Branched twist spin と Gluck twist

東北大学 大学院理学研究科 数学専攻
福田瑞季 (Mizuki FUKUDA)

概要

Branched twist spin とは，S^4 に滑らかに埋め込まれた 2 次元ファイバー結び目である．この結び目は Fintushel と Pao によって 1 次元の結び目と S^4 上の S^1-作用によって特徴付けがなされている．Gluck twist とは 4 次元多様体における結び目に沿った手術の一種で，branched twist spin に沿った Gluck twist では全空間である S^4 は変化しないことが知られている．この講演では branched twist spin に対し，Gluck twist を行なった後の結び目がどのようなものであるか決定できたので，証明の概略とともに紹介する．

1　導入

n 次元絡み目とはいくつかの S^n を S^{n+2} へ埋め込んだ像のことである．埋め込む S^n の個数を成分数といい，特に成分数が 1 のとき，n 次元結び目と呼ばれる．以下では滑らかな埋め込みによる結び目について考える．また，S^{n+2} から結び目の開環状近傍を取り除いたものを n 次元結び目の補空間と呼ぶ．結び目理論では，位相型で結び目を区別する．

この区別には大きく分けて 2 つの大きなテーマがある．1 つ目は与えられた結び目が自明かどうかという問題である．n 次元結び目が自明であるとは，$n+1$ 次元球体の境界の n 次元球面と位相型が等しいことをいう．1 次元の結び目において，その結び目が自明であることと，結び目群 (補空間の基本群) が $\mathbb{Z}$ と同型であることが必要十分条件である．これは結び目の近傍内で K と平行なロンジチュードを取ると，このロンジチュードが補空間内でディスクを張ることからわかる．3 次元以上の結び目では結び目群が $\mathbb{Z}$ となる結び目を構成できるため，基本群の情報だけでは完全に決定することはできない．2 次元では Unknotting conjecture と呼ばれ，位相的な埋め込みに関しては肯定的に解決されているが，滑らかな埋め込みに関しては未解決問題となっている [15]．

2 つ目は与えられた 2 つの結び目の位相型が等しいかどうかという問題である．2 つの結び目が等しいとき，その補空間は同相になるが，逆が一般には成り立つとは限らない．実際，2 次元以上の結び目に関しては，Gluck によって補空間が同相になる結び目は高々 2 種類あることが知られている [2]．この事実は 4 次元多様体の 2 次元結び目に沿ったある手術が向きを保つ同相類によって本質的には 2 種類しか存在しないことに由来する．また，Gordon と Plotnick によって補空間が同相であるが結び目の位相型が異なる 2 次元結び目の例が無限個存在することが知られている [9, 14]．彼らは結び目補空間のファイバー性を用いて結び目の位相型が異なることを示している．

先ほど上の手術は本質的に 2 種類あると述べたが，1 つは自明な貼り合わせを行うものであり，結び目の位相型が変わらないことは明らかである．よってもう 1 つの自明でない手術によって結び目の

位相型が変化するかどうかという問題は素朴な疑問である．この自明でない手術を本稿では Gluck twist と呼ぶことにする．注意として，具体的な Gluck twist の定義は 3 章で述べるが，Gluck twist を行うと結び目の位相型だけでなく，全空間である S^4 自体が変化する可能性がある．実際，異種微分構造を持つ S^4 を構成する候補として Gluck twist による手術は研究されており， S^4 が異種瓶分構造を持つかどうかは未解決問題として Kirby の問題集に取り上げられている [7]．注意として 任意の 2 次元結び目に対し，その結び目に沿った Gluck twist により S^4 がホモトピー S^4 になることは知られている．

本稿では branched twist spin と呼ばれる 2 次元結び目に沿った Gluck twist を行なって得られる 2 次元結び目の位相型について述べる．Branched twist spin はその補空間に S^1 上のファイブレーション構造を持つ結び目であり，モノドロミーが周期的であることが知られている．このように補空間に S^1 上のファイブレーション構造を持つ結び目をファイバー結び目という． 1 次元結び目では，モノドロミーが周期的な結び目はトーラス結び目であり，branched twist spin はトーラス結び目に対応する 2 次元結び目の重要なクラスであると言える．

