

接触多様体の Fefferman 空間と Dirac 作用素

埼玉大学大学院理工学研究科数理電子情報系専攻 大山 人紀 (Ohyama Toki)

概要

接触リーマン多様体 $(M^{2n+1}, \theta; \xi, J, g)$ には $(2n+1, 1)$ 型 Lorentze 計量が自然に入る S^1 -束 Fefferman 空間が存在する. Fefferman 空間の計量である Fefferman 計量は CR 共形変換で共形変換する. そのことからわかるように接触リーマン多様体の研究で非常に有効的である. H.Baum はスピン構造が存在するとき、Fefferman 空間と似た Fefferman-Baum 空間を導入して、可積分条件を満たす接触リーマン多様体を研究した. さらに長瀬正義は可積分条件でない場合でも同様の方法が有用であることを示した. 実は、これらと同様のことはスピン c 構造を持つときにも成立する. それを最後に説明する. 特に接触リーマン多様体はスピン c 構造は常に持つ.

1 導入

接触多様体 $(M^{2n+1}, \theta; \xi)$ (ξ は Reeb 場) は $d\theta$ が $H := \ker \theta$ で非退化かつ強擬凸のとき、 $(1,1)$ テンソル J とリーマン計量 g で

$$J^2X = -\text{id}_{TM} + \theta(X)\xi, \quad g(X, Y) = d\theta(X, JY) + \theta(X)\theta(Y)$$

となるものが存在する. これより接触リーマン多様体 $(M, \theta; \xi, J, g)$ となる. このとき、 (H, J, g) はエルミート束になる. 特に

$$H^c = H_+ \oplus H_-, \quad H_{\pm} := \{v \in H^c \mid Jv = \pm iv\}$$

となる. エルミート束が存在するときスピン c 束 S_H^c が存在する. さらに、 $\wedge_H^{0,*}(M)^* := \{\omega \in T^*M^c \mid X \lrcorner \omega = 0 (X \in H_+ \oplus \mathbb{C}\xi)\}$ とすると、

$$S_H^c = \wedge_H^{0,*}(M)$$

となる. ここで

$$K := \wedge^{n+1,0}(M) := \{\omega \in \wedge^{n+1}T^*M^c \mid X \lrcorner \omega = 0 (X \in H_-)\}$$

とすると、エルミート束 (H, J, g) から誘導されるスピン c 構造は

$$\text{Spin}^c(M) \rightarrow SO(M) \times U(K^{-1})$$

と書かれる.

また接触リーマン多様体にはよく知られているように以下の Tanno 接続が存在する.

命題 1. 以下を満たす線形接続 $*\nabla$ が一意に存在する。

$$\begin{aligned} *\nabla\theta &= 0, \quad *\nabla g = 0, \quad *\nabla_X J = Q(\cdot, X) \\ T(X_+, Y_+) &= 0, \quad T(X_+, Y_-) = ig(X_+, Y_-)\xi, \quad J \circ \tau + \tau \circ J = 0 \end{aligned}$$

ここで $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$, $\tau(X) := T(\xi, X)$ であり, X_+, X_- などそれぞれ $\Gamma(H_+), \Gamma(H_-)$ の元である. Q は Tanno テンソルである. この接続 $*\nabla$ を Tanno 接続という.

また, Tanno 接続の変形として Hermitian Tanno 接続が存在する.

命題 2. 以下を満たす線形接続 ∇^{TN} が一意に存在する。

$$\begin{aligned} \nabla^{TN}\theta &= 0, \quad \nabla^{TN}g = 0, \quad \nabla_X^{TN} J = Q(\cdot, X) \\ T(X_+, Y_+) &= 0, \quad T(X_+, Y_-) = ig(X_+, Y_-)\xi, \quad J \circ \tau + \tau \circ J = 0 \end{aligned}$$

この接続 ∇^{TN} を Hermitian Tanno 接続という.

