

l_p -直積空間の集中

東北大学大学院理学研究科数学専攻

数川大輔 (Daisuke KAZUKAWA) *

概要

測度距離空間の収束概念の 1 つに集中と呼ばれる収束がある。集中は“現在研究されている最も弱い収束概念”の 1 つであり、次元が発散する空間列を収束列として許容するなど特徴的な性質を持つ。本発表では、「2 つの集中する空間列に対して、それらの l_p 直積空間の列は集中する」という結果について述べる。集中する測度距離空間列の (非自明な) 例を得ることは一般には難しいが、直積をとる操作で新しい集中列が構成できることが分かった。

1 導入

完備可分距離空間 (X, d_X) とその上の Borel 測度 m_X の 3 つ組 (X, d_X, m_X) を測度距離空間という。本稿では、確率測度 (すなわち、 $m_X(X) = 1$) を持つ測度距離空間のみを扱う。(確率) 測度距離空間 (の同型類) 全体の集合 $\mathcal{X}$ 上の距離として、ボックス距離 $\square$ とオブザーバブル距離 d_{conc} と呼ばれる 2 つの距離が Gromov によって [3] で導入された。

ボックス距離 $\square$ による位相は、多くの研究者によって同じ位相を与える距離や収束の概念 (例えば、Greven-Pfaffelhuber-Winter による Gromov-Prokhorov 距離 [2] や Gigli-Mondino-Savaré による pmG 収束 [1] など) が導入され、様々な研究がなされている。例えば、プレコンパクト性などの位相的性質の研究、幾何学的条件の保存性による極限空間の性質の研究、エネルギー汎関数の収束性などの解析的性質の研究などが挙げられる。

オブザーバブル距離 d_{conc} による位相は、 $\mathcal{X}$ 上の位相のうち、“現在研究されている最も弱い位相”の 1 つと言え、実際にボックス距離とオブザーバブル距離の間には、

$$d_{\text{conc}}(X, Y) \leq \square(X, Y)$$

という関係がある。 d_{conc} による位相は、Lévy-Milman による古典的な集中現象に基づいた空間収束の概念を与えることから、**集中位相**と呼ばれ、 d_{conc} による収束は**集中**と呼ばれる。集中位相の最大の特徴の 1 つは、次元が発散する空間列を収束列として許容することである。典型的な例として、球面列 $\{S^n(1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ がある。 $S^n(1)$ を $(n+1)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の n 次元単位球面とし、標準リーマン計量から定まる距離と確率測度に正規化された体積測度を持つ測度距離空間とみなす。その $n \in \mathbb{N}$ に関する列 $\{S^n(1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は 1 点から成る測度距離空間 $*$ に集中する。一方、 $\{S^n(1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は

* daisuke.kazukawa.s6@dc.tohoku.ac.jp, 本研究は特別研究員奨励費 (17J02121) の助成を受けたものである。

ボックス位相では発散することが知られている。ボックス位相に関する様々な性質が、集中位相でも同様に成り立つかという問題は、単純であるが実際の証明は困難な場合が多い。

ボックス距離とオブザーバブル距離の定義および性質は、本稿の2節で述べることにする。

次に、測度距離空間の l_p -直積について述べる。2つの測度距離空間 X, Y と $p \in [1, +\infty]$ に対し、 X と Y の l_p -直積空間と呼ばれる新たな測度距離空間 $X \times_p Y$ が次で定義される：

$$X \times_p Y := (X \times Y, d_{l_p}, m_X \otimes m_Y),$$

ただし、 d_{l_p} は、 $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ に対し、

$$d_{l_p}((x, y), (x', y')) := \begin{cases} (d_X(x, x')^p + d_Y(y, y')^p)^{\frac{1}{p}} & (p < +\infty \text{ のとき}) \\ \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\} & (p = +\infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定まる d_X と d_Y の l_p -直積距離であり、 $m_X \otimes m_Y$ は m_X と m_Y の直積測度である。

l_p -直積空間とボックス距離には次のような関係があることがそれぞれの定義から簡単に分かる。

命題 1.1. X, Y, Z, W を測度距離空間とする。任意の $p \in [1, +\infty]$ に対して、

$$\square(X \times_p Y, Z \times_p W) \leq \square(X, Z) + \square(Y, W)$$

が成り立つ。

この不等式は次のような l_p -直積空間列の収束性を導く。

系 1.2. $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ をボックス収束する2つの測度距離空間列とし、 X, Y をそれぞれの極限空間とする。このとき、 l_p -直積空間の列 $\{X_n \times_p Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は極限空間の l_p -直積空間 $X \times_p Y$ にボックス収束する。

