Extension of two FRT weak bialgebras using Frobenius-separable algebras and their relations

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
乙戸勇大 (Yudai OTSUTO)

概要

ヤン・バクスター方程式の解を用いた双代数（ホップ代数）の構成法を FRT 構成法と呼ぶ．この構成法により，有向グラフに関するヤン・バクスター方程式の解およびヤン・バクスター写像の一般化であるダイナミカル・ヤン・バクスター写像を用いて弱双代数が構成できる．本講演ではこれら 2 つの弱双代数と松本-清水により構成されたその間の射がフロベニウスかつ分離的な代数を用いて拡張でき，かつ上記の写像を用いず記述できることについて紹介する．なお，本講演の一部内容は澁川陽一氏（北海道大学）との共同研究に基づく．

1 導入

Yang-Baxter 方程式 [1, 9]（YBE）は，bialgebra や Hopf algebra の研究において重要な役割を果たしてきた．Cobraided な bialgebra により YBE の解（R-行列）が得られる事はよく知られた事実である．これに対し，Faddeev-Reshetikhin-Takhtajan は，R-行列を用いて，bialgebra を構成したが（FRT 構成法 [6]），この bialgebra は cobraided であり，上で述べた事実と逆の主張が得られる．後に FRT 構成法は様々な研究がなされ，Hayashi による有限集合上の quiver とその YBE による face algebra（weak bialgebra）の構成 [7]，Etingof-Varchenko による YBE にパラメータを付け加えて一般化した dynamical Yang-Baxter 方程式およびその解（dynamical R-行列）を用いた left bialgebroid の構成，およびその表現のなすテンソル圏の研究 [5] がある．一方，Drinfel'd [4] の提唱により，YBE の集合論的解（Yang-Baxter map）の研究も始まり、のちに Shibukawa により dynamical Yang-Baxter map（DYBM）へと一般化された [11, 12]．また，Shibukawa および Takeuchi は不変条件を持つ有限集合上の DYBM を用いた left bialgebroid の構成およびその表現のなすテンソル圏の研究を行った [13, 14]．

ここではそれぞれの FRT 構成法により定義される代数構造の関係性に焦点を置く．Matsumoto-Shimizu は有限集合上の quiver とその YBE，および DYBM を用いた FRT 構成法による 2 つの weak bialgebra の間に準同型写像を構成した [8]．今回，この 2 つの FRT 構成法及び準同型写像について，Frobenius-separable algebra を用いて一般化することができるという結果が得られた．

本稿は次のように構成される．2 節では，weak bialgebra およびその一般化である left bialgebroid の基礎事項及びその関係性について述べる．3 節では， [7] における weak bialgebra の構成法の一般化を行う．具体的には，有限集合 Λ 上の quiver Q（source map を $\mathfrak{s}$，target map を $\mathfrak{t}$ で表す），およ

びそのファイバー積 $Q^{(m)} = Q \times_\Lambda \cdots \times_\Lambda Q$（$m$ は正整数）に関する記号 $\mathbf{e}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ $(p, q \in Q^{(m)}, m$ は正整数$)$ を基底とする左 $R \otimes_{\mathbb{K}} R$-自由加群 $\overline{\mathfrak{A}(w)}$ に積を定義し，ある条件を満たす R の元の族 w に関する両側イデアル I で割ったもの $\mathfrak{A}(w) := \overline{\mathfrak{A}(w)}/I$ に構造射 Δ, ϵ を定義することで weak bialgebra が得られる．ただし，R は Frobenius-separable な体 $\mathbb{K}$ 上の algebra とする．4 節では，[13, 14] における left bialgebroid の構成法の一般化を行う．X を有限集合とし，

$$HX := (M_\Lambda(R) \otimes_{\mathbb{K}} M_\Lambda(R)^{op}) \bigsqcup \{L_{ab} \mid a, b \in X\} \bigsqcup \{(L^{-1})_{ab} \mid a, b \in X\}$$

とする．もととなる algebra は free algebra $\mathbb{K}\langle HX \rangle$ のある条件を満たす $M_\Lambda(R)$ の元の族 σ に関する両側イデアル I_σ に関する商 $A_\sigma := \mathbb{K}\langle HX \rangle / I_\sigma$ により得られる．結果として，A_σ には left bialgebra の構造が与えられ，R の Frobenius-separable 性により weak bialgebra となる．5 節では，本稿における主定理を述べる．[8] の一般化として，4 節の weak bialgebra A_σ と同様の設定のもとで構成される 3 節の weak bialgebra $\mathfrak{A}(w_\sigma)$ との間に準同型写像 $\phi : \mathfrak{A}(w_\sigma) \to A_\sigma$ を構成する．

