^{\mathbf{i}\theta_j} = \mathrm{det} U_j$$

で定め,

$$\xi := (\xi_1, \cdots, \xi_n)^t,\ \theta := (\theta_1, \cdots, \theta_n)^t \in \mathbb{R}^n$$

とおく. これらの $\xi, \theta \in \mathbb{R}^n$ は, 後でシンプレクティック幾何学側において $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ とミラー双対な関係にある対象を定義する際に用いることになる [2]. このようにして定義された複素ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の上で, 局所的に以下のような形で書かれる接続 $\nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ を考える [3].

$$\begin{aligned}\nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} &:= d - \frac{\mathbf{i}}{2\pi}\left(\frac{1}{r}X^t A^t + \frac{1}{r}\mu^t\right) dY \cdot I_r \\ &= d - \frac{\mathbf{i}}{2\pi}\left\{\left(\frac{1}{r}X^t A^t + \frac{1}{r}p^t\right) + \frac{1}{r}q^t T'\right\} dY \cdot I_r. \qquad (3)\end{aligned}$$

ここで, $dY := (dY_1, \cdots, dY_n)^t$ であり, d は外微分作用素, I_r は r 次単位行列を表す. 後は複素ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ が正則ベクトル束になるための条件を考えればよいわけであるが, このことに関して次の命題が成り立つ ([8], Proposition 2.2).

命題 2.1. 複素ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T'}$ が正則ベクトル束になることと n 次複素行列 AT' が対称行列になることは同値である.

これらの正則ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ は自然に DG 圏 $DG_{T^{2n}_{J=T'}}$ を成す ([8] の section 2 などを参照せよ). 特に, $n=1$ の場合には実際にこの DG 圏 $DG_{T^2_{J=T'}}$ が $D^b(Coh(T^2_{J=T'}))$ を生成する, すなわち, $Tr(DG_{T^2_{J=T'}}) \cong D^b(Coh(T^{2n}_{J=T'}))$ が成り立つことが確認されており [13], [1], より一般の n に対してもそのようになることが期待されている.

次に, シンプレクティック幾何学側の説明を行う. $\check{T}^{2n}_{J=T'}$ の局所座標を $(\check{X} := (X^1, \cdots, X^n)^t, \check{Y} := (Y^1, \cdots, Y^n)^t)$ と書き, $d\check{X} := (dX^1, \cdots, dX^n)^t$, $d\check{Y} := (dY^1, \cdots, dY^n)^t$ とする. 特に, $\tilde{\omega} = d\check{X}^t(-(T'^{-1})^t)d\check{Y}$ を $\tilde{\omega} = d\check{X}^t B d\check{Y} + \mathbf{i} d\check{X}^t \omega d\check{Y}$ と分解したとき, $d\check{X}^t \omega d\check{Y}$ がシンプレクティック形式を表し, $d\check{X}^t B d\check{Y}$ は B 場と呼ばれ, しばしば 2 形式 $d\check{X}^t \omega d\check{Y}$, $d\check{X}^t B d\check{Y}$ をそれぞれ n 次正方行列 $\omega = \mathrm{Im}(-(T'^{-1})^t)$, $B = \mathrm{Re}(-(T'^{-1})^t)$ と同一視する. また, $\Theta, \Xi \in \mathbb{R}^n$ を用いて

$$p(\theta, \Theta) := p - \theta + \Theta,\ q(\xi, \Xi) := q + \xi + \Xi$$

と定める (実際には, Θ, $\Xi \in \mathbb{R}^n$ は補助的なベクトルであり, これらの $p(\theta,\Theta)$, $q(\xi,\Xi)$ の定義において本質的なのはそれぞれ $p-\theta$, $q+\xi$ の部分である). 以下, 与えられた正則ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T'}$ とミラー双対になるような深谷圏 $Fuk(\check{T}^{2n}_{J=T'})$ の対象の構成法について述べる. なお, この構成法は基本的には SYZ 構成 [18] に基づくものであるが ([14], [2] なども参照せよ), 以下の説明における, ラグランジュ部分多様体の位置, 及びユニタリ局所系の平坦接続がそれぞれ $\theta, \xi \in \mathbb{R}^n$ に依存して定まるという点に関しては, 筆者の研究によって明らかになった部分であるということをここで断っておく [10]. まず, $\check{T}^{2n}_{J=T'}$ 内の n 次元部分多様体 $L_{(r,A,p(\theta,\Theta))}$ を次で定める.

