Simplified trisection map の弧の逆像として得られる閉 3 次元多様体について

浅野　喜敬 (ASANO Nobutaka)*

本稿では断りのない限り，X は連結で向き付け可能かつ滑らかな閉 4 次元多様体，M は連結で向き付け可能かつ滑らかな閉 3 次元多様体，Σ_g を種数 g の向き付け可能閉曲面とする．また，$\simeq$ は微分同相，$\sharp^k A$(resp. $\natural^k A$) は k 個の A の連結和 (resp．境界連結和) を表す．

1　序文

低次元多様体論において，多様体の微分同相類の表示を与える研究がいくつか知られている．これは多様体の位相型の解析を行う上で重要である．表示を与える多様体の分割の例として，3 次元多様体 M を 2 つの $\natural^k(S^1 \times D^2)$ に分割する Heegaard 分解が古典的に知られている．Heegaard 分解により，M の持つ 2-ハンドルの接着円周が種数 g の向き付け可能閉曲面 Σ_g 上の g 個の単純閉曲線として表示される．

近年，閉 4 次元多様体を 3 つの $\natural^k(S^1 \times D^3)$ に分割する trisection が Gay-Kirby により導入され [2]，注目を集めている．Trisection は Heegaard 分解の 4 次元多様体への類似であり，trisection により 4 次元多様体の 2-ハンドルの接着円周が Σ_g 上の単純閉曲線の 3 つの族として表示される．一方で，trisection は 4 次元多様体から $\mathbf{R}^2$ へのある安定写像として定義することができる．この安定写像のことを trisection map と呼ぶ．Baykur-Saeki は，trisection map の特異値集合がある条件を満たすものを simplified trisection map と呼び，すべての閉 4 次元多様体がある simplified trisection map を持つことを示した [1].

$f : X \to \mathbf{R}^2$ を simplified trisection map，$I \subset f(X)$ を適切に埋め込まれたジェネリックな弧とする．このとき $f^{-1}(I)$ は閉 3 次元多様体を定める (詳細は 5 主結果を参照)．本稿では，f が種数 2 の simplified trisection map であるとき，$f^{-1}(I)$ として現れ得る閉 3 次元多様体を決定したのでこれを紹介する．

また，section が 4 つである安定写像 $f : X \to \mathbf{R}^2$ に対して，$f^{-1}(I)$ として無限個の異なる双曲多様体が得られることが分かったので，これについても紹介する．

2　Trisection の定義

定義 1 ($\boldsymbol{(g,k)}$**-trisection**).

$0 \leq k \leq g$ を自然数とする．組 (X, X_1, X_2, X_3) が次の (1)，(2)，(3) を満たすとき，この組を $\boldsymbol{(g,k)}$**-trisection** であるという．

* 東北大学大学院理学研究科数学専攻, E-mail : nobutaka.asano.r4@dc.tohoku.ac.jp

(1) $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$
(2) 各 $i = 1, 2, 3$ について，$\phi_i : X_i \simeq \natural^k(S^1 \times B^3)$ である．
(3) 各 $i = 1, 2, 3$ について，(3 を法として) $\phi_i(X_i \cap X_{i+1}) = Y_{k,g}^-$
かつ $\phi_i(X_i \cap X_{i-1}) = Y_{k,g}^+$
(ただし，$\sharp^k(S^1 \times S^2) = Y_{k,g}^+ \cup Y_{k,g}^-$ は種数 g の標準的な Heegaard 分解である．)

3 次元多様体において，2-ハンドルの接着円周を種数 g の向き付け可能閉曲面 Σ_g 上に表示したものを Heegaard 図式と呼んでいた．これと同様に，4 次元多様体に対しても，4 次元の 2-ハンドルの接着円周を曲面上に表示したものを考えることができる．これは次に述べる **trisection** 図式である．

定義 2 (**trisection** 図式)**.**
$\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_g\}$，$\beta = \{\beta_1, ..., \beta_g\}$，$\gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_g\}$ を Σ_g 上の単純閉曲線の族とする．各 $(\Sigma_g, \alpha, \beta)$，$(\Sigma_g, \beta, \gamma)$，$(\Sigma_g, \gamma, \alpha)$ が $\sharp^k S^1 \times S^2$ の種数 g の Heegaard 図式であるとき，組 $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$ を **trisection** 図式という．

