

擬リーマン空間形内の全測地的光的部分多様体

佐藤 雄一郎 (Yuichiro Sato)*

1. 序 (導入と準備)

微分幾何において、リーマン多様体は古典的な対象でありながらも、現在もなお中心的存在であり、洗練された理論が展開される。一方で、アインシュタインによる相対論では、ローレンツ多様体と呼ばれる正定値とは限らない計量を持つ多様体が導入された。これをきっかけに擬リーマン多様体と呼ばれるリーマン多様体の一般化が定式化され、リーマン幾何のアナロジーが試みられている。しかしながら、擬リーマン多様体においては、ホップ・リノウの定理など古典的な結果が成立せず、その大域的な性質が、リーマンの場合とどのような違いがあるのかという問いは基本的なものである。

一方で、曲線・曲面論の一般化として部分多様体論がある。擬リーマン多様体内の部分多様体を考えると、誘導計量が非退化の場合、退化の場合、あるいは混合する場合がある。非退化になる場合は、多くの先行研究が存在する。例えば、Anciaux [1] による極小部分多様体の研究がある。本稿では、退化する場合を考える。Bejancu–Duggal [3] や Kupeli [9] によって基礎理論が構築されたが、未知な点が多く、その研究は始まったばかりであると言えるだろう。本稿の主結果は、全測地的光的部分多様体に関するものだが、全臍的光的部分多様体の一般論は、Duggal–Jin [5] によって展開されている。その特徴付けや存在問題としての研究は少なくないが、分類問題は全く解決されていない。また、極小光的部分多様体の定式化が Sakaki [11] によって与えられている。また、混合する場合は、曲面の場合に研究が存在する。例えば、[7] を参照せよ。

さて、本稿は序破急の三部作構成とした。本論である序では、以降、舞台となる擬リーマン多様体について必要最低限の予備知識について説明する。破では、主役である擬リーマン多様体内の光的部分多様体についての理論を Bejancu–Duggal [3] に従い、解説する。最後に、急では、主結果である擬リーマン空間形内の全測地的光的部分多様体の分類結果について紹介する。

M を n 次元可微分多様体とする。以降、多様体と述べた場合、可微分性は仮定する。 g を M 上の擬リーマン計量とする。すなわち、非退化で滑らかな対称な計量テンソルとする。このとき、組 (M, g) を n 次元擬リーマン多様体と呼ぶ。

符号 (p, q) において、数 p のことを計量 g の指数としばしば呼ばれる。 $p = 0$ のとき、まさに g はリーマン計量であり、 (M, g) はリーマン多様体のことに他ならない。また、 $p = 1$ のとき、擬リーマン計量 g はローレンツ計量と呼ばれ、相対論において重要な役割を果たしている。

符号 (p, q, r) の n 次元特異擬ユークリッド空間を

$$\mathbb{R}^{p,q,r} := \left(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle = - \sum_{i=1}^p dx_i^2 + \sum_{j=p+1}^{p+q} dx_j^2 + \sum_{k=p+q+1}^n 0 dx_k^2 \right)$$

で定める [13]。ここで、 $n = p + q + r$ であり、 $(x_1, \dots, x_n)$ は $\mathbb{R}^n$ の標準座標を表す。このとき、次のことが分かる。

* 〒192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1 首都大学東京大学院 理学研究科 数理科学専攻
e-mail: satou-yuichirou@ed.tmu.ac.jp

- $r = 0$ のとき, $\mathbb{R}^{p,q,0}$ は指数 p の擬ユークリッド空間と呼び, $\mathbb{R}_p^n$ と表す.
- $p = r = 0$ のとき, $\mathbb{R}^{0,n,0}$ は通常のユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ のことに他ならない.