そこで、この性質が集中位相でも成り立つかという次の素朴な問題が生じる。

問題 1.3. $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を集中する2つの測度距離空間列とし、 X, Y をそれぞれの極限空間とする。このとき、 l_p -直積空間の列 $\{X_n \times_p Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は極限空間の l_p -直積空間 $X \times_p Y$ に集中するか？

先行研究として、Gromov [3, 3 $\frac{1}{2}$.46.] によって、極限空間 X, Y のうち少なくとも一方が1点空間 * ならば、 $\{X_n \times_p Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $X \times_p Y$ に集中するということが知られていた ([6, Proposition 7.32] も参照)。本稿の主結果はこの問題を解決した次の定理である。

定理 1.4 (K.). 問題 1.3 において、 l_p -直積空間の列 $\{X_n \times_p Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $X \times_p Y$ に集中する。

集中位相の場合は、命題 1.1 のようにオブザーバブル距離を定量的に評価することで l_p -直積空間列の集中を示すことができるかは未だ分かっておらず、今後の課題である。

本稿の3節で定理 1.4 の証明の鍵となった補題について、4節で定理 1.4 により新たに集中が示された測度距離空間列の例について、5節で定理 1.4 の一般化についてそれぞれ述べることにする。

2 ボックス距離とオブザーバブル距離

この節ではボックス距離 $\square$ とオブザーバブル距離 d_{conc} の定義と性質について簡単に述べる. 詳細は [3, 6] を参照されたい. [3] ではボックス距離は $\square_1$, オブザーバブル距離は $\underline{H}_1\mathcal{L}_{l_1}$ と表記されている.

X を測度距離空間とする. また, $I := [0, 1)$ とし, $\mathcal{L}^1$ を I 上の 1 次元 Lebesgue 測度とする. 写像 $\varphi: I \rightarrow X$ が X のパラメータであるとは, φ が Borel 可測写像であり,

$$\varphi_*\mathcal{L}^1 = m_X$$

を満たすときをいう. ここで, $\varphi_*\mathcal{L}^1$ は φ による $\mathcal{L}^1$ の押し出し測度である. 一般に Borel 可測写像 $f: X \rightarrow Y$ と X 上の Borel 確率測度 μ に対し, f による μ の押し出し測度 $f_*\mu$ とは, Y 上の任意の Borel 集合 A に対して, $f_*\mu(A) := \mu(f^{-1}(A))$ により定まる Y 上の Borel 確率測度である.

補題 2.1. 任意の測度距離空間にはパラメータが存在する.

測度距離空間の間のボックス距離 $\square$ は次のように定義される.

定義 2.2. (ボックス距離) 2 つの測度距離空間 X, Y に対して, X と Y の間のボックス距離 $\square(X, Y)$ を次の条件を満たす実数 $\varepsilon > 0$ の下限として定める: X, Y それぞれのあるパラメータ $\varphi: I \rightarrow X$, $\psi: I \rightarrow Y$ と I 上のある Borel 集合 I_0 で $\mathcal{L}^1(I_0) \geq 1 - \varepsilon$ を満たすものが存在し, 任意の $s, t \in I_0$ に対し,

$$|d_X(\varphi(s), \varphi(t)) - d_Y(\psi(s), \psi(t))| \leq \varepsilon$$

が成り立つ.