定理 1.1 (定理 5.1)**.** $\delta_a \in M_\Lambda(R)$ $(a \in \Lambda)$ を $\delta_a(b) = \delta_{ab}$ $(b \in \Lambda)$ とする．左 $R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op}$-加群の準同型写像 $\overline{\phi} : \overline{\mathfrak{A}(w_\sigma)} \to A_\sigma$ を，以下で定義する．

$$\overline{\phi}(\mathbf{e}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}) = (\delta_{\mathfrak{s}(p)} \otimes \delta_{\mathfrak{s}(q)}) L_{x_1 y_1} \ldots L_{x_m y_m} + I_\sigma \quad (p, q \in Q^{(m)}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

ただし，$p = ((\lambda_1, x_1), \ldots, (\lambda_m, x_m))$, $q = ((\mu_1, y_1), \ldots, (\mu_m, y_m))$．このとき，$\overline{\phi}(I) = \{0\}$ であり，weak bialgebra の準同型写像 $\phi : \mathfrak{A}(w_\sigma) \to A_\sigma$ $(\phi(\alpha + I) = \overline{\phi}(\alpha), \alpha \in \mathfrak{A}(w_\sigma))$ を導く．

なお，本稿 4 節は澁川陽一氏（北海道大学）との共同研究に基づいている．

2 Weak bialgebra と left bialgebroid

この節では，weak bialgebra と left bialgebroid の基礎事項およびその関係性について述べる．なお，weak bialgebra については [2]，left bialgebroid については [3]，Frobenius-separable algebra については [10] を参照した．

以下、環といえば積において結合的で単位元の存在する環を指す．体 $\mathbb{K}$ を固定し，ベクトル空間および algebra はすべて $\mathbb{K}$ 上で定義されているものとする．

定義 2.1. C をベクトル空間とする．(C, Δ, ε) が coalgebra であるとは，線型写像 $\Delta : C \to C \otimes_{\mathbb{K}} C$, $\varepsilon : C \to \mathbb{K}$ が，以下の可換図式を満たすことである．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes_{\mathbb{K}} C \arrow[d, "\Delta \otimes \mathrm{id}_C"] \\ C \otimes_{\mathbb{K}} C \arrow[r, "\mathrm{id}_C \otimes \Delta"'] & C \otimes_{\mathbb{K}} C \otimes_{\mathbb{K}} C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\simeq"] & \\ \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} C & C \otimes_{\mathbb{K}} C \arrow[l, "\varepsilon \otimes \mathrm{id}_C"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C \otimes \varepsilon"'] & C \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Coalgebra C, C' に対し，線形写像 $\varphi : C \to C'$ が coalgebra の準同型写像であるとは，

$$\Delta^{C'} \circ \varphi = (\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta^C, \quad \varepsilon^{C'} \circ \varphi = \varepsilon^C$$

を満たすことである．

定義 2.2. B を algebra とする．(B,Δ,ε) が weak bialgebra であるとは，(B,Δ,ε) が coalgebra であり，以下を満たすことである．

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b)$$
$$(\Delta(1_B)\otimes 1_B)(1_B\otimes\Delta(1_B)) = 1_{B(1)}\otimes 1_{B(2)}\otimes 1_{B(3)} = (1_B\otimes\Delta(1_B))(\Delta(1_B)\otimes 1_B)$$
$$\varepsilon(ab_{(2)})\varepsilon(b_{(1)}c) = \varepsilon(abc) = \varepsilon(ab_{(1)})\varepsilon(b_{(2)}c)\ \ (\forall a,b,c\in B)$$

ただし，$\Delta(a) = a_{(1)}\otimes a_{(2)}$, $\Delta(a_{(1)})\otimes a_{(2)} = a_{(1)}\otimes a_{(2)}\otimes a_{(3)} = a_{(1)}\otimes\Delta(a_{(2)})$．

Weak bialgebra B, B' に対し，線形写像 $\varphi : B\to B'$ が algebra および coalgebra の準同型写像であるとき，φ は weak bialgebra の準同型写像であるという．

定義 2.3. Left bialgebroid $A_L := (A, L, s_L, t_L, \Delta_L, \pi_L)$ は，以下を満たす 6 つ組である:

1. A, L は環であり，環準同型写像 $s_L : L\to A$, $t_L : L^{op}\to A$ は
$$s_L(l)t_L(l') = t_L(l')s_L(l)\ \ (\forall l,l'\in L) \tag{2.1}$$
を満たす．また，以下で左作用と右作用を定義し，A を (L,L)-両側加群とみなす．
$$l\cdot a\cdot l' := s_L(l)t_L(l')a\ \ (l,l'\in L, a\in A) \tag{2.2}$$

2. (L,L)-両側加群の準同型写像 $\Delta_L : A\to A\otimes_L A$, $\pi_L : A\to L$ は，以下の可換図式を満たす．

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta_L"] \arrow[d, "\Delta_L"'] & A\otimes_L A \arrow[r, "\Delta_L\otimes\mathrm{id}_A"] & (A\otimes_L A)\otimes_L A \arrow[dl, "\simeq"] \\
A\otimes_L A \arrow[r, "\mathrm{id}_A\otimes\Delta_L"'] & A\otimes_L (A\otimes_L A) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[d, "\Delta_L"] \arrow[dr, "\simeq"] & \\
L\otimes_L A & A\otimes_L A \arrow[l, "\pi_L\otimes\mathrm{id}_A"] \arrow[r, "\mathrm{id}_A\otimes\pi_L"'] & A\otimes_L L
\end{tikzcd}$$

3. Δ_L, π_L は以下を満たす．
$$\begin{aligned}
a_{[1]}t_L(l)\otimes a_{[2]} &= a_{[1]}\otimes a_{[2]}s_L(l) &(2.3)\\
\Delta_L(1_A) &= 1_A\otimes 1_A &\\
\Delta_L(ab) &= \Delta_L(a)\Delta_L(b) &(2.4)\\
\pi_L(1_A) &= 1_L &
\end{aligned}$$
$$\pi_L(as_L(\pi_L(b))) = \pi_L(ab) = \pi(at_L(\pi_L(b)))\ \ (\forall l\in L, \forall a,b\in A)$$
ただし，$\Delta_L(a) = a_{[1]}\otimes a_{[2]}$．(2.4) の右辺は，(2.3) により well-defined となる．

定義 2.4. R を algebra とする．R が Frobenius-separable であるとは，線形写像 $tr : R\to\mathbb{K}$ と元 $e^{(1)}\otimes e^{(2)}\in R\otimes_{\mathbb{K}} R$ の組 $(tr, e^{(1)}\otimes e^{(2)})$ が存在して，以下を満たすことである．

$$r = tr(re^{(1)})e^{(2)} = e^{(1)}tr(e^{(2)}r),\ \ e^{(1)}e^{(2)} = 1_R\ \ (\forall r\in R)$$

Left bialgebroid は Frobenius-separable algebra と以下のような関係がある．

命題 2.5 ([10], Theorem 5.5)**.** $A_L := (A, L, s_L, t_L, \Delta_L, \pi_L)$ を left bialgebroid，ただし，A を algebra，L を $(tr, e^{(1)}\otimes e^{(2)})$ により Frobenius-separable algebra，s_L, t_L を algebra の準同型写像

とする．このとき，(A, Δ, ε) は以下で weak bialgebra の構造が与えられる．

$$\begin{aligned}\Delta(a) &= t_L(e^{(1)})a_{[1]} \otimes s_L(e^{(2)})a_{[2]} \\ \varepsilon(a) &= tr(\pi_L(a)) \ \ (a \in A)\end{aligned}$$

3 Weak bialgebra $\mathfrak{A}(w)$

この節では [7] における weak bialgebra の構成法の一般化を行う．

Λ を空でない有限集合とする．Λ 上の quiver Q とは，source map および target map と呼ばれる写像 $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} : Q \to \Lambda$ を持った集合のことである．quiver は以下のような図を用いて表現される．

$$\mathfrak{s}(a) \xrightarrow{\quad a \quad} \mathfrak{t}(a)$$

Q, Q' を Λ 上の quiver とする．$Q \times_\Lambda Q' = \{(a,b) \in Q \times Q' \mid \mathfrak{t}(a) = \mathfrak{s}(b)\}$ とし，これをファイバー積という．ファイバー積は $\mathfrak{s}(a,b) = \mathfrak{s}(a)$, $\mathfrak{t}(a,b) = \mathfrak{t}(b)$ により Λ 上の quiver となる．