$$L_{(r,A,p(\theta,\Theta))} := \left\{ \begin{pmatrix} \check{X} \\ \check{Y} \end{pmatrix} \in \check{T}^{2n}_{J=T'} \mid \check{Y} = \frac{1}{r}A\check{X} + \frac{1}{r}p(\theta,\Theta) \right\}. \qquad (4)$$

---

[2] 一般的に, ξ_j, $\theta_j \in \mathbb{R}$ のとり方に関しては $2\pi\mathbb{Z}$ の不定性がある. しかしながら, それらに対応して定まる対象同士が互いに同型になることが確認できるので, そのような不定性は実際には無視しても問題ない.

[3] $T^{2n}_{J=T'}$ のミラーパートナーを $T^{2n}_{\tilde{\omega}=T'}$ で定義する場合には, (3) の中の T' と書かれている部分に T'^{-1} が現れてしまう. したがって, T' が逆行列を持たない場合には, $T^{2n}_{J=T'}$ のミラーパートナー自体は $T^{2n}_{\tilde{\omega}=T'}$ を用いて定義することはできるものの, そのミラー対 $(T^{2n}_{J=T'}, T^{2n}_{\tilde{\omega}=T'})$ の上でホモロジー的ミラー対称性を議論しようとすると結局 T' の逆行列の存在性の問題が現れてしまうということである.

このとき, この $L_{(r,A,p(\theta,\Theta))}$ が $\check{T}^{2n}_{J=T'}$ 内のラグランジュ部分多様体になるための必要十分条件は ωA が対称行列になることである. さらに, 以下のような平坦接続 $\nabla_{\mathcal{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))}}$ を持つ自明な複素直線束 $\mathcal{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))} \to L_{(r,A,p(\theta,\Theta))}$ を考える.

$$\nabla_{\mathcal{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))}} := d - \frac{\mathbf{i}}{2\pi}\frac{1}{r}q(\xi,\Xi)^t d\check{X}. \tag{5}$$

特に, 深谷圏 $Fuk(\check{T}^{2n}_{J=T'})$ の対象になるための条件として, この $\nabla_{\mathcal{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))}}$ の曲率形式 (すなわち, 0) が B 場 $d\check{X}^t B d\check{Y}$ の $L_{(r,A,p(\theta,\Theta))}$ への制限と一致するというものがあるので, 結局 BA も対称行列にならなければいけないということが分かる. ここで, ωA, BA がそれぞれ対称行列になるという条件は AT' が対称行列になるという条件と同値であることに注意せよ. したがって, 上記の内容をまとめることによって次の命題を得る.

命題 2.2. ラグランジュ部分多様体 $L_{(r,A,p(\theta,\Theta))}$ とその上のユニタリ局所系 $\mathcal{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))} \to L_{(r,A,p(\theta,\Theta))}$ の組が深谷圏 $Fuk(\check{T}^{2n}_{J=T'})$ の対象になることと n 次複素行列 AT' が対称行列になることは同値である.

以降, 簡単のため,

$$\mathscr{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))} := (L_{(r,A,p(\theta,\Theta))}, \mathcal{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))})$$

と略記する. この命題 2.2 と先に紹介した命題 2.1 を比較することにより, AT' が対称行列になるという条件を介して DG 圏 $DG_{T^{2n}_{J=T'}}$ の対象 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T'}$ と深谷圏 $Fuk(\check{T}^{2n}_{J=T'})$ の対象 $\mathscr{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))}$ が対応しているということが見てとれるだろう. 特に, $\nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の定義式 (3) の接続形式の部分と $\mathscr{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))}$ を定義する際に用いられる 2 つの式 (4), (5) を比較してみると, " $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ と $\mathscr{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))}$ が互いにミラー双対な関係にある " という言葉の雰囲気がより強く感じられることと思う.