2 準備

滑らかな埋め込み $k : S^n \hookrightarrow S^{n+2}$ について， $k(S^n)$ を n 次元結び目といい，$\mathcal{K}$ と書く．結び目の位相型は次の同値類で定義する．$\mathcal{K}$ と $\mathcal{K}'$ を n 次元結び目とする．これらの結び目が同値であるとは，S^{n+2} 上の滑らかなアイソトピー $F : S^{n+2} \times I \to S^{n+2}$ が存在して， $F(x, 0) = x$ かつ $F(\mathcal{K}, 1) = \mathcal{K}'$ を満たすときをいい，$\mathcal{K} = \mathcal{K}'$ と書く．本稿では 1 次元結び目と 2 次元結び目を扱うが， 1 次元結び目を表す際には $\mathcal{K}$ の代わりに K と書くことにする．

Branched twist spin は S^4 上の S^1-作用を用いて定義される．作用について準備を行った後，branched twist spin の定義を述べる．

2.1 局所滑らかな作用

G をリー群とし，X を多様体とする．$f : G \times X \to X$ が任意の $g, h \in G$, $x \in X$ に対して，

(0) f は滑らかな写像,
(1) $f(g, f(h, x)) = f(gh, x)$,
(2) $f(e, x) = x$,

を満たすとき，f を X 上の G の左作用という．ここで e は G の単位元である．右作用も同様にして定義される．G の作用 f が与えられた位相空間 X を G -空間という．以下では作用 f は左右両側で定義されているものとし，混乱が起きないときは写像 f を明記せず $f(g, x)$ や $f(x, g)$ を単に gx や xg と書くことにする．

$x, y \in X$ に対し，

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{ある } g \in G \text{ が存在して } gx = y$$

という同値関係 $\sim$ による G -空間 X の商空間を X/G と書き，X の G-**軌道空間**という．G が明らかな場合には単に軌道空間と書くことにする．この商空間の各点の引き戻しは $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$

と表記できる．これを G による x の**軌道**という．また G の部分群 $G_x = \{g \mid gx = x\}$ を**安定部分群**という．各点の安定部分群の積集合 $\bigcap_{x\in X} G_x$ が自明な群 $\{e\}$ となるとき，作用は**効果的**であるという．特に全ての $x \in X$ に対して $G_x = \{e\}$ となるとき，作用は**自由**であるという．

X, Y を G -空間とする． 微分同相写像 $\phi : X \to Y$ が存在して，

$$\phi(gx) = g\phi(x)$$

が全ての $x \in X$ に対して成り立つとき，X と Y は **G-同値**であるという．また，微分同相写像 $\phi : X \to Y$ に対して $\psi \in Aut(G)$ が存在して，

$$\phi(gx) = \psi(g)\phi(x)$$

が全ての $x \in X$ に対して成り立つとき，X と Y は**弱 G-同値**という．

直積 $X \times Y$ への G -作用を $g(x, y) = (xg^{-1}, gy)$ で定義すると，$X \times Y$ も G -空間となる．この作用による商空間を $X \times_G Y$ と書く．商空間の同値類を $[x, y]$ と書くことにすると $[xg, y] = [x, gy]$ となることを注意しておく．作用が直交的であるとは作用の表現が直交群と同型になるときをいう．

次の補題からユークリッド空間上のコンパクトリー群による作用は常に直交的な作用としてよい．

補題 2.1. G をコンパクトリー群，$H \subset G$ を閉部分群とする．このとき，ある自然数 m と $v \in \mathbb{R}^m$ に対して $G_v = H$ となる表現 $\rho : G \to O(m)$ が存在する．

次に局所滑らかな作用を定義する．X を G -空間とし，X 内のある点 X の軌道 $G(x)$ を G/H -タイプとする．ここで，軌道 $G(x)$ が **G/H-タイプ**であるとは，$G_x = H$ となるときをいう．さらに，V をユークリッド空間で，V 上の H の作用は直交的であるとする．このとき $G(x)$ に関する**線形管**を

$$\phi : G \times_H V \to X$$

の像として定義する．また点 $y \in X$ の**線形スライス** S_y を

$$\psi : G \times_{G_y} S_y \to X; [g, s] \mapsto gs$$

が $G(y)$ の線形管と G -同値となるものとして定義する．各点で線形スライスが存在するとき X を**局所滑らか**であるという．注意として，$G \times_H V \to X$ は G/H 上の V 束なので $G \times_H V$ は多様体である．したがって滑らかな作用を持つ空間 X は多様体でなくてはならない．

一般に作用と軌道空間が与えられたときに，全空間がどのようになっているかわからない．しかし主 S^1 束については次が成立する．

補題 2.2. $\mathcal{P}(S^1, M)$ を M 上の主 S^1 束全体の集合とする．このとき，$\mathcal{P}(S^1, M) = H^2(M; \mathbb{Z})$.

