

Gluck Surgery によって得られる 4 次元ホモトピー球面の 微分同相型について

東京工業大学理学院数学系数学コース

伊勢彩夏 (Ayaka ISE)

1 はじめに

4 次元球面 S^4 を, そこに埋め込まれた 2-knot に沿って Gluck surgery をすると, 4 次元ホモトピー球面が得られることが知られている. Gluck surgery とは, S^4 に埋め込まれた 2-knot K に対し, K を管状近傍ごと S^4 から取り去り, 恒等写像に isotopic でない微分同相写像によって接着し直す操作のことである. この操作によって得られた 4 次元ホモトピー球面 ($=: M_K$) が S^4 と微分同相であるかどうかは一般にはわかっていない. しかし, 2-knot が ribbon (Gluck の定理 [2]) や twist spun (Gordon の定理 [3]) のときに関しては, M_K は S^4 と微分同相であることがわかっている. 2 つの 4 次元多様体が微分同相であるかどうかの判定方法として, Kirby calculus がある. 4 次元多様体の図示法である Kirby diagram が, Kirby calculus と呼ばれる微分同相を保つ変形を行うことで移り合えば, その 2 つの 4 次元多様体は微分同相ということができる.

本稿では一般の m -twist spun 2-knot に関して, その ch -diagram から M_K の Kirby diagram を構成し, Kirby calculus の拡張である relative Kirby calculus によって M_K が S^4 と微分同相であることを示す.

2 Kirby calculus

2.1 handle

定義 2.1 (handle) $0 \leq k \leq n$ ($k, n \in \mathbb{Z}$), X をコンパクト n 次元 C^∞ -級多様体とする. このとき, n 次元 k -handle ($:= h^k$) とは, 埋め込み $\varphi: \partial D^k \times D^{n-k} \rightarrow \partial X$ によって X の境界に接着される $D^k \times D^{n-k}$ のコピーのことである.

以下は handle に関する基本的な用語の定義である.

$\partial D^k \times \{0\}$: attaching sphere $\{0\} \times \partial D^{n-k}$: belt sphere

$\partial D^k \times D^{n-k}$: attaching region

定義 2.2 (handle 分解) X をコンパクト n 次元 C^∞ -級多様体で, ∂X がコンパクトな部分多様体 $\partial_+ X$ と $\partial_- X$ の直和で表されるとする. このとき, X は, $[0, 1] \times \partial_- X$ に handle をいくつか接着して得られたものと微分同相である. ただし, $\{0\} \times \partial_- X$ は $\partial_- X$ に対応しているものとする. これを $\partial_- X$ 上の relative handle body という. $\{0\} \times \partial_- X = \emptyset$ のときは単に handle body という. また, X と微分同相な (relative) handle body を求めることを $(X, \partial_- X)$ の handle 分解という.

2.2 Kirby diagram

X がコンパクトで連結な C^∞ -級の 4 次元多様体で, $\partial_- X = \emptyset$ とする. X の handle body は 0-handle をただ 1 つだけ持ち, 1,2,3,4-handle を適当に ∂h^0 に接着することで X の handle body が得られる. $\partial h^0 = \partial D^4$ を $\mathbb{R}^3 \cup \infty$ として, $\mathbb{R}^3$ 内に 1,2,3,4-handle の attaching region を図示したものを Kirby diagram という. $\partial_+ X = \emptyset$ であるとき, 1,2-handle の接着の様子がわかれば 3,4-handle の接着の仕方が一意に定まる (Laudenbach-Poenaru [1]) ことから, 3,4-handle の attaching region は描く必要はなく, いくつあるかだけわかるようにすればよい.

1,2-handle が Kirby diagram でどのように図示されるかを述べる. 1-handle の attaching region は, 定義より $\partial D^1 \times D^3 = \{\pm 1\} \times D^3$ であるため, 2 つの ball を図示すればよい. また, 2 つの ball の代わりに dotted circle で 1-handle を表すこともできる.

2-handle の attaching region は, 定義より $\partial D^2 \times D^2 = S^1 \times D^2$ (=ソリッドトーラス) である. 簡単の為, 中心線である $S^1 \times \{0\}$ を描くことでソリッドトーラスを表す. 中心線だけでは接着写像の isotopy 類が決定できないので, framing を一つ決める必要がある. よって, 2-handle の attaching region は framing を表す数 (framing coefficient) を付けた knot として表される. 2-handle が複数ある場合, それらの knot は link になっている場合がある.

以上より, $\mathbb{R}^3$ 内の 1,2-handle の attaching region を表す link diagram に, 3,4-handle がいくつ付いているかわかるように描いたものが Kirby diagram となる.

2.3 Kirby calculus

Kirby calculus とは, handle の slide と cancel によって Kirby diagram を変形していくことである. slide と cancel は微分同相型を変えない操作であるため, Kirby calculus によって 2 つの Kirby diagram が移り合う場合, それらの diagram が表す 4 次元多様体は微分同相である.