3 主結果

本章では, 虚部が正定値であるような $T \in M(n;\mathbb{C})$ であって $\det T = 0$ となるようなものを一つ固定して考える. そのような $T \in M(n;\mathbb{C})$ を用いて定義される n 次元複素トーラス $T^{2n}_{J=T}$ のミラーパートナー $\check{T}^{2n}_{J=T}$ の定義を与え, ミラー対 $(T^{2n}_{J=T}, \check{T}^{2n}_{J=T})$ の上でホモロジー的ミラー対称性について考えることが本章の目的である.
まず, 以下の補題が成り立つことに注意する [9].

補題 3.1. 行列 $T \in M(n;\mathbb{C})$ に対し, ある行列 $\delta \in M(n;\mathbb{Z})$ であって $\det(T-\delta) \neq 0$ となるようなものが存在する.

上記の補題 3.1 における δ のとり方は一意的ではないことに注意せよ. この δ のとり方の非一意性に関しては後でもう一度述べる.
以下, $T^{2n}_{J=T}$ の局所座標を $z = x + Ty$ と書くことにする. ただし,

$$z := (z_1, \cdots, z_n)^t,\ x := (x_1, \cdots, x_n)^t,\ y := (y_1, \cdots, y_n)^t$$

である. 今, 補題 3.1 より $\det(T-\delta) \neq 0$ となるような $\delta \in M(n;\mathbb{Z})$ をとることができるので, これを一つとり, 固定する. このような状況下において, 本稿では, n 次元複素トーラス

$$T^{2n}_{J=T}$$

のミラーパートナーとして, 実 $2n$ 次元の複素化されたシンプレクティックトーラス

$$\check{T}^{2n}_{J=T} := T^{2n}_{\tilde{\omega}=T-\delta}$$

をとることを考える. ただし, この対応関係の与え方の詳細を述べるためには "一般化された複素構造" という概念についてまず説明する必要があり, 本稿では紙数の関係上それについて述べることはできない [4]. このあたりのことについては [9] において詳しく記載する予定である. 以降, $\check{T}^{2n}_{J=T}$ の局所座標を $(\check{x} := (x^1, \cdots, x^n)^t, \check{y} := (y^1, \cdots, y^n)^t)$ と書く.

次に考えるのは, このミラー対 $(T^{2n}_{J=T}, \check{T}^{2n}_{J=T})$ 上におけるホモロジー的ミラー対称性についてであるが, そのために次のような T' を用いて定義される n 次元複素トーラス

$$T^{2n}_{J=T'}$$

をまず用意する :

$$T' := (-T+\delta)^{-1}.$$

明らかに $\mathrm{det}T' \neq 0$ であるから, この $T^{2n}_{J=T'}$ のミラーパートナー $\check{T}^{2n}_{J=T'}$ として $T^{2n}_{\tilde{\omega}=-(T'^{-1})^t}$ をとることができる :

$$\check{T}^{2n}_{J=T'} := T^{2n}_{\tilde{\omega}=-(T'^{-1})^t}.$$

このミラー対 $(T^{2n}_{J=T'}, \check{T}^{2n}_{J=T'})$ の上で, 第 2 章において説明した (SYZ 構成に基づくやり方で)DG 圏 $DG_{T^{2n}_{J=T'}}$ の対象である正則ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T'}$ と深谷圏 $Fuk(\check{T}^{2n}_{J=T'})$ の対象である $\mathscr{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))}$ を, AT' が対称行列になるという条件を介して対応させることができる. ここで, 二つの n 次元複素トーラス $T^{2n}_{J=T}$ と $T^{2n}_{J=T'}$ の関係について簡単に説明しておく. 実は, $T^{2n}_{J=T}$ と $T^{2n}_{J=T'}$ は互いに双正則同値になっていることが確認できる. したがって, 双正則写像

$$\varphi : T^{2n}_{J=T} \xrightarrow{\sim} T^{2n}_{J=T'}$$

を考えることができ, この φ による複素ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T'}$ の引き戻しとして複素ベクトル束 $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T}$ を定義することができる. 特に, $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の (滑らかな切断 $s(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ に対する) 変換関数, 及び接続はそれぞれ局所的に以下のように書くことができる.

$$\begin{aligned}
&s(x_1, \cdots, x_j + 2\pi, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) = V'_j s(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n), \\
&s(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_k + 2\pi, \cdots, y_n) = e^{-\frac{\mathbf{i}}{r} a_k (x+\delta y)} U'_k s(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n), \\
&\varphi^* \nabla_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} = d - \frac{\mathbf{i}}{2\pi}\left(-\frac{1}{r} y^t A^t + \frac{1}{r}\mu^t\right)(dx + \delta dy) \cdot I_r.
\end{aligned}$$

