クラスター変数とアレキサンダー多項式

東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系 数理・計算科学コース
永井渡 (Wataru NAGAI)

1 導入

クラスター代数は Fomin と Zelevinsky[FZ] によって導入され, 様々な分野との関連が研究されている. クラスター変数はクラスター代数の生成元であり, ミューテーションと呼ばれる操作により交換関係式と呼ばれる関係式を満たしながら変化する.

Musiker と Schiffler は三角形分割から得られる主係数付きクラスター変数が, スネークグラフと呼ばれる重み付きグラフの完全マッチングを用いて表せることを示した [MS]. そして Çanakçı と Schiffler は重みをつけないスネークグラフが 1 より大きい有理数と一対一に対応することを示した [CS]. さらに Lee と Schiffler は 1 より大きい有理数に対応する主係数付きクラスター変数の特殊化からその有理数に対応する 2 橋絡み目のジョーンズ多項式が得られることを示した [LS].

一方, 2 橋結び目のジョーンズ多項式を計算する方法として, 山田修司氏が発見した祖先三角形を用いる方法がある [Y, KW]. 祖先三角形とは正の有理数によって定まる三角形を張り合わせた図形である. 祖先三角形の各辺に重みを与えて重み付きパスの母関数を考えると, 同じ有理数に対応する 2 橋絡み目のジョーンズ多項式を計算できる.

本研究では, 有理数に対応するクラスター変数を [LS] とは異なる方法で特殊化することで, その有理数に対応する 2 橋絡み目のアレキサンダー多項式が得られることを示した. そのために, まず祖先三角形から定まるクイバーとミューテーション列から得られるクラスター変数が祖先三角形の重み付きパスの母関数で表せることを示し, そのクラスター変数を特殊化することで 2 橋絡み目のアレキサンダー多項式が得られることを示した. 本講演の内容は, 寺嶋郁二氏との共同研究 [NT] に基づく.

2 祖先三角形

ここでは, [Y] の定義を少し変えて $0 < p/q < 1$ となる有理数 p/q に対して祖先三角形を構成する. p/q を次のように連分数展開する.

$$\frac{p}{q} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

ただし, $a_1, a_2, \dots, a_n$ は正の整数である. この式の右辺を $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ で表す.

以降, 次のような三角形を右向きあるいは左向きであるという.

p/q の連分数展開の一つを $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ とする. 祖先三角形を次のように下から上へ三角形を積み上げることで構成する. まず, $a_1 - 1$ 個の右向きの三角形を積む. さらに a_2 個の左向きの三角形, a_3 個の右向きの三角形, $\dots$, n が奇数 (偶数) のとき a_n 個の右向き (左向き) の三角形を積み上げる. さらに, こうしてできた図形の各頂点に次のように下から分数でラベルをつけていく. まず, 一番下の三角形の一番下の辺の左側の頂点に $0/1$, 右側の頂点に $1/1$ でラベルをつける. さらに, 各三角形で下の辺が r/s と t/u でラベル付けされていれば残りの頂点に $(r+t)/(s+u)$ でラベルをつける. このようにしてできた祖先三角形を $A(p/q)$ で表す. また, 1 回目に積まれた $a_1 - 1$ 個の三角形たちをまとめて Δ_1 と表し, k 回目に積まれた a_k 個の三角形たちをまとめて Δ_k で表す. また, 下から i 番目の三角形を T_i で表す.

例 2.1. $7/19$ と $3/5$ に対応する祖先三角形を構成する. $7/19 = [2, 1, 2, 2]$ より $A(7/19)$ は 1 つの右向きの三角形, 1 つの左向きの三角形, 2 つの右向きの三角形, 2 つの左向きの三角形を積み上げると, $A(7/19)$ は図 1 の左側のようになる. 一方, $3/5 = [1, 1, 2]$ より 0 個の右向きの三角形, 1 つの左向きの三角形, 2 つの右向きの三角形を積み上げて $A(3/5)$ は図 1 の右側のようになる.