(g, k)-trisection(X, X_1, X_2, X_3) が与えられた時，定義 1.(3) の条件から，$\sharp^k(S^1 \times S^2)$ の 3 つの Heegaard 図式 $(\Sigma_g, \alpha, \beta)$，$(\Sigma_g, \beta, \gamma)$，$(\Sigma_g, \gamma, \alpha)$ が定まる．これらを 1 つの曲面上に表示したものを $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$ と書くと，これは trisection 図式であり，(trisection 図式の安定化・ハンドルスライドの違いを除いて) 一意に定まる．逆に，trisection 図式 $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$ が与えられると，$\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_g\}$，$\beta = \{\beta_1, ..., \beta_g\}$，$\gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_g\}$ を接着円周とする 2-ハンドルを $\Sigma_g \times D^2$ の境界 $\Sigma_g \times \partial D^2$ の部分集合 $\Sigma_g \times \{1\}$，$\Sigma_g \times \{e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}\}$，$\Sigma_g \times \{e^{\frac{4\pi\sqrt{-1}}{3}}\}$ に接着し，(フレーミングは surface framing により定める．) その後現れる $\sharp^k(S^1 \times S^2)$ を k 個の 3-ハンドルと 1 個の 4-ハンドルで埋めることにより，X が微分同相の違いを除いて一意に復元される．(この k 個の 3-ハンドルと 1 個の 4-ハンドルの埋め方は Laudenbach-Poenaru の定理 [3] により一意である．)

3　安定写像と折り目特異点とカスプ特異点

以下，$Sing(f) = \{p \in X \mid p$ は f の臨界点 $\}$ とする．

定義 3 (右左同値)**.**
$C^\infty(X^4, \mathbf{R}^2) = \{f : X^4 \to \mathbf{R}^2 \mid f$ は C^∞級写像 $\}$ に Whitney 位相を入れ，位相空間とする．$f, g \in C^\infty(X^4, \mathbf{R}^2)$ が右左同値とは，ある微分同相写像 $\varphi : X^4 \simeq X^4$, $\psi : \mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{R}^2$ が存在して，次が可換となることである．

$$\begin{array}{ccc} X^4 & \xrightarrow{\varphi} & X^4 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathbf{R}^2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{R}^2 \end{array}$$

定義 4 (安定写像)**.**
$f \in C^\infty(X^4, \mathbf{R}^2)$ について，ある $U_f \subset C^\infty(X^4, \mathbf{R}^2)$ が存在して，任意の $g \in U_f$ に対し f と g が右左同値であるとき f を安定写像と呼ぶ.

例えば，特異値が全て異なる Morse 関数は安定写像である．安定写像は Morse 関数の一般化

である．次に，trisection map を定義するために必要な折り目特異点とカスプ特異点について述べる．

定義 5 (不定値 (resp. 定値) 折り目特異点)**.**
$p \in Sing(f)$ とする．ある p の局所座標 (t,x,y,z) が存在して，$f(t,x,y,z)=(t,-x^2-y^2+z^2)$ (resp.$f(t,x,y,z)=(t,-x^2-y^2-z^2)$) であるとき，$p$ を**不定値 (resp. 定値) 折り目特異点**であるという．

定義 6 (カスプ特異点)**.**
$p \in Sing(f)$ とする．ある p の局所座標 (t,x,y,z) が存在して，$f(t,x,y,z)=(t,x^3-3xt+y^2-z^2)$ であるとき，p を**カスプ特異点**であるという．

図 1 は不定値折り目特異点の近傍におけるファイバーと特異値を通り過ぎた後のファイバーの形の変化を示したものである．図 1 の縦方向の座標が定義 5 における座標 t であり，黒太実線部が f の特異値集合を表している．図 1 の横方向の座標は $-x^2-y^2+z^2$ と与えられるため，点線の引き戻しに沿って 3 次元 2-ハンドルの接着が行われている．したがってファイバーの曲面では手術が行われ，図 1 のような変化が生じる．このときの 2-ハンドルの接着円周に対応するファイバー上の曲線 (図 1 で赤線で示される単純閉曲線) を**不定値折り目特異点の消滅サイクル**と呼び，値域上の点線を **reference path** と呼ぶ．定値折り目特異点の場合も同様にして，reference path の引き戻しに沿って 3 次元 3-ハンドルの接着が行われる．また，このとき図 2 の横方向の座標は $-x^2-y^2-z^2$ で与えられており，特異値はこの関数の最大値である．よって赤線を通過するとファイバーは空集合となり，図 2 のような変化が生じる．
カスプ特異点の近傍の像は図 3 である．黒太線部が特異値集合であり，特異値集合の尖点部では 2 本の不定値折り目特異点の像が接している．図 3 の reference path にしたがってファイバーを動かすと不定値折り目特異点の消滅サイクル a,b に沿って 3 次元 2-ハンドルの接着が行われファイバーが D^2 へと変化する．この時，a と b は geometric に 1 度だけ交わる．

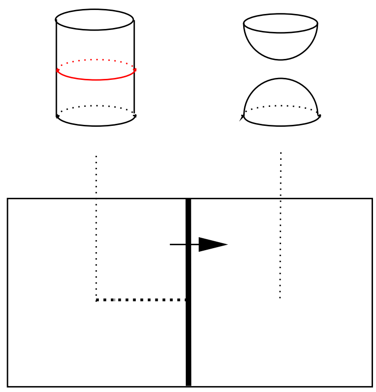

図 1: 不定値折り目特異値の近傍のファイバーの変化の様子.