符号 $(0, 2, 1)$ の場合の先行研究は, [2] や [12] を参照せよ. 指数 p ($0 \leq p \leq q$) の n 次元擬ユークリッド空間を $\mathbb{R}_p^n$ を考える. $\mathbb{R}_p^n$ の零でないベクトル v が空間的, 時間的, 光的であるとは, それぞれ $|v|^2 > 0, |v|^2 < 0, |v|^2 = 0$ を満たすことである. ここで, $v \in \mathbb{R}_p^n$ に対し, $|v|^2 := \langle v, v \rangle$ である. 記号に 2 のべき指数がつけられているが, 負値も取りうることに注意する. あくまで形式的な記号である.

指数 1 の n 次元擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}_1^n$ を n 次元ミンコフスキー空間と呼ぶ. さらに 4 次元ミンコフスキー空間は, 平坦な時空モデルとして, 物理学と密接な関係がある.

ここで, 擬ユークリッド空間内の非退化な部分多様体について, よく知られた事実を述べる.

定理 1 ([1]). 擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}_p^n$ 内の任意の非退化なアフィン部分空間は, 全測地的部分多様体であり, 逆に, $\mathbb{R}_p^n$ 内の任意の連結な全測地的部分多様体は, 非退化なアフィン部分空間の開部分集合である.

次に $\mathbb{R}_p^n$ 内の超曲面を考える. ここで, $\mathbb{R}_p^n$ 内の 2 次超曲面を実数 $c \in \mathbb{R}$ に対し,

$$Q_{p,c}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}_p^n \mid |x|^2 = c\}$$

を定め, $\mathbb{R}_p^n$ への包含写像による誘導計量を導入する. さらに $r > 0$ に対し,

$$\mathbb{S}_p^{n-1}(r^2) := Q_{p,r^2}^{n-1}, \quad \mathbb{H}_{p-1}^{n-1}(-r^2) := Q_{p,-r^2}^{n-1}$$

と置くと, $n \geq 3$ のとき, これらは擬リーマン多様体として, 断面曲率がそれぞれ一定値 $\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2}$ であり, かつ測地的完備である. $\mathbb{S}_p^{n-1}(r^2), \mathbb{H}_{p-1}^{n-1}(-r^2)$ をそれぞれ指数 p の $(n-1)$ 次元擬球面, 指数 $(p-1)$ の $(n-1)$ 次元擬双曲空間と呼ぶ. また, 擬ユークリッド空間を含めたものを総称して, 擬リーマン空間形と呼ぶこともある. 4 次元の場合において, ド・ジッター空間または, 反ド・ジッター空間はそれぞれ正または, 負の定曲率を持つ時空モデルとして, やはり物理学と関係がある.

定理 2 ([1]). $c \neq 0$ のとき $Q_{p,c}^{n-1}$ は, 擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}_p^n$ 内の全臍的超曲面であり, 逆に, $\mathbb{R}_p^n$ 内の任意の連結な全臍的超曲面は, 平均曲率 H が一定となり, 平行移動の差を除いて, $H = 0$ のとき, 非退化な超平面の開部分集合であり, $H \neq 0$ のとき, 2 次曲面 $Q_{p,c}^{n-1}$ の開部分集合である. ここで, $|c| = \frac{1}{H^2}$ である.

2 次曲面 $Q_{p,c}^{n-1}$ に対し, $c = 0$ のとき, $Q_{p,c}^{n-1}$ は, $p = 0$ ならば原点の一点集合になってしまう. $1 \leq p \leq q$ ならば原点 $(0, \dots, 0)$ を唯一の孤立特異点とする滑らかな超曲面が得られるが, 誘導計量が退化する. これは, 擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}_p^n$ 内の $(n-1)$ 次元光錐と呼ばれ, ミンコフスキー空間の場合に物理的な意味を持つ. また, 光錐は次節で述べる光的部分多様体の一例である.

平坦でない擬リーマン空間形内の全測地的部分多様体については, 次の結果がある.

