

スピン多様体上の Dirac 作用素の熱核について *

埼玉大学大学院理工学研究科 数理電子情報系専攻
白川匠 (Takumi SHIRAKAWA)[†]

概要

閉スピン多様体上の Dirac 作用素の熱核を漸近展開したときの項の係数は一般にリーマン曲率を含む複雑な式になり、特に高次の項の係数を計算するのは非常に困難である。そこで Getzler 氏により発案されたスケール変換を用いて高次の項の係数を初等的な微積分の知識のみでできる計算方法を考案した。本発表ではその計算方法といくつか計算した結果を述べる。

1 Introduction

スピン多様体 $(M^m, g, \rho : \text{Spin}(T^*M, g) \rightarrow SO(T^*M, g))$ 上には、スピノール束 $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spin}(T^*M, g) \times_{\text{Spin}(m)} S_m, \quad (S_{2n} = S_{2n+1} = \mathbb{C}^n)$$

と 1 階の楕円型微分作用素である Dirac 作用素 $\mathcal{D} : \Gamma(\mathcal{S}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{S})$

$$\mathcal{D} = \sum e^j \circ \nabla_{e_j}^{\mathcal{S}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum e^j \circ \left\{ e_j + \frac{1}{4} \sum \omega(\nabla^g)_\ell^k(e_j) e^\ell \circ e^k \circ \right\}$$

が得られる。ここで $\circ$ は Clifford action, $e_\bullet = (e_1, \dots, e_m)$ は TM の (local) orthonormal frame, $e^\bullet = (e^1, \dots, e^m)$ は $e_\bullet$ の dual frame である。Dirac 作用素については次の指数定理が有名である。

Theorem 1.1 (Atiyah-Singer [2])

偶数次元の閉スピン多様体上の Dirac 作用素について次が成り立つ。

$$\text{ind}(\mathcal{D}^+) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{m/2}} \int_M \hat{A}(M)$$

$\text{ind}(\mathcal{D}^+)$ とは Dirac 作用素をフレドホルム作用素と見たときの解析的指数

$$\text{ind}(\mathcal{D}^+) = \dim \text{Ker } \mathcal{D}^+ - \dim \text{CoKer } \mathcal{D}^+$$

であり, $\hat{A}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \det^{1/2} \left(\frac{R(P)/2}{\sinh(R(P)/2)} \right)$ は $\hat{A}$ -genus と呼ばれる topological な量である。

指数定理には様々な証明方法が知られているが、次の熱方程式の初期値問題

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{D}^2 \right) \phi = 0, \quad \lim_{t \downarrow 0} \|\phi(t, \cdot) - \phi_0\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad (\phi_0 \in \Gamma(\mathcal{S}))$$

* 本研究は長瀬正義氏 (埼玉大学) との共同研究である。

[†] E-mail: t.shirakawa.220@gmail.com

を用いる証明方法がある. この熱方程式は unique な解及び熱核 $e^{-t\mathcal{D}^2}(P, P')$ を持つ. そして, 熱核は各点 $P^0 \in M$ の周りで漸近展開:

$$\begin{aligned} e^{-t\mathcal{D}^2}(P^0, P^0) &\underset{t \downarrow 0}{\sim} (4\pi t)^{-m/2} \sum_{l=0}^{\infty} t^l K_l(P^0), \quad K_l(P^0) \in \mathbb{C}l(T_{P^0}^*M) \\ &= (4\pi t)^{-m/2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=0}^m t^l K_{l,[p]}(P^0) \\ &\stackrel{\text{def.}}{=} (4\pi t)^{-m/2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=0}^m \sum_{|\alpha|=p} t^l e^{\alpha_1} \circ \dots \circ e^{\alpha_{|\alpha|}} \cdot K_{l,\alpha}(P^0) \end{aligned} \quad (1)$$

を持つ. この係数たち $K_l(P^0)$ はリーマン曲率を含む複雑な式になり, 実際に計算をすることは非常に困難であるが, 指数定理では (1) 式において, $l = m/2$ のときの係数 $K_{m/2}(P^0)$ を計算することで証明される. この計算が指数定理の証明では 1 番の難所であり, 一般に係数たち $K_l(P^0)$ を計算する実用的な方法はない. そこで一般に係数たち $K_l(P^0)$ を計算できるよう, 初等的な微積分の知識のみで計算できる手法を考案した. この手法を適用することで具体的に次のような計算結果を得た.

$$\begin{aligned} K_0(P^0) &= 1, \\ K_1(P^0) &= -\frac{\sum R_{jiji}}{12} = -\frac{s(\nabla^g)(P^0)}{12}, \\ K_2(P^0) &= \det^{1/2} \left(\frac{R/2}{\sinh(R/2)} \right)_{[4]} - \frac{5 \sum R_{jijikk}}{24} - \frac{\sum R_{jijkik}}{3} \\ &\quad + \frac{(\sum R_{jiji})^2}{432} + \frac{\sum R_{jkik} R_{jk'ik'}}{12} + \frac{2 \sum R_{jkik'} (R_{jkik'} + R_{jk'ik})}{27}. \end{aligned}$$