定義 2.3 (slide) h_1, h_2 を k -handle ($0 < k < n$) で, ∂X に接着されているものとする. h_2 上の h_1 の slide とは, h_1 の attaching sphere を $\partial(X \cup h_2)$ 上で滑らせて h_2 の belt sphere を通ったのち完全に分離することである.

slide という操作が Kirby diagram 上でどのように表されるかを述べる. handle 分解の特性上, 1-handle を 2-handle に slide することはできない. 従って, Kirby calculus においては, 1 (or 2) -handle 同士の slide か 2-handle を 1-handle に slide させるという操作しか扱わない.

2 つの handle h_1, h_2 が, framed knot K_1, K_2 で表されているとする. ただし, h_1 が 1-handle の場合は framing coefficient が 0 の knot として考える. K_2 の framing を表す平行曲線を K'_2 とする. このとき, h_2 上の h_1 の slide とは, K_1 を K_1 と K'_2 の band 和に取り替えることである.

K_1 と K_2 にあらかじめ向きを定めておく. K_2 と K'_2 の向きが等しいとき, この動かし方のことを handle addition, 逆向きのときは handle subtraction という.

handle を slide させると, framing が変化する. K_1, K_2 の framing coefficient をそれぞれ n_1, n_2 とし, h_1 を h_2 に slide させると, n_1 は以下のように変化する (n_2 は変化しない).

$$\text{addition} \quad : \quad n_1 + n_2 + 2lk(K_1, K_2)$$

$$\text{subtraction} \quad : \quad n_1 + n_2 - 2lk(K_1, K_2)$$

定義 2.4 (cancelling pair) $0 \leq k \leq n$ として, h^{k-1} の belt sphere と h^k の attaching sphere が一点で横断的に

交わる時、 h^{k-1} と h^k を cancelling pair という。

cancelling pair h^{k-1} と h^k に対して、 $X \cup h^{k-1} \cup h^k$ と X が微分同相になることから、diagram 内に cancelling pair がある場合、それらを cancel することができる。4次元の場合、cancelling pair は h^1 と h^2 、 h^2 と h^3 、 h^3 と h^4 の3種類がある。

$\mathbb{CP}^2$ や $\overline{\mathbb{CP}^2}$ との connected sum を考えると、 $\mathbb{CP}^2$ や $\overline{\mathbb{CP}^2}$ の Kirby diagram は ± 1 -unknot であるので、元の diagram に ± 1 -unknot を付け加えればよい。 ± 1 -unknot を付け加えたのち、他の handle を slide させる操作を blow up、もともとある ± 1 -unknot に他の handle を slide させたのち ± 1 -unknot を消去する操作を blow down という。

2.4 Dehn surgery

定義 2.5 (Dehn surgery) M を向き付けられた3次元多様体、 K を M 内の knot とする。 K の closed な管状近傍 νK は $S^1 \times D^2$ と微分同相である。このとき、 K 上の Dehn surgery とは、 M から $\text{int } \nu K$ を取り去り、微分同相写像 $\varphi: \partial(S^1 \times D^2) \rightarrow \partial \nu K$ によって $S^1 \times D^2$ を接着し直す操作のことである。

$S^1 \times D^2$ の接着の仕方によって、coefficient $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cup \infty$ が決まる。coefficient が整数のときを integral surgery、整数でないときを rational surgery という。

定理 2.6 任意の向き付けられた3次元閉多様体は、コンパクトで向き付けられた4次元多様体の境界になっている。

系 2.7 任意の向き付けられた連結な3次元閉多様体は S^3 内の link 上の integral surgery として表すことができる。

surgery diagram における coefficient は、Kirby diagram での framing coefficient と混同を避けるために $\langle \rangle$ を付けて表すことにする。

2.5 Relative Kirby calculus

2.5.1 Relative Kirby diagram

X をコンパクトで連結な4次元多様体とする。これまでの handle body の説明では $\partial_- X = \emptyset$ を仮定していたが、ここでは $\partial_- X \neq \emptyset$ とする。 $\partial_- X$ は $\mathbb{R}^3$ 上の rational (or integral) surgery diagram として表される。この diagram 上に 1,2,3,4-handle を Kirby diagram として描いた図を、 $(X, \partial_- X)$ の relative Kirby diagram と呼ぶ。relative Kirby diagram 上での handle の動かし方には次のような規則がある。

- handle は Kirby diagram で扱ったのと同様の動かし方ができる。
- $\partial_- X$ の link の component 同士を slide させることができる。
- $\partial_- X$ の link を Kirby diagram の handle に slide させることはできない。

2.5.2 upside down

upside down とは、handle body の double をとった後、元の handle body を取り除くことによって、handle body の上下を反転させる操作である。具体的には以下の手順で行う。ここでは、 $(X, \partial_- X)$ に 3,4-handle が存