2.2 Branched twist spin の定義

局所滑らかで効果的な S^1 作用をもつ S^4 を考える．このとき，軌道空間は D^3 か S^3 になることが Montgomery と Yang によって知られている [12]．軌道空間が D^3 の場合には例外軌道がなく，固定点集合の像 F^* が $\partial D^3 = S^2$ となる．軌道空間が S^3 の場合には固定点集合 F は 2 点からな

り，例外軌道は高々 2 種類存在する．本稿では例外軌道が 2 種類存在するときを考える．例外軌道をそれぞれ $\mathbb{Z}_m$-タイプ，$\mathbb{Z}_n$-タイプとし，それぞれの例外軌道の集合を E_m, E_n と書く．ここで m, n は互いに素な整数である．以下，簡単のため m, n は互いに素な自然数とする．E_m, E_n の軌道空間内の像をそれぞれ E_m^*, E_n^* と書く．同様に固定点集合 F の軌道空間内の 像を F^* と書くことにする．Fintushel によって，$E_m^* \cup E_n^* \cup F^*$ は軌道空間 S^3 内で 1 次元結び目になっていることが知られている [3]．(例として図 1 を参照．) また各 $E_m \cup F$, $E_n \cup F$ は S^2 と同相であり，2 次元結び目である．

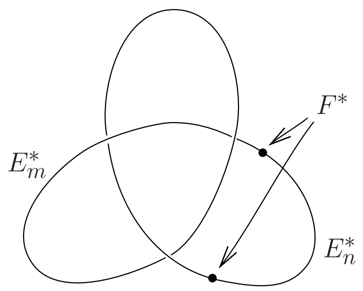

図 1　軌道空間 S^3 内の例外軌道と固定点の像

上記から branched twist spin は次のように定義される．

定義 2.3 (Branched twist spin)**.** $S^1 \curvearrowright S^4$ を局所滑らかで効果的な作用，2 つの例外軌道をそれぞれ E_m, E_n とし，$K = E_m^* \cup E_n^* \cup F^*$ とする．$E_m \cup F$ と $E_n \cup F$ をそれぞれ K の branched twist spin といい $K^{n,m}, K^{m,n}$ と書く．

注意 2.4. (1) 上の定義の K は任意の 1 次元結び目を与えることができる．
(2) S^4 上の局所滑らかで効果的な S^1-作用を 1 つ与えると，S^4 内には 2 つの branched twist spin の組 $(K^{m,n}, K^{n,m})$ が定義されている．この組に現れる m, n は互いに連動している．つまり，“適切な意味”で $K^{m,n}$ が $K^{m',n}$ に置き換わったとすると，同時に $K^{n,m}$ は $K^{n,m'}$ に置き換わる．

作用を用いて軌道空間である S^3 から S^4 を構成する．まず S^3 を軌道の種類によって次の 5 つのパーツに分ける．$E_m^* \cup E_n^* \cup F^* = K \subset S^3$ を 1 次元結び目，

$$S^3 = X \cup (E_m^{c*} \times D^2) \cup (E_n^{c*} \times D^2) \cup D_1^{3*} \cup D_2^{3*}.$$

ここで， D_1^{3*}, D_2^{3*} は F^* の 2 点それぞれの近傍 ， E_m^{c*}, E_n^{c*} は それぞれ E_m^*, E_n^* 内のコンパクト部分集合，X は K の結び目補空間である．

X の任意の点は S^4 内の自由な S^1 作用による軌道の像なので，特に主 S^1 束である．ポアンカレ双対より $H^2(X; \mathbb{Z}) = H_1(X, \partial X; \mathbb{Z}) = 0$ となるため，補題 2.2 より X の作用による逆像は直積 $X \times S^1$ となる．

次に D_1^{3*}, D_2^{3*} について作用による逆像を考える．D_1^{3*}, D_2^{3*} は中心が固定点の像である 3 次元球体であり，中心以外は自由な作用による像である．S^4 内の固定点 F は 2 点からなる．その近傍である 4 次元球体をそれぞれ D_1^4, D_2^4 とする．境界 ∂D_i^4 $(i = 1, 2)$ には自由な S^1 作用が入っており，D_i^4 上の作用はこの自由な作用の錐を取ることで得られる．