ボックス距離の定義のアイデアは, 2 つの測度距離空間の近さを測るにあたり, パラメータ (測度を保つ写像) でそれぞれの空間の距離関数を単位区間 I に引き戻し, I 上で 2 つの距離関数を測度を考慮して比較するという単純なものである. $\mathcal{X}$ を (確率) 測度距離空間 (の同型類) 全体の集合とする.

定理 2.3. $(\mathcal{X}, \square)$ は完備可分距離空間である.

次の補題は測度距離空間のボックス収束と同値な条件を与える.

補題 2.4. 測度距離空間の列 $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と測度距離空間 X に対して, 次の (1) と (2) は同値である.

(1) X_n が X にボックス収束する.

(2) ある Borel 可測写像の列 $p_n: X_n \rightarrow X$ と X_n 上のある Borel 集合 $\tilde{X}_n$ が存在して,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} m_{X_n}(\tilde{X}_n) &= 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x, x' \in \tilde{X}_n} |d_{X_n}(x, x') - d_X(p_n(x), p_n(x'))| &= 0, \end{aligned}$$

$$X \text{ 上の任意の有界連続関数 } f \text{ に対し, } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f d(p_{n*}m_{X_n}) = \int_X f dm_X$$

を満たす.

オブザーバブル距離 d_{conc} を定義するための準備として、まず測度空間 (X, μ) 上の可測関数全体の集合上に **Ky Fan 距離** と呼ばれる (擬) 距離を導入する. Ky Fan 距離は関数の測度収束を与える (擬) 距離である.

定義 2.5 (Ky Fan 距離). 2 つの可測関数 $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, f と g の間の **Ky Fan 距離** $d_{\text{KF}}^\mu(f, g)$ を次の条件を満たすような実数 $\varepsilon > 0$ の下限として定める.

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) \leq \varepsilon.$$

測度距離空間 X 上の 1-Lipschitz 関数全体の集合を $\mathcal{Lip}_1(X)$ とする. **1-Lipschitz 関数** とは, Lipschitz 定数が 1 以下の連続関数である. さらに, X のパラメータ $\varphi : I \rightarrow X$ に対して,

$$\varphi^* \mathcal{Lip}_1(X) := \{f \circ \varphi \mid f \in \mathcal{Lip}_1(X)\} \quad (2.1)$$

と定める. $\varphi^* \mathcal{Lip}_1(X)$ は I 上の Borel 可測関数から成る集合である.

測度距離空間の間のオブザーバブル距離 d_{conc} を次で定める.

定義 2.6 (オブザーバブル距離). 2 つの測度距離空間 X, Y に対して, X と Y の間のオブザーバブル距離 $d_{\text{conc}}(X, Y)$ を

$$d_{\text{conc}}(X, Y) := \inf_{\varphi, \psi} d_{\text{H}}(\varphi^* \mathcal{Lip}_1(X), \psi^* \mathcal{Lip}_1(Y))$$

で定める. ここで, φ, ψ は X, Y それぞれのパラメータ全てにわたって下限をとる. d_{H} は d_{KF}^1 に関する Hausdorff 距離である.

定理 2.7. $(\mathcal{X}, d_{\text{conc}})$ は距離空間である. また任意の 2 つの測度距離空間 X, Y に対して,

$$d_{\text{conc}}(X, Y) \leq \square(X, Y)$$

が成り立つ.

オブザーバブル距離 d_{conc} による位相は**集中位相**と呼ばれ, その収束は**集中**と呼ばれる. オブザーバブル距離の定義のアイデアは, ボックス距離のように 2 つの空間の距離関数を直接比較するのではなく, Lipschitz 関数という距離構造をよく反映する関数たち全体を比較することである. このアイデアの違いがボックス収束と集中の間に大きな違いを生み, 集中位相では以下に述べる例のような次元が発散する収束列を多く許容する.

$*$ を 1 点からなる測度距離空間とする. すなわち, 1 点集合に自明な距離と Dirac のデルタ確率測度を与えた空間である. 測度距離空間 X と $*$ のオブザーバブル距離は次のように特徴づけられる.