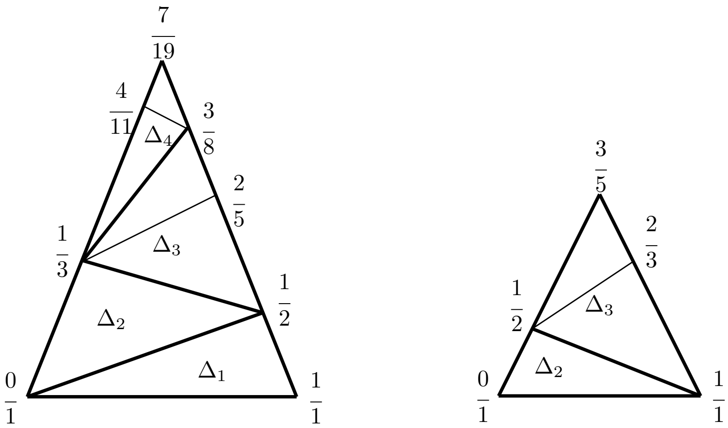


図 1　$A(7/19)$ (左) と $A(3/5)$ (右).

祖先三角形について, 次が成り立つ.

命題 2.2. (1) $A(p/q)$ の一番上の頂点は p/q でラベル付けされる.
(2) $A((q-p)/q)$ は $A(p/q)$ を反転させて得られる.

2.1 祖先三角形のパス

祖先三角形 $A(p/q)$ の下降パスとは, 頂点 p/q から頂点 $0/1$ または $1/1$ へ至るパスであり, パスが通る頂点のラベルの分母が単調減少になっているものをいう. 以降, 下降パスのことを単にパスと

いう.

例 2.3. 図 2 の左側の図の矢印は $A(7/19)$ のパスである. 一方, 右側の図の矢印は $1/2$ を通った後 $1/3$ を通っていて, 分母が単調減少ではないためパスではない.

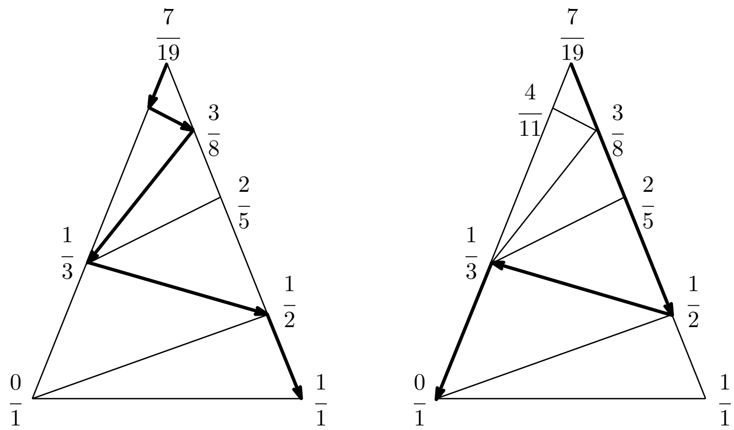


図 2　$A(7/19)$ のパスの例 (左) とパスでない例 (右).

祖先三角形 $A(p/q)$ のパス全体の集合を $\Gamma_{p/q}$ とする. $\gamma \in \Gamma_{p/q}$ に対し, γ の左側にある三角形の集合を S_γ とする.

定義 2.4. $p/q = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ とし, $N = a_1 + \cdots + a_n - 1$ とする. また, $x_1, x_2, \ldots, x_N, y_1, y_2, \ldots, y_N$ を変数とする. 祖先三角形 $A(p/q)$ の三角形 T_i の重み $\mathrm{wt}(T_i)$ を次のように定める.

$$\mathrm{wt}(T_1) = \begin{cases} y_1 x_2 & T_1 \text{ が右向きの時} \\ y_1/x_2 & T_1 \text{ が左向きの時} \end{cases}$$