2 スピン構造をもつ接触リーマン多様体上の Fefferman-Baum 空間

スピン構造を持つ接触リーマン多様体にはスピン構造に依存した複素ライン束 $\sqrt{K}$ ($\sqrt{K}^2 = K$) が存在し, $\mathbb{S}_{TM}$ をスピン構造から誘導されたスピン束とすると,

$$\mathbb{S}_{TM} = \mathbb{S}_H^c \otimes \sqrt{K}$$

となる. $\mathbb{S}_{TM}$ 上の ∇^g から定まる Dirac 作用素 $D^{\mathbb{S}_{TM}}$ は, (ξ_A) をユニタリー枠とすると,

$$D^{\mathbb{S}_{TM}} = \sum \xi_A \circ \nabla_{\xi_A}^{(\mathbb{S}_{TM}: \nabla^{TN})} - \frac{1}{4} \xi \circ d\theta \circ$$

となる. ここで, $\nabla_{\xi_A}^{(\mathbb{S}_{TM}: \nabla^{TN})}$ は ∇^{TN} から定まる $\mathbb{S}_{TM}$ の接続である. また, $\mathbb{S}_H^c = \wedge_H^{0,*}(M)$ より

$$\mathbb{S}_{TM} \otimes \sqrt{K}^{-1} = \wedge_H^{0,*}(M)$$

となる. $\sqrt{K}^{-1}$ には ∇^{TN} から接続 $\mathcal{A}(K^{-1}) (= \text{Tr} \nabla^{TN})$ が定まり, 上の同型のもと次の命題が成り立つ.

命題 3.

$$\nabla^{(\mathbb{S}_{TM}: \nabla^{TN})} + \frac{1}{2} \mathcal{A}(K^{-1}) = \nabla^{TN}$$

一方、

$$\sqrt{F(M)} := \sqrt{K_0}/\mathbb{R}_{>0}$$

とすると, $\sqrt{\pi}: \sqrt{F(M)} \rightarrow M$ は S^1 -束になる. この $\sqrt{F(M)}$ には以下の自明化が存在する.

$$\sqrt{\pi}^{-1}(U) \simeq U \times [0, 2\pi), \quad \sqrt{[\theta \wedge \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n]}(p) \cdot e^{i\Theta^\vee} \leftrightarrow (p, \Theta^\vee)$$

$\Sigma^\vee := (n+2)\partial/\partial\Theta^\vee$ とおく.

また, Fefferman 空間と同様にして, 接続になる $\sqrt{F(M)}$ 上の 1 次形式 $\sigma^\vee$ ($(i(n+1)\sigma^\vee$ が Ehresmann 型の接続になる) が存在する. これによって,

$$T\sqrt{F(M)} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$$

垂直束と水平束に分かれる. $\sigma^\vee$ を用いて, CR 共形変換で共形変換する $(2n+1, 1)$ 型 Lorentze 計量 $h^\vee$ が存在する. この組 $(\sqrt{F(M)}, h^\vee)$ を Fefferman-Baum 空間という. $(e_1, \dots, e_{2n}, \xi)$ を TM の正規直交枠とすると,

$$(\sqrt{\pi_{\mathcal{H}}^*} e_1, \dots, \sqrt{\pi_{\mathcal{H}}^*} e_{2n}, \frac{N + \Sigma^\vee}{2\sqrt{2}}; \frac{N - \Sigma^\vee}{2\sqrt{2}})$$

が $(\sqrt{F(M)}, h^\vee)$ の正規直交枠になる.

さらに, (M, g) のスピン構造から $(\sqrt{F(M)}, h^\vee)$ にはスピン構造が入る. これを $\mathbb{S}_{\sqrt{F}}$ とかくと,

$$\mathbb{S}_{\sqrt{F}} = \sqrt{\pi}^* \mathbb{S}_{TM} \oplus \sqrt{\pi}^* \mathbb{S}_{TM}$$

となる. この同型のもと, 以下の定理が成り立つ.

定理 1. (ξ_A) を TM のユニタリー枠とし, $\sqrt{\pi}^* \xi_A$ を水平束への持ち上げとする. 局所的に以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} D^{\mathbb{S}_{\sqrt{F}}} = & \sum_{C \neq 0} \sqrt{\pi_{\mathcal{H}}^*} \xi_C \circ (\sqrt{\pi}^* \nabla_{\xi_C}^{(\mathbb{S}_{TM}: \nabla^{TN})}, \sqrt{\pi}^* \nabla_{\xi_C}^{(\mathbb{S}_{TM}: \nabla^{TN})}) \\ & + \frac{N}{2\sqrt{2}} \circ \left(\frac{\Sigma^\vee}{\sqrt{2}} \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi}^* d\theta \circ \right) + \frac{\Sigma^\vee}{2\sqrt{2}} \circ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi}^* \nabla_{\xi}^{(\mathbb{S}_{TM}: \nabla^{TN})}, \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi}^* \nabla_{\xi}^{(\mathbb{S}_{TM}: \nabla^{TN})} \right) \\ & - \frac{\Sigma^\vee}{2\sqrt{2}} \circ \frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{\pi}^* \sum_{A, B \neq 0} \mathcal{F}(\sigma)(\xi_{\bar{B}}, \xi_{\bar{A}}) \xi_B \circ \xi_A \circ \end{aligned}$$