ここで, $V'_j, U'_k \in U(r)$, $dx := (dx_1, \cdots, dx_n)^t$, $dy := (dy_1, \cdots, dy_n)^t$ である. また, V'_j, U'_k としてはコサイクル条件を満たすもののみを考え, さらに, $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の場合と同様にして, 各 $j = 1, \cdots, n$ に対して $\xi'_j, \theta'_j \in \mathbb{R}$ をそれぞれ

$$e^{\mathbf{i}\xi'_j} = \mathrm{det}V'_j,\ e^{\mathbf{i}\theta_j} = \mathrm{det}U'_j$$

で定め,

$$\xi' := (\xi'_1, \cdots, \xi'_n)^t,\ \theta' := (\theta'_1, \cdots, \theta'_n)^t \in \mathbb{R}^n$$

[4] 実際には, $T^{2n}_{J=T'}$ のミラーパートナーを $\tilde{\omega} = -(T'^{-1})^t$ $(\mathrm{det}T' \neq 0)$, あるいは $\tilde{\omega} = T'$ を用いて与えることができるという話も, 一般化された複素構造を用いた枠組みの中で定式化することができる.

とおく．この複素ベクトル束 $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ が正則になるための条件については, 複素ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T'}$ が正則になるための必要十分条件を与えた命題 2.1, 及び φ の双正則性を考慮することにより, 次のように述べることができる．

命題 3.2. *複素ベクトル束 $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T}$ が正則ベクトル束になることと n 次複素行列 AT' が対称行列になることは同値である．*

さらに, これらの正則ベクトル束 $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ もまた自然に DG 圏 $\mathcal{DG}^{\varphi}_{T^{2n}_{J=T}}$ を成す (これの定義の仕方についても, [8] の section 2 に記載されているものと全く同様である)．ここで, $\delta \in M(n;\mathbb{Z})$ のとり方の非一意性に関して簡単に説明しておく．δ_1, $\delta_2 \in M(n;\mathbb{Z})$ であって $\det(T-\delta_1) \neq 0$, $\det(T-\delta_2) \neq 0$ を満たすようなものをとったと仮定し,

$$T_1' := (-T+\delta_1)^{-1},\ T_2' := (-T+\delta_2)^{-1}$$

とおく．特に, 各 δ_i $(i=1,2)$ に応じて双正則写像

$$\varphi_i : T^{2n}_{J=T} \xrightarrow{\sim} T^{2n}_{J=T_i'}$$

をとることができる．このとき, DG 圏

$$DG_{T^{2n}_{J=T_1'}},\ DG_{T^{2n}_{J=T_2'}},\ \mathcal{DG}^{\varphi_1}_{T^{2n}_{J=T}},\ \mathcal{DG}^{\varphi_2}_{T^{2n}_{J=T}}$$

をそれぞれ考えることができるが, 一般的に $\mathcal{DG}^{\varphi_1}_{T^{2n}_{J=T}}$ と $\mathcal{DG}^{\varphi_2}_{T^{2n}_{J=T}}$ の間には DG 圏としての圏同値が存在するとは限らない．しかしながら, それらから得られる三角圏に関しては, 次の命題が成り立つ [9].

命題 3.3. *各 $i=1,2$ に対し, $DG_{T^{2n}_{J=T_i'}}$ が $D^b(Coh(T^{2n}_{J=T_i'}))$ を生成する, すなわち, $Tr(DG_{T^{2n}_{J=T_i'}}) \cong D^b(Coh(T^{2n}_{J=T_i'}))$ が成り立つならば, 三角圏としての圏同値*

$$Tr(\mathcal{DG}^{\varphi_1}_{T^{2n}_{J=T}}) \cong Tr(\mathcal{DG}^{\varphi_2}_{T^{2n}_{J=T}})$$