$i \geq 2$ の時,

$$\mathrm{wt}(T_i) = \begin{cases} y_i x_{i+1}/x_{i-1} & T_i \text{ が右向きかつ } T_{i-1} \text{ が右向きの時} \\ y_i x_{i-1} x_{i+1} & T_i \text{ が右向きかつ } T_{i-1} \text{ が左向きの時} \\ y_i/x_{i-1}x_{i+1} & T_i \text{ が左向きかつ } T_{i-1} \text{ が右向きの時} \\ y_i x_{i-1}/x_{i+1} & T_i \text{ が左向きかつ } T_{i-1} \text{ が左向きの時} \end{cases}$$

ただし, $x_{N+1} = 1$ とする. さらに, $\gamma \in \Gamma_{p/q}$ の重み $\mathrm{wt}(\gamma)$ を次のように定義する.

$$\mathrm{wt}(\gamma) = \prod_{T_i \in S_\gamma} \mathrm{wt}(T_i)$$

例 2.5. 図 2 の左側のパスを γ としてその重みを求める. 各三角形の重みは以下のようになる.

$$\begin{array}{lllllllll} \mathrm{wt}(T_1) & = & y_1 x_2, & \mathrm{wt}(T_2) & = & y_2/x_1 x_3, & \mathrm{wt}(T_3) & = & y_3 x_2 x_4, \\ \mathrm{wt}(T_4) & = & y_4 x_5/x_3, & \mathrm{wt}(T_5) & = & y_5/x_4 x_6, & \mathrm{wt}(T_6) & = & y_6 x_5. \end{array}$$

$S_\gamma = \{T_1, T_2, T_5\}$ であるから,

$$\mathrm{wt}(\gamma) = \mathrm{wt}(T_1)\,\mathrm{wt}(T_2)\,\mathrm{wt}(T_5) = \frac{y_1 y_2 y_5 x_2}{x_1 x_3 x_4 x_6}.$$

3　クラスター代数

まず, クラスター代数の定義を復習する. 詳しくは [FZ4] を参照.

クラスター代数は係数の属する半体に対して定義される. 半体とは, 和と積の 2 つの演算を持ち, 積についてアーベル群であって和が可換で結合的であり, 分配法則を満たすものである. $\mathbb{P}$ を半体とし, $\mathbb{ZP}$ を群環, $\mathbb{QP}$ をその商体とする.

N を正の整数とする. $\mathbf{x} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ を $\mathbb{QP}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ の N 個組, $\mathbf{y} = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$ を $\mathbb{P}$ の N 個組, B を $N \times N$ 整数行列で反対称化可能とする. ただし, B が反対称化可能であるとは, 正の整数 $d_1, d_2, \ldots, d_N$ があって, 対角行列 $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_N)$ との積 DB が反対称行列となるときをいう. これらの 3 つ組 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ を種子という.

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ を $\mathbb{QP}$ の種子とし, $\mathbf{x} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$, $\mathbf{y} = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$, $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ とする. $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ に対し, k でのミューテーション μ_k は種子 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ を $\mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B) = (\mathbf{x}', \mathbf{y}', B')$ に変換する操作で, 次で定義される.

- $B' = (b'_{ij})$ は次で定義される.

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & i = k \text{ または } j = k \text{ の時} \\ b_{ij} + [-b_{ik}]_+ b_{kj} + b_{ik}[b_{kj}]_+ & \text{それ以外の時} \end{cases} \tag{1}$$

- $\mathbf{y}' = (u'_1, u'_2, \ldots, u'_N)$ は次で定義される.

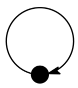
$$u'_j = \begin{cases} u_k^{-1} & j = k \text{ の時} \\ u_j u_k^{[b_{kj}]_+} (u_k \oplus 1)^{-b_{kj}} & j \neq k \text{ の時.} \end{cases} \tag{2}$$

- $\mathbf{x}' = (X'_1, X'_2, \ldots, X'_N)$ は交換関係式と呼ばれる次の式で定義される.

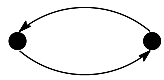
$$X'_j = \begin{cases} \dfrac{\prod X_i^{[-b_{ik}]_+} + u_k \prod X_i^{[b_{ik}]_+}}{(u_k \oplus 1) X_k} & j = k \text{ の時} \\ X_j & j \neq k \text{ の時} \end{cases} \tag{3}$$

ただし, $[x]_+ = \max(x, 0)$ である.