ここで

$$R_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_5 \dots j_\ell} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial^{\ell-4} g(F(\nabla^g)(\partial/\partial x_{j_3}, \partial/\partial x_{j_4}) \partial/\partial x_{j_2}, \partial/\partial x_{j_1})}{\partial x_{j_5} \dots \partial x_{j_\ell}}(P^0)$$

であり, $s(\nabla^g)(P^0)$ はスカラー曲率である.

2 Getzler's rescaling transformation

指数定理の証明では $K_{m/2}(P^0)$ の計算が 1 番の難所であるが, この難所を Getzler 氏はスケール変換を用いて洗練された計算方法を与えた. ([4], [5])

Definiton 2.1 (Getzler's rescaling transformation)

P^0 を中心とする局所座標 (U, x) を取り, $\varepsilon > 0$ とする.

$\omega(t, x) = \sum e^I \cdot \omega_I(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U, x), \mathbb{C}l(T_{P^0}^*M))$ に対して

$$\begin{aligned} (T_\varepsilon \omega)(t, x) &\stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{\substack{I=(i_1, \dots, i_{|I|}) \\ i_1 < \dots < i_{|I|}}} e^I \cdot \varepsilon^{-|I|/2} \cdot \omega_I(\varepsilon t, \varepsilon^{1/2} x) \\ &= \sum_{I=(i_1, \dots, i_{|I|})} e^{i_1} \circ \dots \circ e^{i_{|I|}} \cdot \varepsilon^{-|I|/2} \cdot \omega_I(\varepsilon t, \varepsilon^{1/2} x) \end{aligned}$$

とする. そして任意の作用素

$$A : C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U, x), \mathbb{C}l(T_{P^0}^* M)) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^+ \times (U, x), \mathbb{C}l(T_{P^0}^* M))$$

に対し

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(A) &\stackrel{\text{def.}}{=} T_\varepsilon \circ A \circ T_\varepsilon^{-1} \\ &= T_\varepsilon \circ A \circ T_{\varepsilon^{-1}} \end{aligned}$$

とする. G_ε を Getzler's rescaling transformation という.

Remark 2.2 具体的例をいくつか挙げる.

$$G_\varepsilon(f \times) = f(\varepsilon^{1/2} x) \times, \quad G_\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \varepsilon^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad G_\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \varepsilon^{-2/2} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Getzler 氏はこの変換を熱方程式に応用し, 指数定理の証明を与えた.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}^2\right) e^{-t\mathbb{D}^2}(x) &= 0 \\ \Downarrow \varepsilon > 0, \text{ Getzler's rescaling transformation} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{(\varepsilon)}\right) e^{-t\mathbb{D}_{(\varepsilon)}}(x) &= 0 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} e^{-t\mathbb{D}^2}(x) &\stackrel{\text{def.}}{=} e^{-t\mathbb{D}^2}(x) \\ \mathbb{D}_{(\varepsilon)} &\stackrel{\text{def.}}{=} \varepsilon^{2/2} G_\varepsilon(\mathbb{D}^2) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \mathbb{D}_{i/2} \\ e^{-t\mathbb{D}_{(\varepsilon)}}(x) &\stackrel{\text{def.}}{=} \varepsilon^{m/2} (T_\varepsilon(e^{-t\mathbb{D}^2}(x))) = \varepsilon^{m/2} e^{-\varepsilon t \mathbb{D}^2}(\varepsilon^{1/2} x) \end{aligned}$$

である.

Theorem 2.3 (Getzler[5]) $[0, 1] \times (U, x)$ 上 uniform に次の漸近展開を得る.

$$\begin{aligned} e^{-t\mathbb{D}_{(\varepsilon)}}(x) &\underset{\varepsilon^{1/2} \downarrow 0}{\sim} q_t(x) \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \gamma_{i/2}(t, x) \quad \left(q_t(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) \\ &= q_t(x) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{p=0}^m \varepsilon^{i/2} \gamma_{i/2, [p]}(t, x) \\ &\stackrel{\text{def.}}{=} q_t(x) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=p}^{\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_{|\alpha|})} \varepsilon^{i/2} e^{\alpha_1} \circ \dots \circ e^{\alpha_{|\alpha|}} \cdot \gamma_{i/2, \alpha}(t, x) \end{aligned}$$