が存在する．

以下, DG 圏 $\mathcal{DG}^{\varphi}_{T^{2n}_{J=T}}$ の対象として与えられた正則ベクトル束 $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T}$ とミラー双対になるような深谷圏 $Fuk(\check{T}^{2n}_{J=T})$ の対象の構成法について述べる．Θ', $\Xi' \in \mathbb{R}^n$ とする．まず, $\check{T}^{2n}_{J=T}$ 内の n 次元部分多様体 $\tilde{L}_{(r,A,p(\xi',\Xi'))}$ を

$$\tilde{L}_{(r,A,p(\xi',\Xi'))} := \left\{ \begin{pmatrix} \check{x} \\ \check{y} \end{pmatrix} \in \check{T}^{2n}_{J=T} \mid \check{x} = -\frac{1}{r}A\check{y} + \frac{1}{r}p(\xi',\Xi') \right\}$$

で定める．さらに, 自明な複素直線束 $\tilde{\mathcal{L}}_{(r,A,p(\xi',\Xi'),q(\delta^t p-\theta',\Theta'))} \to \tilde{L}_{(r,A,p(\xi',\Xi'))}$ であって, 平坦接続

$$d - \frac{\mathbf{i}}{2\pi}\frac{1}{r}q(\delta^t p-\theta',\Theta')^t d\check{y}$$

をもつようなものを考える．ただし, $d\check{y} := (dy^1,\cdots,dy^n)^t$ である．このとき, $\tilde{L}_{(r,A,p(\xi',\Xi'))}$ が $\check{T}^{2n}_{J=T}$ 内のラグランジュ部分多様体になるための必要十分条件は $(\mathrm{Im}T)^t A$ が対称行列になることであり, また, $\tilde{\mathcal{L}}_{(r,A,p(\xi',\Xi'),q(\delta^t p-\theta',\Theta'))}$ の平坦性から $\check{T}^{2n}_{J=T}$ 上における B 場の $\tilde{L}_{(r,A,p(\xi',\Xi'))}$ への制限が消えるという条件を得ることができ, これは $A^t\mathrm{Re}(T-\delta)$ が対称行列になることと同値である．特に, $(\mathrm{Im}T)^t A$, $A^t\mathrm{Re}(T-\delta)$ がそれぞれ対称行列になるという条件は AT' が対称行列になるという条件と同値であることに注意せよ．したがって, 次の命題を得る．

命題 3.4. ラグランジュ部分多様体 $\tilde{L}_{(r,A,p(\xi',\Xi'))}$ とその上のユニタリ局所系 $\tilde{\mathcal{L}}_{(r,A,p(\xi',\Xi'),q(\delta^t p-\theta',\Theta'))} \to \tilde{L}_{(r,A,p(\xi',\Xi'))}$ の組が深谷圏 $Fuk(\check{T}^{2n}_{J=T'})$ の対象になることと n 次複素行列 AT' が対称行列になることは同値である.

以降, 簡単のため,

$$\tilde{\mathscr{L}}_{(r,A,p(\xi',\Xi'),q(\delta^t p-\theta',\Theta'))} := (\tilde{L}_{(r,A,p(\xi',\Xi'))}, \tilde{\mathcal{L}}_{(r,A,p(\xi',\Xi'),q(\delta^t p-\theta',\Theta'))})$$

と略記する. 第 2 章において説明した場合と同様にして, この命題 3.4 と先に紹介した命題 3.2 を比較することにより, AT' が対称行列になるという条件を介して DG 圏 $\mathcal{DG}^{\varphi}_{T^{2n}_{J=T}}$ の対象 $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \to T^{2n}_{J=T}$ と深谷圏 $Fuk(\check{T}^{2n}_{J=T})$ の対象 $\tilde{\mathscr{L}}_{(r,A,p(\xi',\Xi'),q(\delta^t p-\theta',\Theta'))}$ が対応しているということが見てとれるだろう.

ここまでの議論をまとめると, 結果的に以下の図式のようになる. ただし, 右辺における対応関係は第 2 章において説明した SYZ 構成に基づくものであり, 左辺における対応関係は本章において説明した筆者が新たに提案したものである.