クイバーとは, 単純とは限らない有向グラフのことである. 本稿では, クイバーは頂点と辺の数が有限で, 以下のような 1-loop や 2-cycle を含まないとする.



1-loop



2-cycle

Q をクイバーとし, その頂点集合を $\{1, 2, \ldots, N\}$ とする. Q に対応する反対称行列 $B^Q = (b^Q_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ を $b_{ij} = Q_{ij} - Q_{ji}$ で定義する. ただし, Q_{ij} は頂点 i から頂点 j への辺の本数とする. 逆に, 反対称整数行列 B に対して $b_{ij} > 0$ の時頂点 i から 頂点 j へ b_{ij} 本の辺を引くと, これは前の対応の逆になっている. 以降では, この対応によって 3 つ組 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, Q)$ を種子とみなす.

$\mathbf{x}_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{QP}(x_1, x_2, \ldots, x_n)^N$, $\mathbf{y}_0 = (y_1, y_2, \ldots, y_N) \in \mathbb{P}^N$ とし, B_0 を反対称化可能行列とする. このとき種子 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, B_0)$ を初期種子と呼ぶ. 初期種子から有限回のミュー

テーションで得られる任意の種子 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ の $\mathbf{x}$ の各々の要素をクラスター変数という．初期種子 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, B_0)$ から得られる全てのクラスター変数で生成される $\mathbb{QP}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ の $\mathbb{ZP}$ 部分代数を係数付きクラスター代数と呼ぶ．以降では, $\mathbb{P}$ をトロピカル半体 $\mathrm{Trop}(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ とする．トロピカル半体 $\mathrm{Trop}(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ とは, $y_1, y_2, \ldots, y_N$ たちのローラン単項式全体の集合に通常の積と次で定義される和 $\oplus$ を入れたものである．

$$\prod_{j=1}^{N} y_j^{a_j} \oplus \prod_{j=1}^{N} y_j^{b_j} = \prod_{j=1}^{N} y_j^{\min(a_j, b_j)}$$

例 3.1. クイバー Q_0 を $1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$ とし, $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, Q_i) = \mu_i \circ \cdots \circ \mu_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, Q_0)$ とする．この時, 種子 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, Q_0)$, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, Q_1)$, $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, Q_2)$, $(\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3, Q_3)$ は次のようになる．

i	$\mathbf{x}_i$	$\mathbf{y}_i$	Q_i
0	(x_1, x_2, x_3)	(y_1, y_2, y_3)	$1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$
1	$\left(\dfrac{x_2 + y_1}{x_1}, x_2, x_3\right)$	$\left(\dfrac{1}{y_1}, y_1 y_2, y_3\right)$	$1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3$
2	$\left(\dfrac{x_2 + y_1}{x_1}, \dfrac{x_2 + y_1 + y_1 y_2 x_1 x_3}{x_1 x_2}, x_3\right)$	$\left(y_2, \dfrac{1}{y_1 y_2}, y_3\right)$	$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$
3	$\left(\dfrac{x_2 + y_1}{x_1}, \dfrac{x_2 + y_1 + y_1 y_2 x_1 x_3}{x_1 x_2}, X_3'\right)$	$\left(y_2 y_3, \dfrac{1}{y_1 y_2}, \dfrac{1}{y_3}\right)$	$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, bend right] & 2 & 3 \arrow[l] \end{tikzcd}$

ここで,

$$X_3' = \frac{x_2^2 + y_1 x_2 + y_3 x_2 + y_1 y_3 + y_1 y_2 y_3 x_1 x_3}{x_1 x_2 x_3}.$$

3.1 祖先三角形のクラスター変数

p/q を $0 < p/q < 1$ となる有理数とし, $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ をその連分数展開, $N = \sum_{i=1}^{n} a_i - 1$ とする．祖先三角形 $A(p/q)$ に対応する初期クイバー Q_0 を次のように構成する．