補題 2.8. 測度距離空間 X に対して,

$$d_{\text{conc}}(X, *) = \sup_{f \in \mathcal{Lip}_1(X)} \inf_{c \in \mathbb{R}} d_{\text{KF}}^{m_X}(f, c)$$

が成り立つ.

1 点空間 $*$ の (1-Lipschitz) 関数は定数関数のみなので, オブザーバブル距離で 1 点に近い測度距離空間は (Ky Fan 距離の意味で) 定数関数に近い 1-Lipschitz 関数のみを持つ空間である.

定義 2.9. 測度距離空間の列 $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が **Lévy 族** であるとは, X_n が $*$ に集中するときをいう.

例 2.10. 半径 1 の n 次元球面 $S^n(1)$ を標準リーマン計量に関するリーマン距離と正規化されたリーマン体積測度をもつ測度距離空間とする. このとき, 空間列 $\{S^n(1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は Lévy 族である. これは Lévy による古典的な球面の測度集中現象を捉えている.

例 2.11. $\mathbb{C}P^n$, $SO(n)$, $SU(n)$ をそれぞれ n 次元複素射影空間, n 次特殊直交群, n 次特殊ユニタリ群とする. これらは標準的な計量の下, リーマン多様体であるとし, 測度を正規化して測度距離空間とみなせる. このとき, $\{\mathbb{C}P^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{SO(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{SU(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ はすべて Lévy 族である.

閉リーマン多様体 (コンパクトかつ境界がない) から成る Lévy 族はラプラシアンの第一正固有値の振る舞いと密接な関係がある. ここで, ラプラシアンは固有値が $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$ となるものとし, 第一正固有値は 0 でない固有値の最小値とする.

定理 2.12. $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を閉リーマン多様体の列とする. $\lambda_1(X_n)$ を X_n のラプラシアンの第一正固有値とする. このとき, 次の (1), (2) が成り立つ.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1(X_n) = +\infty$ ならば, $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は Lévy 族である.
- (2) $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が非負 Ricci 曲率をもつ Lévy 族であるならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1(X_n) = +\infty$ が成り立つ.

例 2.10, 2.11 はともに定理 2.12 (1) より Lévy 族であることが従う. 定理 2.12 (2) は E. Milman [4, 5] による.

ボックス収束の時と同様に, 測度距離空間列の集中と同値な条件を与える次の定理が知られている.

定理 2.13. 測度距離空間の列 $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と測度距離空間 X に対して, 次の (1) と (2) は同値である.

- (1) X_n が X に集中する.
- (2) ある Borel 可測写像の列 $p_n : X_n \rightarrow X$ が存在して, 次を満たす:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(\mathcal{L}ip_1(X_n), p_n^* \mathcal{L}ip_1(X)) = 0, \quad (2.2)$$

$$X \text{ 上の任意の有界連続関数 } f \text{ に対し, } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_n} f d(p_{n*} m_{X_n}) = \int_X f dm_X. \quad (2.3)$$

ただし, $p_n^* \mathcal{L}ip_1(X)$ は (2.1) と同様に定義し, d_H は Ky Fan 距離 $d_{KF}^{m_{X_n}}$ に関する Hausdorff 距離である.

3 オブザーバブル直径の評価

定理 1.4 は, κ -オブザーバブル直径と呼ばれる測度距離空間の不変量に対して, l_p -直積に関する新しい性質 (補題 3.3) を示すことで得られた. 測度距離空間 X の κ -オブザーバブル直径 $\text{ObsDiam}(X; -\kappa)$ とは, 実数 $\kappa > 0$ に対して,

$$\text{ObsDiam}(X; -\kappa) := \sup_{f \in \mathcal{L}ip_1(X)} \inf \{ \text{diam } A \mid A \subset \mathbb{R} : \text{Borel}, f_* m_X(A) \geq 1 - \kappa \} \quad (3.1)$$

により定義される量である. $\kappa \geq 1$ に対して, 常に $\text{ObsDiam}(X; -\kappa) = 0$ が成り立つ. κ -オブザーバブル直径は, 次の命題にあるように, 1 点空間 $*$ への集中の度合いを表す量である.