$$\begin{array}{ccc}
\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} & \longrightarrow & E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \\
\downarrow & & \downarrow \\
T^{2n}_{J=T} = \mathbb{C}^n/2\pi(\mathbb{Z}^n \oplus T\mathbb{Z}^n) & \xrightarrow[\varphi]{\sim} & T^{2n}_{J=T'} = \mathbb{C}^n/2\pi(\mathbb{Z}^n \oplus T'\mathbb{Z}^n) \\
\text{mirror dual}\downarrow & & \downarrow\text{mirror dual} \\
\check{T}^{2n}_{J=T} = (T^{2n}, \tilde{\omega} = d\check{x}^t(T-\delta)d\check{y}) & & \check{T}^{2n}_{J=T'} = (T^{2n}, \tilde{\omega} = d\check{X}^t(-(T'^{-1})^t)d\check{Y}),
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} & \xrightarrow{AT'=(AT')^t} & E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \\
\text{mirror dual}\downarrow AT'=(AT')^t & & AT'=(AT')^t\downarrow\text{mirror dual} \\
\tilde{\mathscr{L}}_{(r,A,p(\xi',\Xi'),q(\delta^t p-\theta',\Theta'))} & & \mathscr{L}_{(r,A,p(\theta,\Theta),q(\xi,\Xi))}.
\end{array}$$

最後に, 正則ベクトル束 $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の射影的平坦性について述べる. 一般的に, $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ は射影的平坦束 [5] の例になっており, また, 複素トーラス上で定義される射影的平坦束に関しては, その保型因子についての分類結果が既に存在する [6], [15], [11]. ここでは, この分類結果を用いて, 正則ベクトル束 $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ 全体をある種の射影的平坦束から成るクラスとして特徴付ける. まず, $T^{2n}_{J=T}$ の格子を $L := 2\pi(\mathbb{Z} \oplus T\mathbb{Z})$ と書くことにする. この L が

$$\gamma_1 := (2\pi, 0, \cdots, 0)^t, \cdots, \gamma_n := (0, \cdots, 0, 2\pi)^t,$$
$$\gamma_1' := (2\pi t_{11}, \cdots, 2\pi t_{n1})^t, \cdots, \gamma_n' := (2\pi t_{1n}, \cdots, 2\pi t_{nn})^t$$

によって生成されることは明らかである. ここで, t_{ij} は T の (i,j) 成分を表す. 以下, 局所的に

$$\begin{aligned}
&j(\gamma_j, z) = U'(\gamma_j)\exp\left\{\frac{1}{r}R(z,\gamma_j) + \frac{1}{2r}R(\gamma_j,\gamma_j)\right\}, \\
&j(\gamma_k', z) = U'(\gamma_k')\exp\left\{\frac{1}{r}R(z,\gamma_k') + \frac{1}{2r}R(\gamma_k',\gamma_k')\right\}, \\
&R : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},\ R(z,w) = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} z^t \{(T-\bar{T})^{-1}\}^t A^t \bar{w}, \\
&U' : L \to U(r),\ U'(\gamma+\gamma') = U'(\gamma)U'(\gamma')\exp\left\{\frac{\mathbf{i}}{r}\mathrm{Im}R(\gamma',\gamma)\right\}.
\end{aligned}$$

[5] 射影的平坦束の定義等については, 例えば [11] などを参照せよ.

と書かれるような保型因子 $j : L \times \mathbb{C}^n \to GL(r;\mathbb{C})$ によって定義される射影的平坦束 $\mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U}')}$ を考える $(j,k=1,\cdots,n)$. ただし, μ はこの保型因子と両立するような (エルミート) 接続の局所表示において用いられるものであり, また, $\mathcal{U}'$ は $U'(\gamma_j)$, $U'(\gamma'_k)$ 全体の成す集合を表す. 特に, 上記の $U' : L \to U(r)$ が満たすべき条件式は $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ を定義する際に考えることになるコサイクル条件と全く同じ形をしているので, r, A, μ を固定すると, $\mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U}')}$ 全体の成す集合の濃度と $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ 全体の成す集合の濃度が等しくなっていると考えられる. このような状況下において, 実際に以下の定理が成り立つ [9].