定理 3 ([4]). 擬球面 $\mathbb{S}_p^n(r^2) \subset \mathbb{R}_p^{n+1}$ と非退化な線形部分空間との共通部分は, $\mathbb{S}_p^n(r^2)$ 内の全測地的部分多様体であり, 逆に, $\mathbb{S}_p^n(r^2)$ 内の任意の連結な全測地的部分多様体は, 非退化な線形部分空間との共通部分の開部分集合である. 擬双曲空間 $\mathbb{H}_p^n(-r^2) \subset \mathbb{R}_{p+1}^{n+1}$ 内の全測地的部分多様体についても擬球面と同様の主張が成立する.

2. 破(擬リーマン多様体内の光的部分多様体)

以下、断りのない限り $(\bar{M}, \bar{g})$ で、実 $(m+n)$ 次元擬リーマン多様体を表す。ここで、 $m, n \geq 1$ で、 $\bar{g}$ の指数 p は、 $1 \leq p \leq m+n-1$ を満たすとする。 M を実 m 次元多様体、 $f: M \rightarrow \bar{M}$ を C^∞ 級はめ込みで、 M 上の f による誘導計量を $g := f^*\bar{g}$ とする。

各点 $x \in M$ に対し、

$$T_x^\perp M := \{v \in T_x \bar{M} \mid \bar{g}_x(v, w) = 0, \forall w \in T_x M\}$$

を定める。 $\bar{g}_x$ が $T_x M$ 上で退化するならば、 $T_x^\perp M$ 上でも退化し、逆も成立する。このとき、特に、非自明な交わりを持ち、

$$\text{Rad} T_x M = \text{Rad} T_x^\perp M = T_x M \cap T_x^\perp M \supsetneq \{0\}$$

が成立する。しかしながら、この空間の次元は、点 $x \in M$ に依存する。

$\bar{M}$ の(はめ込まれた)部分多様体 M が r -光的 (r -退化, r -零的) であるとは、対応

$$M \ni x \mapsto \text{Rad} T_x M \subset T_x M$$

が階数 $r > 0$ の滑らかな接分布を定めることをいい、

$$\text{Rad} TM = \bigcup_{x \in M} \text{Rad} T_x M$$

を M 上の根基分布という。このとき、誘導計量 g は、 r -光的 (r -退化, r -零的) であるといわれ、特に r を明示する必要がないとき、 M, g をそれぞれ単に、光的部分多様体、光的計量という。

定理 4 ([3]). (M, g) を擬リーマン多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ 内の部分多様体とする。このとき、次は同値である。 r は $1 \leq r \leq m$ とする。

(i) M は r -光的である。

(ii) 各座標近傍 $\mathcal{U} \subset M$ に対し、 $\mathcal{U} \ni x \mapsto \text{Rad} T_x \mathcal{U}$ は、 $\mathcal{U}$ 上の階数 r の滑らかな分布を定める。

(iii) 各座標近傍 $\mathcal{U} \subset M$ に対し、 g は $\mathcal{U}$ 上で、一定の階数 $m-r$ を持つ。

このとき、それぞれ階数が m, n, r となる M 上のベクトル束 $TM, T^\perp M, \text{Rad} TM$ が構成される。ここで、次を定義する。 $\overset{\perp}{\oplus}$ は直交直和を表すものとする。

(i) $S(TM)$ が M のスクリーン分布であるとは、 M 上のベクトル束であって、直和

$$TM = S(TM) \overset{\perp}{\oplus} \text{Rad} TM$$

を満たすことをいう。これは階数 $(m-r)$ の非退化なベクトル束である。

(ii) $S(T^\perp M)$ が M のスクリーン横断的ベクトル束であるとは、 M 上のベクトル束であって、直和

$$T^\perp M = S(T^\perp M) \overset{\perp}{\oplus} \text{Rad} TM$$

を満たすことをいう。これは階数 $(n-r)$ の非退化なベクトル束である。

- (iii) $\text{ltr}(TM)$ が M の光的横断的ベクトル束であるとは、 $f^*T\bar{M}$ の階数 r の部分束であって、各座標近傍 $\mathcal{U} \subset M$ と、任意の $\text{Rad}TM|_{\mathcal{U}}$ 上の枠場 $\{\xi_i\}_{i=1}^r$ に対し、 $\text{ltr}(TM)|_{\mathcal{U}}$ に属する切断 $\{N_i\}_{i=1}^r$ が存在して、