- Q_0 の頂点集合は $\{1, 2, \ldots, N\}$.
- $i = 1, 2, \ldots, N-1$ について, T_i が右向きであれば頂点 $i+1$ から頂点 i へ辺を引き, 左向きであれば頂点 i から $i+1$ へ辺を引く．

例 3.2. $A(7/19)$ に対応するクイバー Q_0 は次のようになる．

$$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \longleftarrow 4 \longleftarrow 5 \longrightarrow 6\ .$$

初期種子 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, Q_0)$ に $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$ を順に施して得られた種子 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ の $\mathbf{x}$ の N 番目のクラスター変数を $X_{p/q}$ とすると, 次の式が成り立つ．

定理 3.3.

$$X_{p/q} = \frac{D}{x_1 x_2 \cdots x_N} \sum_{\gamma \in \Gamma_{p/q}} \mathrm{wt}(\gamma), \tag{4}$$

ここで,

$$D = \prod_{i=1}^{N} (\mathrm{wt}(T_i) \text{ の分母})$$

注意 1. 祖先三角形は, 頂点を 1 つ付け加えてその頂点と 0/1 及び 1/1 を結ぶ辺を追加することで, $(N+3)$ 角形の三角形分割と思うことができる. [MS] によりクラスター変数 $X_{p/q}$ はスネークグラフの完全マッチングを用いて表せるが, このスネークグラフは [CS] の対応で q/p に対応する. 彼らの連分数展開の表記は本稿と同じであるが, 定義は本稿の逆数となっているので, $X_{p/q}$ を [LS] の $x[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ としてとれる.

例 3.4. 祖先三角形 $A(3/5)$ は図 1 の左側に図示されている. 各三角形の重みは $\mathrm{wt}(T_1) = y_1/x_2$, $\mathrm{wt}(T_2) = y_2x_1x_3$, $\mathrm{wt}(T_3) = y_3/x_2$ であるので, $D = x_2^2$ であり, 各パスの重みは以下のようになる.

γ	S_γ	$\mathrm{wt}(\gamma)$
$\frac{3}{5} \to \frac{1}{2} \to \frac{0}{1}$	$\emptyset$	1
$\frac{3}{5} \to \frac{1}{2} \to \frac{1}{1}$	$\{T_1\}$	$\frac{y_1}{x_2}$
$\frac{3}{5} \to \frac{2}{3} \to \frac{1}{2} \to \frac{0}{1}$	$\{T_3\}$	$\frac{y_3}{x_2}$
$\frac{3}{5} \to \frac{2}{3} \to \frac{1}{2} \to \frac{1}{1}$	$\{T_1, T_3\}$	$\frac{y_1y_3}{x_2^2}$
$\frac{3}{5} \to \frac{2}{3} \to \frac{1}{1}$	$\{T_1, T_2, T_3\}$	$\frac{y_1y_2y_3x_1x_3}{x_2^2}$

よって,

$$\begin{aligned} \frac{D}{x_1x_2\cdots x_N} \sum_{\gamma \in \Gamma_{p/q}} \mathrm{wt}(\gamma) &= \frac{x_2^2}{x_1x_2x_3} \left(1 + \frac{y_1}{x_2} + \frac{y_3}{x_2} + \frac{y_1y_3}{x_2^2} + \frac{y_1y_2y_3x_1x_3}{x_2^2} \right) \\ &= \frac{x_2^2 + y_1x_2 + y_3x_2 + y_1y_3 + y_1y_2y_3x_1x_3}{x_1x_2x_3}. \end{aligned}$$

一方, $A(3/5)$ に対応する初期クイバー Q_0 は次のようになる.

$$Q_0 = \ 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$$

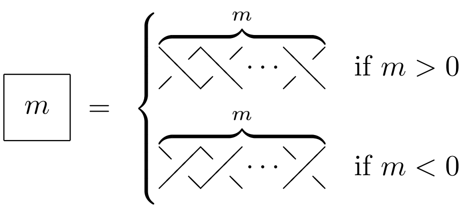
さらに, $X_{3/5}$ は種子 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, Q) = \mu_3 \circ \mu_2 \circ \mu_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, Q_0)$ の $\mathbf{x}$ の 3 番目の要素である. よって, $X_{3/5}$ は例 3.1 の X_3' と等しいから,

$$X_{3/5} = X_3' = \frac{x_2^2 + y_1x_2 + y_3x_2 + y_1y_3 + y_1y_2y_3x_1x_3}{x_1x_2x_3}.$$

4　2 橋絡み目のアレキサンダー多項式

4.1　2 橋絡み目

2 橋絡み目は有理数と対応する絡み目で, 有理数の連分数展開を使って次のように構成できる. まず, 整数 m に対し次のような組み紐を考える.