定理 3.5. $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \cong \mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U}')}$ であり, その同型射 $\Psi : \varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{(r,A,\mu,\mathcal{U}')}$ の局所表示は以下で与えられる. ただし, $\mathcal{A} := \{(T-\bar{T})^{-1}\}^t A^t (\delta - T)(T-\bar{T})^{-1}$ であるとする.

$$\Psi(z,\bar{z}) = \exp\left\{ \frac{\mathbf{i}}{4\pi r} z^t \bar{\mathcal{A}} z + \frac{\mathbf{i}}{4\pi r} \bar{z}^t \mathcal{A} \bar{z} - \frac{\mathbf{i}}{2\pi r} z^t \mathcal{A} \bar{z} \right.$$
$$\left. + \frac{\mathbf{i}}{2\pi r} \bar{z}^t \{(T-\bar{T})^{-1}\}^t (\delta - T)^t \mu - \frac{\mathbf{i}}{2\pi r} z^t \{(T-\bar{T})^{-1}\}^t (\delta - \bar{T})^t \bar{\mu} \right\} \cdot I_r.$$

一方, 第 2 章において定義した SYZ 構成に基づいて定まる正則ベクトル束 $E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ も射影的平坦束の例であり, それの全体もまた上記の定理 3.5 と同様な形である種の射影的平坦束から成るクラスとして特徴付けられている ([8], Theorem 3.6). これら二つの結果を比較することにより, 結局, 射影的平坦束 $\varphi^* E_{(r,A,\mu,\mathcal{U})}$ の成すクラスと SYZ 構成に基づいて定義される射影的平坦束の成すクラスは一般的に異なっているということが確認できる. したがって, 本稿において紹介した結果は, SYZ 構成に基づいて定義される正則ベクトル束のクラスとは異なる正則ベクトル束のクラスを用いたとしてもホモロジー的ミラー対称性を議論することが可能であるということを示唆している.

参考文献

[1] M. Abouzaid, I. Smith, Homological mirror symmetry for the four-torus, Duke Mathematical Journal, 152.3 (2010), 373-440.

[2] D. Arinkin, A. Polishchuk, Fukaya category and Fourier transform, AMS IP STUDIES IN ADVANCED MATHEMATICS, 2001, 23 : 261-274.

[3] A. Bondal and M. Kapranov, Enhanced triangulated categories, Math. USSR Sbornik 70:93-107, 1991.

[4] K. Fukaya, Morse homotopy, A^∞-category, and Floer homologies, In: Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology '93 (Seoul, 1993). Lecture Notes in Series, vol. 18, pp. 1-102. Seoul Nat. Univ., Seoul (1993).

[5] K. Fukaya, Mirror symmetry of abelian varieties and multi theta functions, J. Algebr. Geom. 11, 393-512 (2002).

[6] J. Hano, A geometrical characterization of a class of holomorphic vector bundles over a complex torus, Nagoya Math. J. Vol. 61 (1976), 197-202.

[7] H. Kajiura, On some deformations of fukaya categories. Symplectic, Poisson, and Noncommutative Geometry, 93-130, MSRI Publ. 62, Cambridge Univ. Press, New York, 2014.

[8] K. Kobayashi, Geometric structure of exact triangles consisting of projectively flat bundles on higher dimensional complex tori, arXiv : mathDG/1705.04007.

[9] K. Kobayashi, Remarks on the homological mirror symmetry for tori, In preparation.

[10] K. Kobayashi, The explicit construction of mirror maps for tori, In preparation.

[11] S. Kobayashi, Differential Geometry of Complex Vector Bundles, Princeton University Press, 1987.

[12] M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry, In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), Birkhäuser, 1995, pages 120-139, arXiv : math.AG/9411018.

[13] M. Kontsevich, Y. Soibelman, Homological mirror symmetry and torus fibrations. In Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000), pages 203-263. World Sci.Publishing, River Edge, NJ, 2001. math.SG/0011041.

[14] N. C. Leung, S.-T. Yau, E. Zaslow, From special Lagrangian to Hermitian-Yang-Mills via Fourier-Mukai transform, Adv. Theor. Math. Phys. 4:13191341, 2000.

[15] Y. Matsushima, Heisenberg groups and holomorphic vector bundles over a complex torus, Nagoya Math. J. Vol. 61 (1976), 161-195.

[16] A. Polishchuk, A_∞-structures on an elliptic curve, Comm. Math. Phys. 247, 527 (2004), arXiv : math.AG/0001048.

[17] A. Polishchuk, E. Zaslow, Categorical mirror symmetry : the elliptic curve, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 443-470 (1998), arXiv : math.AG/9801119.

[18] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow, Mirror Symmetry is T-duality, Nucl. Phys. B, 479:243-259, 1996.