次に $E_m^{c*} \times D^2$ について作用による逆像を考える．E_m^{c*} 上の点 z_m^* を取り，S^3 内で $z_m^* \in E_m^{c*}$ を中心とし，E_m^{c*} と横断的に交わるディスクを $D_{z_m^*}^{2*}$ とする．このディスクは z_m^* 以外の例外軌道の像を含まないように取れる．$D_{z_m^*}^{2*}$ の作用による引き戻しは $\mathbb{Z}_m$ -タイプの例外軌道を中心に持つトーラス体 V_m である．同様に $E_n^{c*} \times D^2$ についても S^3 内で $z_n^* \in E_n^{c*}$ を中心とし，E_n^{c*} と横断的に交わるディスクを $D_{z_n^*}^{2*}$ とする．$D_{z_n^*}^{2*}$ の作用による引き戻しは $\mathbb{Z}_n$ -タイプの例外軌道を中心に持つトーラス体 V_n である．

以上のことから S^4 は次の 5 つのピースに分解できる．

$$S^4 = (B_1^4 \cup B_2^4) \cup (\partial D_m^2 \times E_n^{c*} \times D_n^2) \cup (D_m^2 \times E_m^{c*} \times \partial D_n^2) \cup (X \times S^1). \tag{2.1}$$

それぞれのピースには S^1-作用が与えられているので，座標を与え作用が適合するような貼り合わせを考えることで，貼り合わせ写像を具体的に書き下すことができる．貼り合わせ写像の細かい議論に関しては， 例えば [4] を参照されたい．

2.3 Gluck twist と主定理

Gluck twist とは 4 次元多様体の重要な手術の 1 つとして知られており．1 章でも述べたが， 一般に 2 次元結び目に沿った Gluck twist によって S^4 が変化することがあるかどうかは知られていない．Pao によって branched twist spin に沿った Gluck twist は S^4 を変えないことが知られているので，以下の議論は全空間が常に S^4 であることが保証される [13]．

Gluck twist を定義する．Gluck twist とは S^4 から 2 次元結び目 $\mathcal{K}$ の近傍を取り除き，ある非自明な写像によって貼り戻す操作のことである．Gluck はこの貼り戻す写像が向きを保つ同相類を除いて 2 種類しかないことを示した．1 つは自明な貼り戻しで，もう一つは次の写像 $\tau = \nu \cup \nu'$ で定義される：

$$\nu(x, (r, \theta), \phi) = (x, (r, \theta - \phi), \phi) \qquad (x, (r, \theta), \phi) \in (\partial D^1 \times D^2) \times S^1 \subset S^2 \times S^1,$$
$$\nu'(x, \theta, \phi) = (x, \theta - \phi, \phi) \qquad (x, \theta, \phi) \in (D^1 \times \partial D^2) \times S^1 \subset S^2 \times S^1.$$

この τ による貼り戻しによって出来上がる 4 次元多様体を $\Sigma(\mathcal{K})$ と書く．

筆者は branched twist spin に沿った Gluck twist について次の結果を得た．

定理 2.5. $K^{m+n,n}$ は $K^{n,m}$ に沿った Gluck twist による $K^{m,n}$ の像として得られる．

証明の概略. $\Sigma(K^{n,m})$ は Pao によって S^4 と微分同相であることが示されているので，$\Sigma(K^{n,m})$ 全体に S^1-作用があると $\Sigma(K^{m,n})$ 内に branched twist spin が定義できる．(2.1) のうち，$(B_1^4 \cup B_2^4) \cup (\partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times D_n^2)$ は $N(K^{n,m})$ の分解であり，$(D_m^2 \times E_n^{c*} \times \partial D_n^2) \cup (X \times S^1)$ は補空間の分解である．Gluck twist の定義から $(D_m^2 \times E_n^{c*} \times \partial D_n^2) \cup (X \times S^1)$ 上の S^1-作用は変化しないので，この作用が $(B_1^4 \cup B_2^4) \cup (\partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times D_n^2)$ 内の作用に拡張できることを示す．実際，貼り合わせ写像と Gluck twist の定義式を用いて $(B_1^4 \cup B_2^4) \cup (\partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times D_n^2)$ 上の S^1-作用は $\mathbb{Z}_{m+n}$-タイプの例外軌道が存在し，残りは自由である S^1-作用を定義できることが確認できる．$K^{m,n}$ の補空間である $(D_m^2 \times E_m^{c*} \times \partial D_n^2) \cup (X \times S^1)$ には最初から $\mathbb{Z}_n$-タイプの例外軌道が存在するので，$\Sigma(K^{n,m})$ 上には 2 種類の例外軌道をもつ S^1-作用を考えることができる．特に，$K^{n,m}$ の Gluck twist による