そして次を満たす

$$\gamma_{0/2}(0, 0) = 1, \quad \gamma_{i/2}(0, 0) = 0 \quad (i > 0)$$

$$\begin{aligned} q_t(x) \gamma_{0/2}(t, x) &= \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \det^{1/2} \left(\frac{tR(P^0)/2}{\sinh(tR(P^0)/2)} \right) \\ &\quad \cdot \exp \left(-\frac{1}{4t} \left\langle x \left| \frac{tR(P^0)}{2} \coth\left(\frac{tR(P^0)}{2}\right) \right| x \right\rangle \right) \end{aligned}$$

そして、熱核の漸近展開の係数たちを計算するにあたって重要となるのが次の主張である。

Theorem 2.4 (Getzler)

$$K_{l,[p]}(0) = \begin{cases} 0 & (l < p/2) \\ \gamma_{l-p/2,[p]}(1, 0) & (l \geq p/2) \end{cases}$$

つまり、 $\gamma_{l,[p]}(1, 0)$ たちを調べれば $K_{l,[p]}(0)$ たちがわかるのである。そこで $\gamma_{l,[p]}(1, 0)$ たちの計算方法を考える。

3 Main Theorem

まず、 $\gamma_{l,[p]}(1, 0)$ たちを調べるにあたって重要となるのが次の主張である。

Lemma 3.1 (N. S.)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{(\varepsilon)} \right) q_t(x) \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \Psi_{i/2}(t, x) = 0 & (\text{形式和}) \\ \Psi_{0/2,0/0}(0, 0) = 1, \Psi_{i/2,0/0}(0, 0) = 0 \ (i > 0) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2} \right) q_t(x) \sum_{l=0}^{\infty} t^{l/2} \Psi_{0/2,l/2} = 0, \Psi_{0/2,0/2}(0) = 1 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbb{D}_{0/2} \right) (q_t \Psi_{i/2}) + \sum_{i_1+i_2=i}^{i_2 \leq i} \mathbb{D}_{i_1}(q_t \Psi_{i_2}) = 0, \Psi_{i/2,0/2}(0) = 0 \ (i > 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

を満たす列 $\{\Psi_{i/2}(t, x) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (U, x), \mathbb{C}l(T_{P_0}^* M))\}_{i=0}^\infty$ は unique に存在する。

よって Lemma 3.0.1 の (2) の微分方程式を満たすようなものを見つければよい。

Theorem 3.2 (N. S.)

$$\begin{aligned} q_t(x-y) \Psi_{0/2}(t, x, y) &\stackrel{\text{def.}}{=} q_t(x-y) \gamma_{0/2}(t, x-y) \\ q_t(x-y) \Psi_{i/2}(t, x, y) &\stackrel{\text{def.}}{=} - \left(q_t \Psi_{0/2} \# \sum_{i_1+i_2=i}^{i_2 \leq i} \mathbb{D}_{i_1/2}(q_t \Psi_{i_2}) \right) (t, x, y) \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k > 0 \\ \sum i_l = i}} (-1)^k \left(q_t \gamma_{0/2} \# \mathbb{D}_{i_1/2}(q_t \gamma_{0/2}) \# \dots \# \mathbb{D}_{i_k/2}(q_t \gamma_{0/2}) \right) (t, x, y) \ (i > 0) \end{aligned}$$

で定義される $\Psi_{i/2}(t, x, y)$ は、Lemma 3.0.1 の微分方程式 (2) の unique な解であり、

$$\gamma_{i/2}(t, x) = \Psi_{i/2}(t, x, 0)$$

を満たす。ここで、 $\#$ は convolution を表す。さらに、

$$\begin{aligned} i \text{ が奇数} &\Rightarrow \gamma_{i/2}(t, x) \text{ は } x \text{ に関して奇関数} \\ i \text{ が偶数} &\Rightarrow \gamma_{i/2}(t, x) \text{ は } x \text{ に関して偶関数} \end{aligned}$$

である。特に、 $i \text{ が奇数} \Rightarrow \gamma_{i/2}(1, 0) = 0$ が言える。

参考文献

- [1] M. F. Atiyah, R. Bott and V. K. Patodi, On the heat equation and the index theorem, *Invent. Math.* **19** (1973), 279–330.
- [2] M. F. Atiyah, I. M. Singer, The index of elliptic operators on compact manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1968), 422–433
- [3] N. Berline, E. Getzler and M. Vergne, Heat kernels and Dirac operators, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1992.
- [4] E. Getzler, Pseudodifferential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem, *Comm. Math. Phys.* **92** (1983), 163–178.
- [5] E. Getzler, A short proof of the Atiyah-Singer index theorem, *Topology* **25** (1986), 111–117.
- [6] H. B. Lawson and M.-L. Michelsohn, Spin geometry, Princeton Math. Series **38**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1989.
- [7] M. Nagase, The heat equation for the Kohn-Rossi Laplacian on contact Riemannian manifolds, preprint.
- [8] M. Nagase, A formula for the heat kernel coefficients on Riemannian manifolds, preprint.