いま，Q を Λ 上の有限な quiver，R を $(tr, e^{(1)} \otimes e^{(2)})$ により Frobenius-separable algebra とする．また，任意の $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$Q^{(0)} = \Lambda$, $Q^{(1)} = Q$, $Q^{(m+1)} = Q^{(m)} \times_\Lambda Q$ と定める．記号 $\mathbf{e}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ $(p, q \in Q^{(m)}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を基底とした左自由 $R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op}$-加群を

$$\overline{\mathfrak{A}(w)} := \bigoplus_{p,q \in Q^{(m)}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op} \cdot \mathbf{e}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

とする．$\overline{\mathfrak{A}(w)}$ は，以下の積とスカラー倍により algebra となる．

$$\Big(\sum_{\substack{p,q \in Q^{(m)} \\ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} r_{pq}\mathbf{e}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}\Big)\Big(\sum_{\substack{p',q' \in Q^{(n)} \\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} r'_{p'q'}\mathbf{e}\begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix}\Big) = \sum_{\substack{p,q \in Q^{(m)}, p',q' \in Q^{(n)} \\ m,n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}} r_{pq}r'_{p'q'}\delta_{\mathfrak{t}(p)\mathfrak{s}(p')}\delta_{\mathfrak{t}(q)\mathfrak{s}(q')}\mathbf{e}\begin{bmatrix} pp' \\ qq' \end{bmatrix}$$

$$k \cdot \Big(\sum_{p,q \in Q^{(m)}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} r_{pq}\mathbf{e}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}\Big) = \sum_{p,q \in Q^{(m)}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (kr_{pq})\mathbf{e}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \ \ (r_{pq} \in R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op}, k \in \mathbb{K})$$

$\mathbf{w}\left[\begin{smallmatrix} & a & \\ c & & b \\ & d & \end{smallmatrix}\right] \in R$ $((a,b),(c,d) \in Q^{(2)})$, $w = \{\mathbf{w}\left[\begin{smallmatrix} & a & \\ c & & b \\ & d & \end{smallmatrix}\right]\}_{(a,b),(c,d) \in Q^{(2)}}$，$I$ を以下の元で生成される $\overline{\mathfrak{A}(w)}$ の両側イデアルとし，$\mathfrak{A}(w) := \overline{\mathfrak{A}(w)}/I$ と定める．

$$\sum_{(x,y) \in Q^{(2)}} (\mathbf{w}\left[\begin{smallmatrix} & x & \\ a & & y \\ & b & \end{smallmatrix}\right] \otimes 1_R)\mathbf{e}\begin{bmatrix} x \\ c \end{bmatrix}\mathbf{e}\begin{bmatrix} y \\ d \end{bmatrix} - \sum_{(x,y) \in Q^{(2)}} (1_R \otimes \mathbf{w}\left[\begin{smallmatrix} & c & \\ x & & d \\ & y & \end{smallmatrix}\right])\mathbf{e}\begin{bmatrix} a \\ x \end{bmatrix}\mathbf{e}\begin{bmatrix} b \\ y \end{bmatrix} \ \ (\forall (a,b),(c,d) \in Q^{(2)})$$

Algebra の準同型写像 $s_R : R \to \mathfrak{A}(w)$, $t_R : R^{op} \to \mathfrak{A}(w)$ を，以下で定義する．

$$s_R(r) = \sum_{\lambda,\mu \in \Lambda} (r \otimes 1_R)\mathbf{e}\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} + I, \ \ t_R(r) = \sum_{\lambda,\mu \in \Lambda} (1_R \otimes r)\mathbf{e}\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} + I \ \ (r \in R)$$

$\mathfrak{A}(w) \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{A}(w)$ は以下の環準同型写像 $E : R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op} \to \mathfrak{A}(w) \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{A}(w)$ により，左 $R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op}$-加群となる．

$$E(r \otimes r') = s_R(r) \otimes t_R(r') \ \ (r, r' \in R)$$

E を用いて，左 $R\otimes_{\mathbb{K}} R^{op}$-加群の準同型写像 $\overline{\Delta}:\overline{\mathfrak{A}(w)}\to\mathfrak{A}(w)\otimes_{\mathbb{K}}\mathfrak{A}(w)$ を以下で定義する．

$$\overline{\Delta}(\mathbf{e}\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix})=\sum_{u\in Q^{(m)}}(1_R\otimes e^{(1)})\mathbf{e}\begin{bmatrix}p\\u\end{bmatrix}+I\otimes(e^{(2)}\otimes 1_R)\mathbf{e}\begin{bmatrix}u\\q\end{bmatrix}+I\quad(p,q\in Q^{(m)},m\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$$

命題 3.1. $\overline{\Delta}(I)=\{0\}$ であり，$\Delta(\alpha+I)=\overline{\Delta}(\alpha)$ $(\alpha\in\overline{\mathfrak{A}(w)})$ は well-defined な線型写像．