$$\bar{g}(N_i, \xi_j) = \delta_{ij}, \quad \bar{g}(N_i, N_j) = 0 \quad (i, j \in \{1, \dots, r\})$$

を満たすことをいう。

- (iv) B が M の補スクリーンベクトル束であるとは、 $f^*T\bar{M}$ の階数 $2r$ の部分束であって、

$$\text{Rad}TM \subset B$$

を満たす非退化なベクトル束のことをいう。

これらの部分束は存在するが、一意性は全く成立しないことに注意する。すなわち、擬リーマン多様体内の光的部分多様体の研究を行う際は、選び方に依らない幾何学的な性質を見抜き、調べなければならない。

r -光的部分多様体 M に対し、次のようなクラス分けを考える。

(Case I) : $0 < r < \min\{m, n\}$ のとき、 M をプロパーな r -光的部分多様体という。

(Case II) : $0 < r = n < m$ のとき、 M を余等方的部分多様体という。

(Case III) : $0 < r = m < n$ のとき、 M を等方的部分多様体という。

(Case IV) : $0 < r = m = n$ のとき、 M を全光的部分多様体という。

定義から、 M が光的曲線 ($m = 1$) のとき、等方的であり、光的超曲面 ($n = 1$) のとき、余等方的である。また、 $f^*T\bar{M}$ 上の階数 0 の部分束を、 $f^*T\bar{M}$ の零切断のみからなる M 上のベクトル束 $\{0\}$ として約束する。このとき、次が成立する。

命題 5 (S.). (M, g) を擬リーマン多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ の r -光的部分多様体とする。このとき、 M のスクリーン分布とスクリーン横断的ベクトル束の組 $(S(TM), S(T^\perp M))$ の全体をなす集合と、 M の補スクリーンベクトル束 B の全体をなす集合の間に一対一対応が存在して、

$$f^*T\bar{M} = S(TM) \overset{\perp}{\oplus} S(T^\perp M) \overset{\perp}{\oplus} B$$

を満たし、特に、

$$M : \text{余等方的} \iff S(T^\perp M) = \{0\} \iff f^*T\bar{M} = S(TM) \overset{\perp}{\oplus} B$$

$$M : \text{等方的} \iff S(TM) = \{0\} \iff f^*T\bar{M} = S(T^\perp M) \overset{\perp}{\oplus} B$$

$$M : \text{全光的} \iff S(TM) = S(T^\perp M) = \{0\} \iff f^*T\bar{M} = B$$

が成立する。

r -光的部分多様体 M に対し、 M 上のベクトル束

$$\text{tr}(TM) := \text{ltr}(TM) \overset{\perp}{\oplus} S(T^\perp M)$$

を定める．このとき，

$$f^*T\bar{M} = TM \oplus \text{tr}(TM)$$

である．ここで， $\oplus$ は直交でない直和を表す．この $\text{tr}(TM)$ を M の横断的ベクトル束といい， M に沿う $\bar{M}$ の局所擬正規直交枠場が

$$\{\xi_i, N_i, X_a, W_\alpha\}$$

によって与えられる．ここで， $1 \leq i \leq r$, $r+1 \leq a \leq m$, $r+1 \leq \alpha \leq n$ で， $\{\xi_i\}, \{N_i\}$ は，それぞれ $\text{Rad}TM, \text{ltr}(TM)$ の局所枠場で， $\{X_a\}, \{W_\alpha\}$ は，それぞれ $S(TM), S(T^\perp M)$ の局所正規直交枠場である．