命題 3.1 ([6, Corollary 5.8]). 測度距離空間の列 $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対して, $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が Lévy 族であることは, 任意の $\kappa > 0$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{ObsDiam}(X_n; -\kappa) = 0$$

が成り立つことと同値である.

例 3.2. n 次元単位球面 $S^n(1)$ の κ -オブザーバブル直径は

$$\text{ObsDiam}(S^n(1); -\kappa) = \pi - 2v^{-1}(\kappa/2) = O(n^{-1/2})$$

で与えられる. ただし, $v(r) := (\int_0^r \sin^{n-1} t \, dt) / (\int_0^\pi \sin^{n-1} t \, dt)$ である. これは (3.1) の $\sup$ を達成する 1-Lipschitz 関数が存在し, かつ, それが 1 点からの距離関数 $d_{S^n(1)}(x, \cdot)$ であることから従う.

κ -オブザーバブル直径を正確に求めることはほとんどの場合で困難であるが, 一般にそのオーダーを計算することも難しい場合が多い.

κ -オブザーバブル直径と l_p -直積空間に関して, 次のような新しい関係式が得られた.

補題 3.3 (K.). X, Y を測度距離空間とする. このとき, 任意の $p \in [1, +\infty]$, $\kappa \in (0, 1)$, $\kappa' \in (0, 1/2)$ に対して,

$$\text{ObsDiam}(X \times_p Y; -(\kappa + \kappa')) \leq \text{ObsDiam}(X; -\kappa) + 2 \text{ObsDiam}(Y; -\kappa')$$

が成り立つ.

補題 3.3 は, 粗く言うと, l_p -直積空間の集中の度合いを各成分の空間の集中の度合いで制御できることを表している. 実際に, 定理 1.4 の証明では, X_n, Y_n がそれぞれ X, Y に集中することと定理 2.13 から存在する写像 $p_n : X_n \rightarrow X$, $q_n : Y_n \rightarrow Y$ に対して, 写像 $p_n \times q_n : X_n \times Y_n \rightarrow X \times Y$ を $(x, y) \in X_n \times Y_n$ に対し,

$$p_n \times q_n(x, y) := (p_n(x), q_n(y))$$

と定め, この $p_n \times q_n$ が再び (2.2), (2.3) を満たすことを確かめる. (2.2) を示す際に, 補題 3.3 によりある種の誤差を制御することができることが主結果の証明の鍵であった.

4 主結果による集中の例

本研究の動機の 1 つとして, ボックス収束しないが集中する測度距離空間列の例を増やしたいということが挙げられる. 特に古典的な集中現象に対応する例 (例 2.10, 2.11 など) は, 非常に重要ではあるが, 極限空間は 1 点空間 $*$ になってしまうので, 極限空間が 1 点にならないような例はどのようなものがあるかという問題が考えられる. 例えば, 次のような例が挙げられる.

例 4.1. n 次元単位球面 $S^n(1)$ と区間 $[0, \pi]$ を考える. これらは共に通常のリーマン計量による距離と正規化された確率測度をもつとする. $S^n(1)$ 上の点 $\bar{x}$ を任意に選び, 固定する. 測度距離空間 X_n

を区間 $[0, \pi]$ 上の点 π と $S^n(1)$ 上の点 $\bar{x}$ を同一視した空間とする. すなわち,

$$X_n := [0, \pi] \sqcup S^n(1) / \pi = \bar{x}$$

とし, X_n 上の距離 d_{X_n} を任意の $x, x' \in X_n$ に対し,

$$d_{X_n}(x, x') := \begin{cases} d_{[0, \pi]}(x, x') & (x, x' \in [0, \pi] \text{ のとき}) \\ d_{S^n(1)}(x, x') & (x, x' \in S^n(1) \text{ のとき}) \\ d_{[0, \pi]}(x, \pi) + d_{S^n(1)}(\bar{x}, x') & (x \in [0, \pi], x' \in S^n(1) \text{ のとき}) \\ d_{[0, \pi]}(x', \pi) + d_{S^n(1)}(\bar{x}, x) & (x' \in [0, \pi], x \in S^n(1) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定め, X_n 上の確率測度 m_{X_n} を