$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(R)$ は以下の環準同型写像 $F:R\otimes_{\mathbb{K}} R^{op}\to\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(R)$ により，左 $R\otimes_{\mathbb{K}} R^{op}$-加群となる．

$$F(r\otimes r')(l)=rlr'\quad(r,r',l\in R)$$

F を用いて，左 $R\otimes_{\mathbb{K}} R^{op}$-加群の準同型写像 $\overline{\theta}:\overline{\mathfrak{A}(w)}\to\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(R)$ を以下で定義する．

$$\overline{\theta}(\mathbf{e}\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix})(r)=\delta_{pq}r\quad(p,q\in Q^{(m)},m\in\mathbb{Z}_{\geq 0},r\in R)$$

命題 3.2. (3.1) を満たすとき，$\overline{\theta}(I)=\{0\}$ であり，$\theta(\alpha+I)=\overline{\theta}(\alpha)$ $(\alpha\in\overline{\mathfrak{A}(w)})$ は well-defined な線型写像．

$$\begin{cases}\mathbf{w}\left[{}_{c}\,{}^{a}_{d}\,{}_{b}\right]\in(R\text{ の中心})\quad(\forall(a,b),(c,d)\in Q^{(2)})\\ \mathfrak{s}(a)\neq\mathfrak{s}(c)\text{ or }\mathfrak{t}(b)\neq\mathfrak{t}(d)\Rightarrow\mathbf{w}\left[{}_{c}\,{}^{a}_{d}\,{}_{b}\right]=0\end{cases}\tag{3.1}$$

θ を用いて，線型写像 $\pi_R:\mathfrak{A}(w)\to R$, $\varepsilon:\mathfrak{A}(w)\to\mathbb{K}$ を以下で定義する．

$$\pi_R(\alpha)=\theta(\alpha)(1_R),\quad\varepsilon(\alpha)=tr(\pi_R(\alpha))\quad(\alpha\in\mathfrak{A}(w))$$

定理 3.3. (3.1) を満たすとき，$(\mathfrak{A}(w),\Delta,\varepsilon)$ は weak bialgebra．

4 Weak bialgebra A_σ

この節では [13, 14] における left bialgebroid の構成法の一般化を行う．なお，ここで構成された left bialgebroid は用いられた algebra の Frobenius-separable 性により，weak bialgebra となる．

Λ を空でない有限集合，X を有限集合，R を $(tr,e^{(1)}\otimes e^{(2)})$ により Frobenius-separable algebra，$M_\Lambda(R)$ を Λ から R への写像全体のなす algebra とする．$\sigma^{ab}_{cd}\in M_\Lambda(R)$ $(a,b,c,d\in X)$，$\sigma=\{\sigma^{ab}_{cd}\}_{a,b,c,d\in X}$，$G_\Lambda$ を Λ から Λ への全単射全体のなす群，G を G_Λ^{op} の部分群とする．すると G は Λ に次のようにして右から作用する: $\lambda\alpha=\alpha(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda,\alpha\in G)$．

$$HX:=(M_\Lambda(R)\otimes_{\mathbb{K}} M_\Lambda(R)^{op})\bigsqcup\{L_{ab}\mid a,b\in X\}\bigsqcup\{(L^{-1})_{ab}\mid a,b\in X\}$$

とし，$\mathbb{K}\langle HX\rangle$ を HX で生成される free algebra とする．また，I_σ を以下の元 (1)〜(5) で生成される $\mathbb{K}\langle HX\rangle$ の両側イデアルとし，$A_\sigma:=\mathbb{K}\langle HX\rangle/I_\sigma$ と定める．

(1) $\xi+\xi'-(\xi+\xi')$, $c\xi-(c\xi)$, $\xi\xi'-(\xi\xi')$ $(\forall c\in\mathbb{K},\forall\xi,\xi'\in M_\Lambda(R)\otimes_{\mathbb{K}} M_\Lambda(R)^{op})$.
$\xi+\xi'$ は，$\mathbb{K}\langle HX\rangle$ の和，$(\xi+\xi')$ は，$M_\Lambda(R)\otimes_{\mathbb{K}} M_\Lambda(R)^{op}$ の和を表す．積やスカラー倍についても同様．

(2) $\sum_{c\in X}L_{ac}(L^{-1})_{cb}-\delta_{ab}$, $\sum_{c\in X}(L^{-1})_{ac}L_{cb}-\delta_{ab}$ $(\forall a,b\in X)$.