(5)

p/q を $0 < p/q < 1$ となる有理数とし, $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ をその連分数展開とする. p/q に対応する 2 橋絡み目 $K(p/q)$ は次の図 3 のような図式を持つ絡み目のことである.

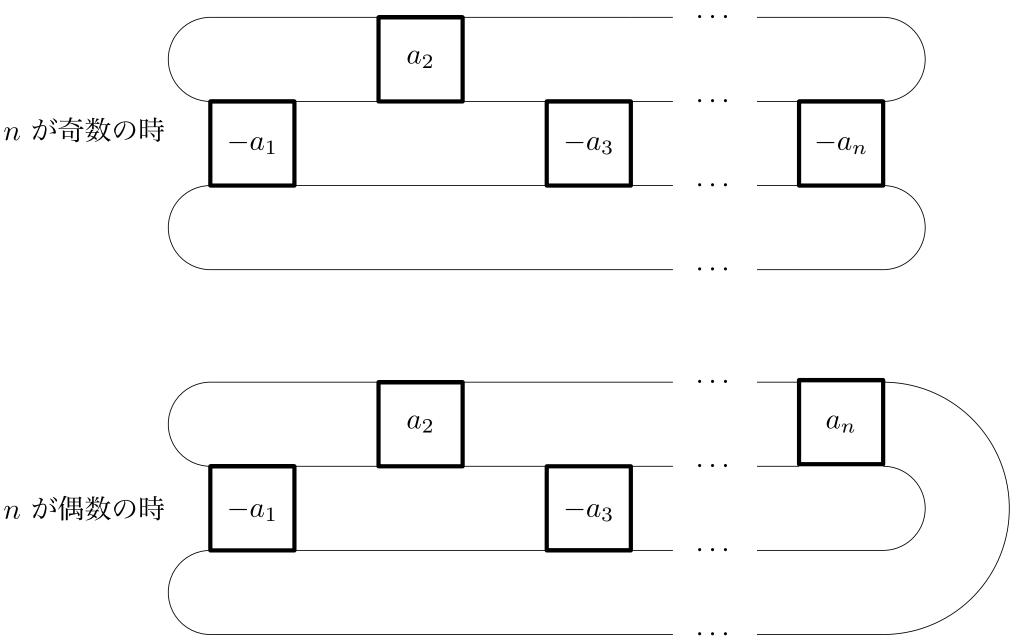


図 3　2 橋絡み目の図式. 各正方形は (5) のような組み紐を表す.

2 橋絡み目 $K(p/q)$ は q が奇数の時結び目となり, 偶数の時 2 成分絡み目となる. 以降では, $K(p/q)$ の向き付けを次のように固定する. $-a_1$ の部分の組み紐の一番左の交点のひもの向きが q が奇数の時 , q が偶数の時 となるようにする. また, 各交点の符号を交点が のようになっている時 $+1$ とし, 交点が のようになっている時 -1 とする.

例 4.1. $3/5 = [1, 1, 2]$ に対応する 2 橋絡み目 $K(3/5)$ は結び目であり, 図 4 のようになる. 各交点の符号は左から順に -1, -1, $+1$, $+1$ である.