像は固定点は変わらず，例外軌道のタイプが $\mathbb{Z}_m$ から $\mathbb{Z}_{m+n}$ に変化しただけである．軌道空間に関しては，図 2 のように K の位相型を変えず Gluck twist が行われていることに注意すると， $K^{n,m}$ の Gluck twist による像は $K^{n,m+n}$ であることが確かめられる．

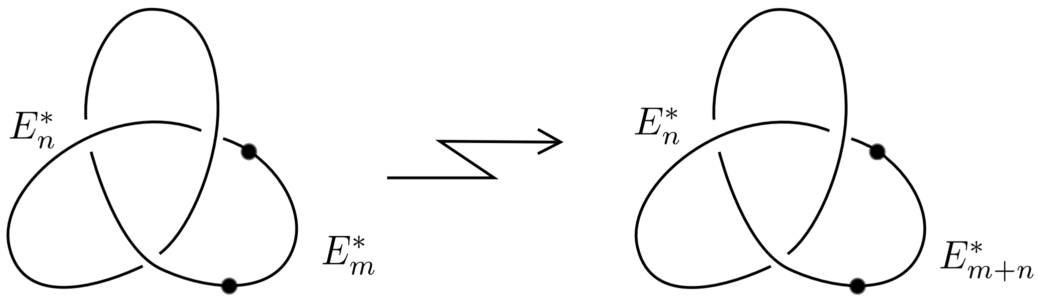

図 2　Gluck twist による軌道空間の変化

したがって，対の片方である $K^{m,n}$ は Gluck twist によって $K^{m+n,n}$ に移る．　□

この定理の系を紹介して本稿の終わりとする．Plotnick はモノドロミーの位数が奇数の非自明な 2 次元ファイバー結び目は Gluck twist によって結び目が必ず変化することを示した [14]．これは補空間が同相だが結び目の同値類がことなるということを述べている．一般に，Gluck twist による 2 次元結び目の像がどのような結び目であるかは知られていない．Branched twist spin $K^{m,n}$ は 2 次元ファイバー結び目であり，そのモノドロミーの位数は m であるので，定理 2.5 に Plotnick の結果を適用することで次の系を得る．

系 2.6. m が奇数であり，$K^{m,n}$ は非自明な 2 次元結び目とする．このとき $K^{m,n}$ と $K^{m,m+n}$ は同相な補空間をもつが，異なる結び目である．

参考文献

[1] G. E. Bredon, Introduction to compact transformation groups, Academic Press, New York-London Pure and Applied Mathematics, Vol.46, 1972.

[2] H. Gluck, *The embedding of two-spheres in the four-sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962) 308–333.

[3] R. Fintushel, *Locally smooth circle actions on homotopy 4-spheres*, Duke Math. J. **43** (1976), 63–70.

[4] M. Fukuda, *The Gluck twist on branched twist spins*, arxiv:1811.05109.

[5] R. H. Fox, *Rolling*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 162–164.

[6] R. Jacoby, *One-parameter transformation groups of the three-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 131–140.

[7] R. Kirby,(Ed.) *Problems in Low-Dimensional Topology*, 1995. http://www.math.berkeley.edu/~kirby/.

[8] J. A. Hillman and S. P. Plotnick, *Geometrically fiberd two-knots*, Math. Ann. **287** (1990) 259–273.

[9] C. McA. Gordon, *Knots in the 4-sphere*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), 585–596.

[10] C. McA. Gordon, *On the reversibility of twist-spun knots*, J. Knot Theory Ramifications **12**, (2003) 893–897.

[11] C. Gordon and J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, J. Amer. Math. Soc. **2** , no. 2 (1989), 371–415.

[12] D. Montgomery and C. T. Yang, *Groups on S^n with principal orbits of dimension n-3*, **I**, **II**, Illinois J. Math. **4** (1960), 507–517. ; **5** (1961), 206–211.

[13] P. S. Pao, *Non-linear circle actions on the 4-sphere and twisting spun knots*, Topology **17** (1978), 291–296.

[14] S. Plotnick, *The homotopy type of four-dimensional knot complements*, Math. Z. **183** (1983), 447–471.

[15] J. Stallings, *On topological unknotted spheres*, Ann. of Math. Second Series, Vol. 77, no.3, May, 1963, pp. 490–503.

[16] E. C. Zeeman, *Twisting spun knots*, Trans. Am. math. Soc. **115** (1965), 471–495.