在しない場合のみ考える．コンパクトな多様体の組 $(X, \partial_- X)$ の double とは、 $D(X, \partial_- X) = (X \cup_{id_{\partial_+ X}} \bar{X}, \partial_- X)$ のことである． $(X, \partial_- X)$ の double をとると、次のように $(X, \partial_+ \bar{X})$ を誘導する．まず、0-handle がある場合は 4-handle を誘導する．次に 1-handle は 3-handle を誘導する．また、2-handle は core と cocore が逆転した 2-handle を誘導する．従って、4次元多様体の double をとると、Kirby diagram 内では 0-handle があれば 4-handle を加え、1-handle の個数と同じ数の 3-handle を加え、2-handle の attaching circle に 0-framed meridian を描き加えればよい．その後、もともとあった $(X, \partial_- X)$ を取り除けば、upside down が完了する．Kirby diagram 内では 1-handle を表す dotted circle を $\langle 0 \rangle$ -framed unknot に変え、もともとあった 2-handle の framing coefficient に $\langle \rangle$ を付ければよい．

3 Gluck surgery と Kirby diagram

定義 3.1 (Gluck surgery) M を C^∞ -級 4 次元多様体とする．滑らかな写像 $f: S^2 \times D^2 \rightarrow M$ で $S^2 \times D^2$ を M に埋め込む． $\text{Int}f(S^2 \times D^2)$ を取り去り、恒等写像に isotopic でない微分同相写像 $h: \partial(S^2 \times D^2) \rightarrow \partial(M - \text{Int}f(S^2 \times D^2))$ で貼り直すことを $f(S^2 \times D^2)$ に沿う M の Gluck surgery という．

M 内の 2-knot K に対し、 $\nu K = S^2 \times D^2$ とすると、 K に沿う M の Gluck surgery とは $f(S^2 \times D^2)$ に沿う Gluck surgery のことである． K に沿う M の Gluck surgery によって得られる 4 次元多様体を M_K とする． K のモーションピクチャーにでてくる saddle band をある時点にまとめた図である ch-diagram という M_K の Kirby diagram は、 K のモーションピクチャーに現れる全ての saddle band を 1 つの図にまとめたものである ch-diagram から次の手順で構成することができる．

1. ch-diagram の band を 0-framed unknot に変える．
2. ch-diagram にもともとあった component に dot をつける．
3. dotted circle のどれかひとつに 1 or -1-framed meridian をつける．
4. (band の数) - (dotted circle の数) + 1 だけ 3-handle を加える．
5. 4-handle を 1 つ加える．

4 Sketch of Kirby calculus for M_K

Meier と Zupan[4] が構成した ch-diagram より、m-twist spun 2-knot K に沿って得られる 4 次元ホモトピー球面 M_K の Kirby diagram を構成する．

M_K の Kirby diagram から 0,1,3,4-handle を取り除いて cobordism W_m を作る．0,1-handle を取り除いた跡は surgery diagram で表すことができる．すると W_m は relative Kirby diagram で表せる． W_m を up side down をすることで handle の数を増やし、blow down できる形にもっていき、blow down によって m 回フルツイストを $m-1$ 回フルツイストにする．さらにもう一度 up side down してうまく handle を slide させると余分な handle が外れて cancel できるようになる．すると W_m を 2 回 up side down したものを W_{m-1} の形に変形できる． W_m を 2 回 up side down したものは W_m に他ならないので W_m と W_{m-1} が微分同相であることわかる．すると帰納的に W_m と W_1 が微分同相とわかる．Laudenbach-Poenaru [1] より、cobordism 同士が微分同相であるならば元の多様体同士も微分同相である．cobordism W_1 に 0,1,3,4-handle を戻したものは 1-twist spun 2-knot であるので、m-twist spun 2-knot に沿う Gluck surgery によって得られる 4 次元多様体は 1-twist spun 2-knot に沿う Gluck surgery によって得られる 4 次元多様体と微分同相である．1-twist spun 2-knot は自明な

2-knot であり, 自明な 2-knot に沿う Gluck surgery によって得られる 4 次元多様体は S^4 と微分同相であることから m -twist spun 2-knot に沿う Gluck surgery によって得られる 4 次元多様体は S^4 と微分同相であることがわかる.

参考文献

- [1] F. Laudenbach and V. Poénaru, *A note on 4-dimensional handlebodies*, Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 337–334.
- [2] H. Gluck, *The embeddings of 2-spheres in the 4-sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. **104**(1962), 308–333.
- [3] C. McA. Gordon, *Knots in the 4-sphere*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), no. 4, 585–596.
- [4] J. Meier, A. Zupan, *Bridge trisections of knotted surfaces in S^4* , Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), no. 10, 7343–7386.