簡単にわかるように, 各組み紐の中では交点の符号は等しい. そこで, 組み紐の符号をその交点の符

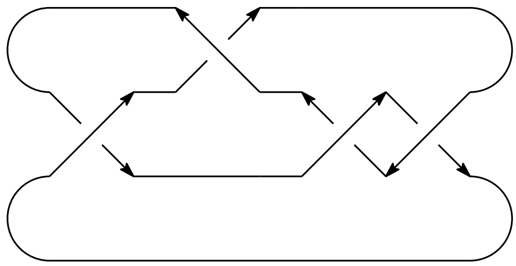


図 4　$K(3/5)$

号とする. この符号を祖先三角形から計算する公式のために, ザイフェルトパスというパスを用いる. ザイフェルトパスとは, 次の 2 つの条件を満たすパスである.

1. 1 つの三角形の 2 辺以上を通らない.
2. 祖先三角形の各頂点の分子と分母に $\bmod 2$ をとると, 各頂点は 0/1, 1/1, 1/0 のいずれかである. p と q が奇数の時端点が 1/1 と 1/0 である辺のみを, それ以外の時は端点が 0/1 と 1/0 である辺のみを通る.

このようなパスは唯一つ存在する. ここで, 数列 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ を次のように定める.

$$t_1 = \begin{cases} -1 & p \text{ と } q \text{ がどちらも奇数の時} \\ +1 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$
$$t_i = \begin{cases} -t_{i-1} & \Delta_i \text{ と } \Delta_{i-1} \text{ の間をザイフェルトパスが通る時} \\ t_{i-1} & \Delta_i \text{ と } \Delta_{i-1} \text{ の間をザイフェルトパスが通らない時} \end{cases}$$

このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 4.2. t_i は $K(p/q)$ の $(-1)^i a_i$ の部分の組み紐の符号に等しい.

証明の概略. ある i について a_i が 3 以上であれば, 向き付けに影響を与えずにその部分の組み紐の交点を 2 つ減らすことができる. さらに, 祖先三角形で Δ_i の三角形を 2 つ減らしてもザイフェルトパスは変化しない. よって, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ は 1 または 2 であるとしてよい. さらに $[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1]$ から構成される 2 橋絡み目と $[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}+1]$ から構成される 2 橋絡み目は等しくなるので $a_n = 2$ であるとしてよい. このとき, $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ と $[a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}]$ は　$\bmod 2$ で等しい. そこで, n に関する帰納法で証明する. その際に鍵となるのが次の公式である: q が奇数の時,

$$t_n = \begin{cases} 1 & \text{一番上の三角形の左側の頂点が} \quad \bmod 2 \text{ で } 1/0 \text{ の時} \\ -1 & \text{一番上の三角形の右側の頂点が} \quad \bmod 2 \text{ で } 1/0 \text{ の時} \end{cases}$$

この公式から a_{n-2} に対応する組み紐の符号がわかるので, $K([a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}])$ に 2 つ組み紐を挿入することで $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ に対応する 2 橋絡み目を作り, この操作によって元の部分の向き付けを変えないことと挿入した組み紐の符号が t_{n-1}, t_n に等しいことを示す. □

注意 2. Hatcher と Oertel は祖先三角形のある条件を満たすパスから 2 橋絡み目の境界スロープを計算できることを示した [HO]. このアルゴリズムにおいて, ザイフェルトパスはザイフェルト曲面に対応するパスである.

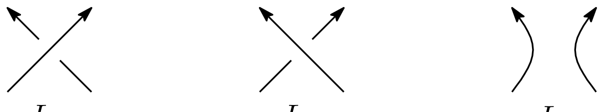


図 5　スケイン関係式

4.2　アレキサンダー多項式

一般に, 2 つの絡み目が等しくないことを示すのは難しい. そこで, 絡み目の不変量と呼ばれる等しい絡み目に等しい数や多項式などを割りあてる写像を構成し, これを計算することで異なる結び目を見分けることを考える. アレキサンダー多項式はそのような不変量の一つであり, 1 変数の負冪を許した多項式である. 絡み目 L に対するアレキサンダー多項式を $\Delta_L(t)$ とする. アレキサンダー多項式は次のように計算できる. まず, 自明な結び目のアレキサンダー多項式は 1 である. さらに, 図式においてある交点の近傍以外は全く同じで近傍だけが図 5 のように異なる 3 つの絡み目 L_+, L_-, L_0 に対して次の関係式 (スケイン関係式) が成り立つ.

$$\Delta_{L_+}(t) - \Delta_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta_{L_0}(t)$$

これら 2 つの規則により任意の向きをつけられた絡み目のアレキサンダー多項式が計算できる. 2 橋絡み目 $K(p/q)$ のアレキサンダー多項式を $\Delta_{p/q}$ とする.