3 スピン c 構造を持つ接触リーマン多様体

スピン構造と異なり, 一般には $\sqrt{K}$ は存在しない. そのため, $\sqrt{F(M)}$ が構成できないことに注意されたい. そこで, スピン c 構造に依存する同様のものを構成する. スピン c 構造を

$$Spin^c(M) \rightarrow SO(M) \times U(L)$$

とすると, 標準的スピン c 束に依存する

$$\mathcal{L} = \sqrt{L} \otimes \sqrt{K}$$

となる複素ライン束が存在する ($\sqrt{L}, \sqrt{K}$ は局所的には存在する). L の接続を $\mathcal{A}(L)$ とすると, $\mathbb{S}_{TM}^c$ 上の Dirac 作用素は

$$D^{\mathbb{S}_{TM}^c} = \sum \xi_A \circ (\nabla_{\xi_{\bar{A}}}^{(\mathbb{S}_{TM}^c: \nabla^{TN})} + \frac{1}{2} \mathcal{A}(L)(\xi_{\bar{A}})) - \frac{1}{4} \xi \circ d\theta \circ$$

また, $\mathbb{S}_{TM}^c = \mathbb{S}_H^c \otimes \mathcal{L}$ となり, $\mathbb{S}_{TM}^c \otimes \mathcal{L}^{-1} = \wedge_H^{0,*}(M)$ より

$$\nabla^{(\mathbb{S}_{TM}^c; \nabla^{TN})} + \frac{1}{2}(\mathcal{A}(K^{-1}) + \mathcal{A}(L^{-1})) = \nabla^{TN}$$

また, $\sqrt{F(M)}$ に対応する

$$F(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_0 / \mathbb{R}_{>0}$$

が構成され, $\sqrt{\pi} : F(\mathcal{L}) \rightarrow M$ は S^1 -束になる. するとスピン構造の場合と同様にして以下の事柄が成り立つ.

接続を構成する $\sigma^\vee$ が存在し, これより $(2n+1, 1)$ 型 Lorentze 計量 $h^\vee$ が存在する. (M, g) のスピン c 構造から $(F(\mathcal{L}), h^\vee)$ のスピン c 構造が定まり, そのスピン c 束を $\mathbb{S}_{\sqrt{F}}^c$ と書と,

$$\mathbb{S}_{\sqrt{F}}^c = \sqrt{\pi}^* \mathbb{S}_{TM}^c \oplus \sqrt{\pi}^* \mathbb{S}_{TM}^c$$

となり, 以下が成り立つ.

定理 2.

$$\begin{aligned} D^{\mathbb{S}_{\sqrt{F}}^c} = & \sum_{C \neq 0} \sqrt{\pi}^* \xi_C \circ (\sqrt{\pi}^* \nabla_{\xi_C}^{(\mathbb{S}_{TM}^c; \nabla^{TN}, \mathcal{A}(L))}, \sqrt{\pi}^* \nabla_{\xi_C}^{(\mathbb{S}_{TM}^c; \nabla^{TN}, \mathcal{A}(L))}) \\ & + \frac{N}{2\sqrt{2}} \circ \left(\frac{\Sigma^\vee}{\sqrt{2}} \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi}^* d\theta \circ \right) + \frac{\Sigma^\vee}{2\sqrt{2}} \circ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi}^* \nabla_{\xi}^{(\mathbb{S}_{TM}^c; \nabla^{TN}, \mathcal{A}(L))}, \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi}^* \nabla_{\xi}^{(\mathbb{S}_{TM}^c; \nabla^{TN}, \mathcal{A}(L))} \right) \\ & - \frac{\Sigma^\vee}{2\sqrt{2}} \circ \frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{\pi}^* \sum_{A, B \neq 0} \mathcal{F}(\sigma)(\xi_{\bar{B}}, \xi_{\bar{A}}) \xi_B \circ \xi_A \circ \end{aligned}$$

参考文献

- [1] J. Lee, *The Fefferman metric and pseudohermitian invariants*, Trans. Amer. Math. Soc. **296**(1)(1986), 411-429
- [2] H. Baum, *Lorentzian twistor spinors and CR-geometry*, Diff. Geom. Appl. **11**(1999), 69-96
- [3] M. Nagase, *Dirac operators on the Fefferman spin spaces in almost CR-geometry*, preprint