(3) $(T_{\deg(a)}(f) \otimes 1_{M_\Lambda(R)})L_{ab} - L_{ab}(f \otimes 1_{M_\Lambda(R)})$,
$(1_{M_\Lambda(R)} \otimes T_{\deg(b)}(f))L_{ab} - L_{ab}(1_{M_\Lambda(R)} \otimes f)$,
$(f \otimes 1_{M_\Lambda(R)})(L^{-1})_{ab} - (L^{-1})_{ab}(T_{\deg(b)}(f) \otimes 1_{M_\Lambda(R)})$,
$(1_{M_\Lambda(R)} \otimes f)(L^{-1})_{ab} - (L^{-1})_{ab}(1_{M_\Lambda(R)} \otimes T_{\deg(a)}(f))$ $(\forall f \in M_\Lambda(R), \forall a, b \in X)$.
deg は X から G への写像.

(4) $\displaystyle\sum_{x,y\in X}(\sigma_{ac}^{xy} \otimes 1_{M_\Lambda(R)})L_{yd}L_{xb} - \sum_{x,y\in X}(1_{M_\Lambda(R)} \otimes \sigma_{xy}^{bd})L_{cy}L_{ax}$ $(\forall a, b, c, d \in X)$.

(5) $\emptyset - 1_{M_\Lambda(R)} \otimes 1_{M_\Lambda(R)}$
$\emptyset$ は空語を表す.

Algebra の準同型写像 $s_{M_\Lambda(R)} : M_\Lambda(R) \to A_\sigma, t_{M_\Lambda(R)} : M_\Lambda(R)^{op} \to A_\sigma$ を以下で定義する.

$$s_{M_\Lambda(R)}(f) = f \otimes 1_{M_\Lambda(R)} + I_\sigma \tag{4.1}$$
$$t_{M_\Lambda(R)}(f) = 1_{M_\Lambda(R)} \otimes f + I_\sigma \quad (f \in M_\Lambda(R)) \tag{4.2}$$

$s_{M_\Lambda(R)}, t_{M_\Lambda(R)}$ は (2.1) を満たし，(2.2) により，A_σ は $(M_\Lambda(R), M_\Lambda(R))$-両側加群となる.

命題 4.1. 加群として,

$$A_\sigma \otimes_{M_\Lambda(R)} A_\sigma \cong (A_\sigma \otimes_{\mathbb{K}} A_\sigma)/I_2$$

I_2 は $t_{M_\Lambda(R)}(f) \otimes 1_{A_\sigma} - 1_{A_\sigma} \otimes s_{M_\Lambda(R)}(f)$ $(\forall f \in M_\Lambda(R))$ なる元で生成される $A_\sigma \otimes_{\mathbb{K}} A_\sigma$ の右イデアル.

証明. 以下の加群の準同型写像 $\Phi : A_\sigma \otimes_{M_\Lambda(R)} A_\sigma \to (A_\sigma \otimes_{\mathbb{K}} A_\sigma)/I_2$, $\Xi : A_\sigma \otimes_{\mathbb{K}} A_\sigma \to A_\sigma \otimes_{M_\Lambda(R)} A_\sigma$, $\tilde{\Xi} : (A_\sigma \otimes_{\mathbb{K}} A_\sigma)/I_2 \to A_\sigma \otimes_{M_\Lambda(R)} A_\sigma$ は $\Phi \circ \tilde{\Xi} = \mathrm{id}_{(A_\sigma \otimes_{\mathbb{K}} A_\sigma)/I_2}$, $\tilde{\Xi} \circ \Phi = \mathrm{id}_{A_\sigma \otimes_{M_\Lambda(R)} A_\sigma}$ を満たす.

$$\begin{aligned} \Phi(a \otimes b) &= a \otimes b + I_2 \\ \Xi(a \otimes b) &= a \otimes b \quad (a, b \in A_\sigma) \\ \tilde{\Xi}(\alpha + I_2) &= \Xi(\alpha) \quad (\alpha \in A_\sigma \otimes_{\mathbb{K}} A_\sigma) \end{aligned}$$

□

Algebra の準同型写像 $\overline{\Delta} : \mathbb{K}\langle HX \rangle \to A_\sigma \otimes_{\mathbb{K}} A_\sigma$ を，以下で定義する.