$p/q = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ の祖先三角形 $A(p/q)$ において, Δ_k の中で下から i 番目の三角形を $T_i^{(k)}$ とする. すなわち, $l_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ とすれば, $T_i^{(k)}$ は $k = 1$ のとき T_i であり, $k \geq 2$ の時 $T_{l_{k-1}+i-1}$ である. 三角形の符号 $e(T_i^{(k)})$ を次のように定める.

- Δ_k の一番下の辺をザイフェルトパスが通る時,

$$e(T_i^{(k)}) = (-1)^i$$

- k が奇数の時

$$e(T_i^{(k)}) = \begin{cases} +1 & \Delta_k \text{ がザイフェルトパスの左側にある時} \\ (-1)^{i-1} & \Delta_k \text{ がザイフェルトパスの右側にある時} \end{cases}$$

- k が偶数の時

$$e(T_i^{(k)}) = \begin{cases} +1 & \Delta_k \text{ がザイフェルトパスの右側にある時} \\ (-1)^{i-1} & \Delta_k \text{ がザイフェルトパスの左側にある時} \end{cases}$$

三角形 T_i の符号を e_i とする. p/q に対応するクラスター変数 $X_{p/q}$ は $x_1, x_2, \ldots, x_N, y_1, y_2, \ldots, y_N$ の有理式であった. $X_{p/q}$ において, $x_1 = x_2 = \cdots = x_N = 1$ とし, $y_i = -t^{e_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ として得られる t の負冪を許した多項式を $\mathcal{F}_{p/q}$ とする. 次の定理が主結果である.

定理 4.3.

$$\Delta_{p/q} \;=\; \epsilon t^d \mathcal{F}_{p/q}$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
d &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} d(k) \\
d(k) &= \begin{cases} a_k - 1 & k \text{ が奇数かつ } t_k = -1\text{ , または } k \text{ が偶数かつ } t_k = +1 \text{ の時} \\ t_k & \Delta_k \text{ の一番下の辺をザイフェルトパスが通る時} \\ 1 & \text{それ以外の時} \end{cases} \\
\epsilon &= (-1)^{n+\sum_{i:\mathrm{even}} a_i - pq}
\end{aligned}
$$

特に, この結果と [LS] の結果から, クラスター変数 $X_{p/q}$ は 2 つの異なる結び目不変量の情報を持っていることになる.

参考文献

[CS] İlke Çanakçı and R. Schiffler, *Cluster algebras and continued fractions. (English summary)*, Compos. Math. 154 (2018), no. 3, 565–593.

[FZ] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), 497–529.

[FZ4] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras. IV. Coefficients*, Compos. Math. 143 (2007), no. 1, 112–164.

[HO] A. Hatcher and U. Oertel, *Boundary slopes for Montesinos knots*, Topology 28 (1989), no. 4, 453–480.

[KW] T. Kogiso and M. Wakui, *A Bridge between Conway-Coxeter Friezes and Rational Tangles through the Kauffman Bracket Polynomials*, `arXiv:1806.04840`

[LS] K. Lee and R. Schiffler, *Cluster algebras and Jones polynomials*, `arXiv:1710.08063`.

[MS] G. Musiker and R. Schiffler, *Cluster expansion formulas and perfect matchings (English summary)*, J. Algebraic Combin. 32 (2010), no. 2, 187–209.

[NT] W. Nagai and Y. Terashima, *Cluster variables, ancestral triangles and Alexander polynomials*, `arXiv:1812.02434`

[Y] 山田修司, *2* 橋結び目の *Jones* 多項式, 研究集会『結び目の諸問題と最近の成果』報告集 (1996) 92–96.