$$m_{X_n} := \frac{1}{2}m_{[0, \pi]} + \frac{1}{2}m_{S^n(1)}$$

と定めると, (X_n, d_{X_n}, m_{X_n}) は測度距離空間である. この X_n は次の測度距離空間 X に集中する. X は 1 次元ユークリッド空間 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ の部分集合 $[0, \pi] \cup \{3\pi/2\}$ にユークリッド距離と確率測度

$$m_X := \frac{1}{2}m_{[0, \pi]} + \frac{1}{2}\delta_{\frac{3}{2}\pi}$$

を持つ測度距離空間である. ただし, δ_x は点 x に置ける Dirac のデルタ測度である. (図 1 を参照)

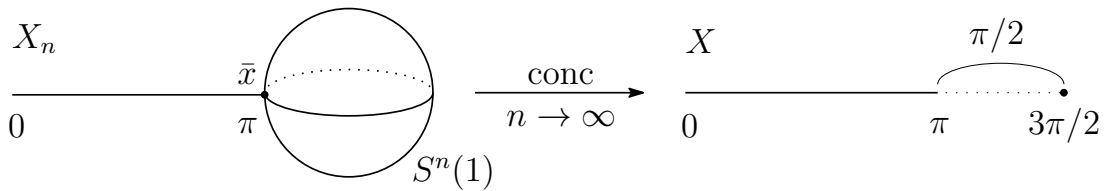


図 1 例 4.1 の集中

すなわち, 集中位相において, n 次元単位球面の列 $\{S^n(1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は 1 点空間 $*$ に集中するのであるが, 区間 $[0, \pi]$ が取り付けられている場合は, $\{S^n(1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ の極限に相当する 1 点は区間 $[0, \pi]$ から離れた点になる. 実際には内在的な意味の直径 $\text{diam } S^n(1) = \pi$ の半分だけ離れることになる. この例は定理 2.13 の写像 p_n を具体的に構成することで証明される.

本稿の主結果により, 例えば, 例 4.1 の X_n を 2 つ直積した空間の収束先が分かる.

例 4.2. X_n, X を例 4.1 の測度距離空間とする. 定理 1.4 より, 任意の $p \in [1, \infty]$ に対して, $X_n \times_p X_n$ は $X \times_p X$ に集中する. 極限空間 $X \times_p X$ は距離空間 $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_p)$ 上の部分集合

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in [0, \pi] \cup \{3\pi/2\}\}$$

であると考えられる. ここで, $|\cdot|_p$ は l_p -ノルムである. すなわち次の図 2 のようになる.

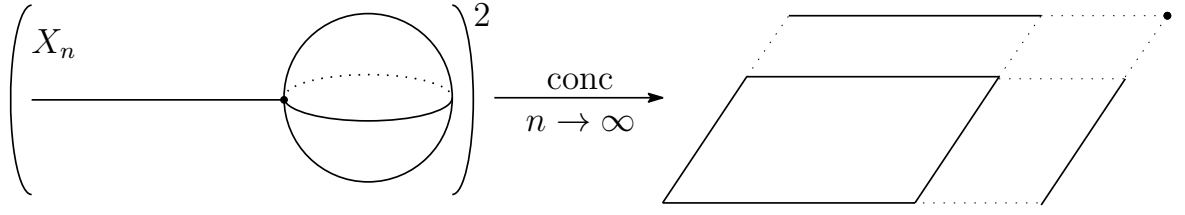


図2 例 4.2 の集中

5 主結果の一般化

本稿では, l_p -直積空間の集中を主結果としていたが, 実際には l_p -直積距離を次の条件を持つ連続関数 F が誘導する距離関数 d_F にまで主結果は一般化できる.