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}(\xi) &= s_{M_\Lambda(R)} \otimes t_{M_\Lambda(R)}(\xi) \quad (\xi \in M_\Lambda(R) \otimes_{\mathbb{K}} M_\Lambda(R)^{op}) \\ \overline{\Delta}(L_{ab}) &= \sum_{c\in X} L_{ac} + I_\sigma \otimes L_{cb} + I_\sigma \quad (a, b \in X) \\ \overline{\Delta}((L^{-1})_{ab}) &= \sum_{c\in X} (L^{-1})_{cb} + I_\sigma \otimes (L^{-1})_{ac} + I_\sigma \end{aligned}$$

命題 4.2. $\overline{\Delta}(I_\sigma) \subset I_2$ で，以下の加群の準同型写像 $\nabla_{M_\Lambda(R)} : A_\sigma \to (A_\sigma \otimes_{\mathbb{K}} A_\sigma)/I_2$ は well-defined.

$$\nabla_{M_\Lambda(R)}(a + I_\sigma) = \overline{\Delta}(a) + I_2 \quad (a \in \mathbb{K}\langle HX \rangle)$$

系 4.3. $\Delta_{M_\Lambda(R)} = \tilde{\Xi} \circ \nabla_{M_\Lambda(R)}$ は $(M_\Lambda(R), M_\Lambda(R))$-両側加群の準同型写像.

Algebra の準同型写像 $\overline{\chi}: \mathbb{K}\langle HX\rangle \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(M_\Lambda(R))$ を，以下で定義する．

$$\begin{aligned}
&\overline{\chi}(\xi) = \zeta(\xi) \ \ (\xi \in M_\Lambda(R) \otimes_{\mathbb{K}} M_\Lambda(R)^{op})\\
&\overline{\chi}(L_{ab}) = \delta_{ab} T_{\deg(a)}\\
&\overline{\chi}((L^{-1})_{ab}) = \delta_{ab} T_{\deg(a)^{-1}} \ \ (a, b \in X)
\end{aligned}$$

ただし，$\zeta(f \otimes g) = \rho_l(f)\rho_r(g)$, $\rho_l(f)(h) = fh$, $\rho_r(g)(h) = hg$ $(f, g, h \in M_\Lambda(R))$.

命題 4.4. (4.3) を満たすとき，$\overline{\chi}(I_\sigma) = \{0\}$ であり，$\chi(a + I_\sigma) = \overline{\chi}(a)$ $(a \in \mathbb{K}\langle HX\rangle)$ は well-defined な algebra の準同型写像.

$$\begin{cases} \sigma^{ab}_{cd}(\lambda) \in (R \text{ の中心}) \ \ (\forall\lambda \in \Lambda, \forall a, b, c, d \in X) \\ \lambda \deg(d) \deg(b) \neq \lambda \deg(c) \deg(a) \Rightarrow \sigma^{bd}_{ac}(\lambda) = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

χ を用いて，$(M_\Lambda(R), M_\Lambda(R))$-両側加群の準同型写像 $\pi_{M_\Lambda(R)}: A_\sigma \to M_\Lambda(R)$ を以下で定義する．

$$\pi_{M_\Lambda(R)}(a) = \chi(a)(1_{M_\Lambda(R)})$$

定理 4.5. (4.3) を満たすとき，$A_\sigma := (A_\sigma, M_\Lambda(R), s_{M_\Lambda(R)}, t_{M_\Lambda(R)}, \Delta_{M_\Lambda(R)}, \pi_{M_\Lambda(R)})$ は，left bialgebroid.

$M_\Lambda(R)$ は以下の $(Tr, E^{(1)} \otimes E^{(2)})$ により Frobenius-separable となる．

$$Tr(f) = \sum_{\lambda\in\Lambda} tr(f(\lambda)), \ \ E^{(1)} \otimes E^{(2)} = \sum_{\lambda\in\Lambda} e^{(1)}_M \delta_\lambda \otimes e^{(2)}_M \delta_\lambda \ \ (f \in M_\Lambda(R))$$

ただし，$\delta_\lambda(\mu) = \delta_{\lambda\mu}$, $r_M(\lambda) = r$ $(r \in R, \lambda, \mu \in \Lambda)$．よって，命題 2.5 の Δ と ε により，A_σ は weak bialgebra となる．

5 主定理：Weak bialgebra homomorphism ϕ

この節では， [8] の一般化として，4 節の weak bialgebra A_σ と同様の設定のもとで構成される 3 節の weak bialgebra $\mathfrak{A}(w_\sigma)$ との間に準同型写像 $\phi: \mathfrak{A}(w_\sigma) \to A_\sigma$ を構成する．