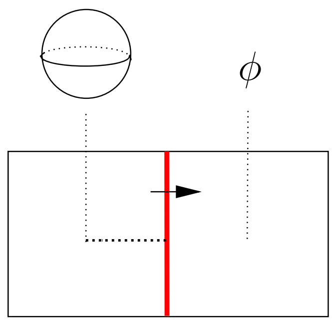

図 2: 定値折り目特異値の近傍のファイバーの変化の様子.

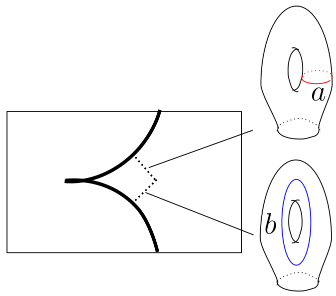

図 3: カスプ特異点の像の近傍のファイバーと消滅サイクル．

4　安定写像を用いた Trisection の定義と simplified trisection

定義 7 (**(g,k)-trisection**)**.**

安定写像 $f : X \to D^2$ の特異値集合が図 4 で与えられるとき，f を **(g,k)-trisection map** という．(このとき $\boldsymbol{X}$ は **(g,k)-trisection** を許容するという．)

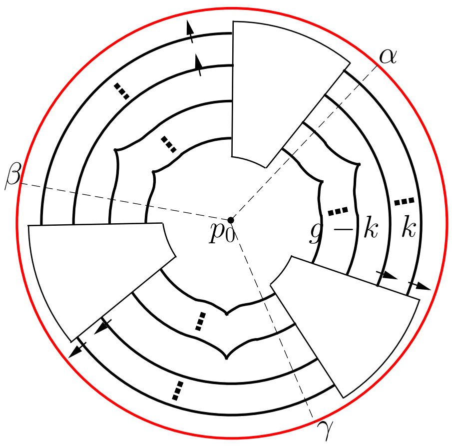

図 4: (g,k)-trisection map の特異値集合．

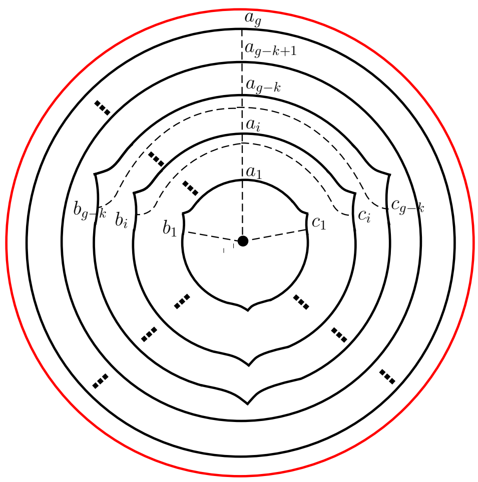

図 5: simplified (g,k)-trisection map の特異値集合．

図 4 の一番外側にある赤い円周は定値折り目特異点の像を表し，内側には不定値折り目特異点やカスプ特異点の像が描かれている．その内，外側の k 本は不定値折り目特異点の像で，内側の $g-k$ 本にはそれぞれにカスプ特異点が 1 つずつ現れる．3 つの白い箱の内部は端点どうしが g 本の不定値折り目特異値集合のなすブレイドにより結ばれている．図 4 の白い箱の中の内部の不定値折り目特異点の像が互いに交わらず両側の端点を繋いでいる trisection map を **simplified trisection map** という [1].

さらに，$f^{-1}(p_0) \simeq \Sigma_g$ である．これは半径方向の reference path に沿ってファイバーを動かすと，先のセクションでの観察により，外側から順に，空集合，$S^2, T^2, \ldots, \Sigma_g$ と変化することからしたがう．

定義 7 における (g,k)-trisection f から X の (g,k)-trisection(X, X_1, X_2, X_3) と trisection diagram $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$ を次のようにして得ることができる．まず，図 4 の reference pathα, β, γ に沿って値域の D^2 を 3 つのセクターに分割する．各セクターの引き戻しはは $\natural^k(S^1 \times B^3)$ と微分同相である．さらに，reference pathα, β に沿って内側から外側にファイバーを動かすことで，不定値折り目特異点の消滅サイクルの族 $\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_g\}$，$\beta = \{\beta_1, ..., \beta_g\}$ を得る．これらは定義から Σ_g 上の cut system であり，$f^{-1}(\alpha \cup \beta) \simeq \sharp^k(S^1 \times S^2)$ であることから $(\Sigma_g, \alpha, \beta)$ は $\sharp^k(S^1 \times S^2)$ の Heegaard 図式を与える．reference path(β, γ)，(γ, α) についても同様に $(\Sigma_g, \beta, \gamma)$，$(\Sigma_g, \gamma, \alpha)$ が $\sharp^k(S^1 \times S^2)$ の Heegaard 図式を与える．以上から，trisection diagram $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$ が f より得られた．またこれらのことから各セクターの共通部分が定義 1(3) を満たすこともしたがう．逆に，定義 1 から図 4 を特異値集合とする安定写像を構成することもできる [2].