関数 $F : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ に対して,

- (F1) 任意の $s, s', t, t' \in [0, \infty)$ に対して, $F(s + s', t + t') \leq F(s, t) + F(s', t')$ が成り立つ.
- (F2) 任意の $s_0, t_0 \in [0, \infty)$ に対し, $s \mapsto F(s, t_0)$ および $t \mapsto F(s_0, t)$ がともに単調非減少である.
- (F3) $F(s, 0) = s$ および $F(0, t) = t$ が成り立つ.

の3つの条件を考える. さらに, 2つの測度距離空間 X, Y に対して, 関数 $d_F : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow [0, +\infty)$ を任意の $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ に対し,

$$d_F((x, y), (x', y')) := F(d_X(x, x'), d_Y(y, y'))$$

と定める.

命題 5.1. X, Y を測度距離空間とし, $F : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ を条件 (F1) – (F3) を満たす連続関数とする. このとき, $(X \times Y, d_F)$ は完備距離空間であり, d_F の位相は積位相に一致する. 特に, $(X \times Y, d_F, m_X \otimes m_Y)$ は測度距離空間である.

例 5.2. (1) 任意の $p \in [1, +\infty]$ に対して,

$$F_p(s, t) := \begin{cases} (s^p + t^p)^{\frac{1}{p}} & (p < +\infty \text{ のとき}) \\ \max\{s, t\} & (p = +\infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めると, F_p は条件 (F1) – (F3) を満たし, d_{F_p} は l_p -直積距離 d_{l_p} と一致する.

(2) $F(s, t) := \log(e^s + e^t - 1)$ と定めると, F は条件 (F1) – (F3) を満たす.

命題 1.1, 定理 1.4 は次のように一般化できる.

命題 5.3. X, Y, Z, W を測度距離空間とし, $F : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ を条件 (F1) – (F3) を満たす連続関数とする. このとき,

$$\square((X \times Y, d_F, m_X \otimes m_Y), (Z \times W, d_F, m_Z \otimes m_W)) \leq \square(X, Z) + \square(Y, W)$$

が成り立つ.

定理 5.4. $F : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ を条件 (F1) – (F3) を満たす連続関数とする. 2 つの集中する測度距離空間の列 $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ とそれらの極限空間 X, Y に対して, それらの直積空間の列 $\{(X_n \times Y_n, d_F, m_{X_n} \otimes m_{Y_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ は極限空間の直積空間 $(X \times Y, d_F, m_X \otimes m_Y)$ に集中する.

また, 本稿の主結果を測度距離空間のねじれ積へ一般化しようとする次の簡単な反例が存在する.

例 5.5. n 次元単位球面の列 $\{S^n(1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ を考える. 区間 $[0, \pi]$ と n 次元単位球面 $S^n(1)$ のねじれ積 $[0, \pi] \times_{\sin} S^n(1)$ は $(n+1)$ 次元単位球面 $S^{n+1}(1)$ と等長同型である. したがって, $\{[0, \pi] \times_{\sin} S^n(1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は 1 点空間 $*$ に集中する. 一方で, 同じ空間の列 $\{[0, \pi]\}_{n \in \mathbb{N}}$ と n 次元単位球面の列 $\{S^n(1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ の極限空間どうしのねじれ積は $[0, \pi] \times_{\sin} *$, すなわち, $[0, \pi]$ である.

参考文献

- [1] N. Gigli, A. Mondino, and G. Savaré, *Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **111** (2015), no. 5, 1071–1129.
- [2] A. Greven, P. Pfaffelhuber, and A. Winter, *Convergence in distribution of random metric measure spaces (Λ -coalescent measure trees)*, Probab. Theory Related Fields **145** (2009), no. 1-2, 285–322.
- [3] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Reprint of the 2001 English edition, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.
- [4] E. Milman, *Isoperimetric and concentration inequalities: equivalence under curvature lower bound*, Duke Math. J. **154** (2010), no. 2, 207–239.
- [5] ———, *On the role of convexity in isoperimetry, spectral gap and concentration*, Invent. Math. **177** (2009), no. 1, 1–43.
- [6] T. Shioya, *Metric measure geometry*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol. 25, EMS Publishing House, Zürich, 2016. Gromov’s theory of convergence and concentration of metrics and measures.