A_σ を 4 節で構成された weak bialgebra とする．Λ 上の quiver Q を，$Q := \Lambda \times X$, $\mathfrak{s}(\lambda, x) = \lambda$, $\mathfrak{t}(\lambda, x) = \lambda \deg(x)$ $(\lambda \in \Lambda, x \in X)$ と定める．また，algebra R の元の族 $w_\sigma = w$ は以下を満たすと仮定する．

$$\mathbf{w}\begin{bmatrix} & (\lambda,a) & \\ (\mu,c) & & (\lambda',b) \\ & (\mu',d) & \end{bmatrix} = \delta_{\lambda\mu}\sigma^{ba}_{dc}(\lambda) \ \ (\forall((\lambda, a), (\lambda', b)), ((\mu, c), (\mu', d)) \in Q^{(2)})$$

この条件により，(3.1) を満たし，weak bialgebra $\mathfrak{A}(w_\sigma)$ が構成できる．

A_σ は以下の環準同型写像 $G: R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op} \to A_\sigma$ により，左 $R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op}$-加群となる．

$$G(r \otimes r') = (r_M \otimes r'_M) + I_\sigma \ \ (r, r' \in R)$$

定理 5.1. G を用いて，左 $R \otimes_{\mathbb{K}} R^{op}$-加群の準同型写像 $\overline{\phi}: \overline{\mathfrak{A}(w_\sigma)} \to A_\sigma$ を，以下で定義する．

$$\overline{\phi}(\mathbf{e}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}) = (\delta_{\mathfrak{s}(p)} \otimes \delta_{\mathfrak{s}(q)}) L_{x_1 y_1} \ldots L_{x_m y_m} + I_\sigma \ \ (p, q \in Q^{(m)}, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

ただし，$p = ((\lambda_1, x_1), \ldots, (\lambda_m, x_m))$, $q = ((\mu_1, y_1), \ldots, (\mu_m, y_m))$．このとき，$\overline{\phi}(I) = \{0\}$ であり，weak bialgebra の準同型写像 $\phi: \mathfrak{A}(w_\sigma) \to A_\sigma$ $(\phi(\alpha + I) = \overline{\phi}(\alpha), \alpha \in \mathfrak{A}(w_\sigma))$ を導く．

参考文献

[1] R. J. Baxter, "*Partition function of eight-vertex lattice model*", Ann. Physics, 70, 193-228, 1972.

[2] G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi, "*Weak Hopf algebras I. Integral theory and C^*-structure*", J. Algebra, 221, 385-438, 1999.

[3] G. Böhm, K. Szlachányi, "*Hopf algebroids with bijective antipodes: axioms, integrals, and duals*", J. Algebra, 274, 708-750, 2004.

[4] V. G. Drinfel'd, "*On some unsolved problems in quantum group theory*", In Quantum groups (Leningrad, 1990), volume 1510 of Lecture Notes in Math., 1-8, 1992.

[5] P. Etingof, A. Varchenko, "*Solutions of the quantum dynamical Yang-Baxter equation and dynamical quantum groups*", Comm. Math. Phys., 196, 591-640, 1998.

[6] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin, A. Takhtajan, "*Quantization of Lie groups and Lie algebras*", in:Algebraic analysis, Academic Press, Inc., Boston, 129-139, 1989.

[7] T. Hayashi, "*Quantum groups and Quantum semigroups*", J. Algebra, 204, 225-254, 1998.

[8] D. K. Matsumoto, K. Shimizu, "*Quiver-theoretical approach to dynamical Yang-Baxter maps*", J. Algebra, 507, 47-80, 2018.

[9] J. B. McGuire, "*Study of exactly soluble one-dimensional N-body problems*", J. Mathematical Phys., 5, 622-636, 1964.

[10] P. Schauenburg, "*Weak Hopf algebras and quantum groupoids*", In Noncommutative geometry and quantum groups (Warsaw, 2001), volume 61 of Banach Center Publ., 171-188, 2003.

[11] Y. Shibukawa, "*Dynamical Yang-Baxter maps*", Int. Math. Res. Not., (36), 2199-2221, 2005.

[12] Y. Shibukawa, "*Dynamical Yang-Baxter maps with an invariance condition*", Publ. Res. Inst. Math. Sci., 43(4), 1157-1182, 2007.

[13] Y. Shibukawa, M. Takeuchi, "*FRT construction for dynamical Yang-Baxter maps*", J. Algebra, 323, 1698-1728, 2010.

[14] Y. Shibukawa, "*Hopf algebroids and rigid tensor categories associated with dynamical Yang-Baxter maps*", J. Algebra, 449, 408-445, 2016.