5 主結果

$f : X \to \mathbf{R}^2$ を simplified (g,k)-trisection map，$I \subset f(X) \simeq D^2$ を適切に埋め込まれた弧とする．I がカスプ特異値と交わらず，不定値折り目特異値と接点を持たないとき，I はジェネリックに位置するとよぶ．以下 $I \subset f(X)$ はすべて適切に埋め込まれたジェネリックに位置する弧とする．$f^{-1}(I)$ は次のようにして閉 3 次元多様体のハンドル分解を与える：$p \in I \cap f(X) \backslash f(Singf)$ として，$N_\epsilon(p) \subset I$ を p の I における ϵ 近傍とする．このとき ϵ を十分小さくとることで，$N_\epsilon(p) \simeq f^{-1}(p) \times [0,1]$ と仮定できる．$N_\epsilon(p)$ の端点をそれぞれ p_0, p_1 とおく．$\partial I = \{2pt.\}$ のどちらか片方と，p_i の 2 点を端点に持つ部分弧のうち，p_{i+1} を含まないものを I_i とする．ここで，$i = 0, 1 (mod\ 2)$ である．$I_0 \cap f(Singf)$ の各点に対応して 3 次元のハンドルが得られるが，これらを p_0 から順次 $f^{-1}(p_0) \times \{p_0\}$ へと接着する．同様の操作を I_1 に対しても行うことで 3 次元のハンドル体を構成することができる．以上の構成によって得られるハンドル体は p の取り方に依存しないことに注意する．

f が種数 2 の simplified trisection map であるとき，$f^{-1}(I)$ として現れ得る閉 3 次元多様体の位相型をすべて決定した．以下に主張を述べる．

定理 8. (主結果 1[A.]) $f : X \to \mathbf{R}^2$ を simplified $(2,0)$-trisection map とする．このとき $f^{-1}(I)$ として得られる閉 3 次元多様体は

$$S^3, S^1 \times S^2, \pm L(r^2, s), \pm L(t, 1)$$

のいずれかの有限個の連結和である。ただし、s は $r^2 \pm 1$ の約数である．

また，simplified trisection map のセクションの数を 4 つに増やした安定写像 $f : X \to \mathbf{R}^2$ を考えることで，次が得られた．

定理 9. (主結果 1[A.]) 次を満たす閉 4 次元多様体 $X(\simeq \sharp^2 S^2 \times S^2$ または $\sharp^2 \mathbf{CP}^2 \sharp^2 \overline{\mathbf{CP}^2})$ と無限個の安定写像の族 $\{f_i : X_i \to \mathbf{R}^2\}_{n \in \mathbf{N}}$ が存在する。

- f_i の特異値集合は図 6 で与えられる。
- $f_i^{-1}(I)$ は双曲多様体である．
- $i \neq j$ ならば $f_i^{-1}(I)$ と $f_j^{-1}(I)$ は同相でない。

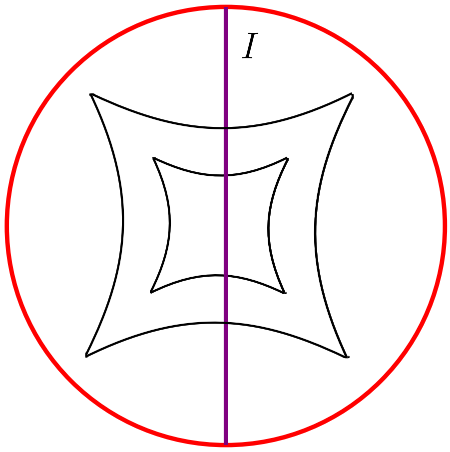

図 6

参考文献

[1] R. I. Baykur and O. Saeki, Simplifying indefinite fibrations on 4-manifolds, preprint, available at arXiv:1705.11169 [math.GT].

[2] D. Gay and R. Kirby, Trisecting 4-manifolds, *Geom. Topol.* **20** (2016), no. 6, 3097–3132.

[3] F. Laudenbach and V. Poénaru, A note on 4-dimensional handlebodies, *Bull. Soc. Math. France*, **100** (1972), 337–344.