注意 6. (Case II) と (Case IV) のとき， M の横断的ベクトル束 $\text{tr}(TM)$ を

$$\text{tr}(TM) = \text{ltr}(TM)$$

で定め，

$$f^*T\bar{M} = TM \oplus \text{ltr}(TM)$$

となる．

(Case III) のとき， M の横断的ベクトル束 $\text{tr}(TM)$ を

$$\text{tr}(TM) = S(T^\perp M) \oplus^\perp \text{ltr}(TM)$$

で定め，

$$f^*T\bar{M} = TM \oplus \text{tr}(TM)$$

となる．

命題 7 (S.). (M, g) を擬リーマン多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ の 1-光的部分多様体とする．このとき， M のスクリーン分布とスクリーン横断的ベクトル束の組 $(S(TM), S(T^\perp M))$ の全体をなす集合と， M の光的横断的ベクトル束 $\text{ltr}(TM)$ の全体をなす集合の間に一対一対応が存在して，

$$f^*T\bar{M} = S(TM) \oplus^\perp S(T^\perp M) \oplus^\perp (\text{Rad}TM \oplus \text{ltr}(TM))$$

を満たす． $r > 1$ の場合，この結果は，光的横断的ベクトル束の一意性を除いて成立する．

r -光的部分多様体に対し，ベクトル束としての直和

$$f^*T\bar{M} = TM \oplus \text{tr}(TM)$$

が得られたので，これを用いて次のような分解を得る．

以降， $(\bar{M}, \bar{g})$ のレビ・チビタ接続を $\bar{\nabla}$ とする．任意の $X, Y \in \Gamma(TM)$, $V \in \Gamma(\text{tr}(TM))$ に対して，

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X, Y), \\ \bar{\nabla}_X V &= -A(V, X) + \nabla_X^t V\end{aligned}$$

となる．これらをそれぞれ M のガウスの公式，ワインガルテンの公式と呼ぶ．また，誘導された ∇, ∇^l をそれぞれ M 上の誘導接続，横断的接続といい，対称 $C^\infty(M)$ -双線形形式 h を M の第二基本形式という．また，各 $V \in \Gamma(\text{tr}(TM))$ に対し， $C^\infty(M)$ -線形作用素を

$$A_V : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM) ; A_V(X) := A(V, X)$$

によって定め， M の V に関する形作用素という．

以下， M は (Case I) または (Case III) とする．このとき， $\text{tr}(TM) = \text{ltr}(TM) \oplus^\perp S(T^\perp M)$ より， M のガウスの公式，ワインガルテンの公式はそれぞれ

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h^l(X, Y) + h^s(X, Y), \\ \bar{\nabla}_X V &= -A(V, X) + D_X^l V + D_X^s V\end{aligned}$$

となる． h^l, h^s をそれぞれ M の光的第二基本形式，スクリーン第二基本形式という． D^l, D^s はそれぞれ $\text{tr}(TM)$ 上の線形接続にならないことに注意する．そこで， L, S をそれぞれ $\text{tr}(TM)$ 上の $\text{ltr}(TM), S(T^\perp M)$ への射影束準同型とする．

また，任意の $X \in \Gamma(TM)$ に対し，微分作用素を

$$\begin{aligned}\nabla_X^l &: \Gamma(\text{ltr}(TM)) \rightarrow \Gamma(\text{ltr}(TM)) ; \nabla_X^l(LV) := D_X^l(LV), \\ \nabla_X^s &: \Gamma(S(T^\perp M)) \rightarrow \Gamma(S(T^\perp M)) ; \nabla_X^s(SV) := D_X^s(SV)\end{aligned}$$

によって定めると，これらはそれぞれ $\text{ltr}(TM), S(T^\perp M)$ 上の線形接続 ∇^l, ∇^s を定めることが分かり，これらをそれぞれ M 上の光的横断的接続，スクリーン横断的接続という．

M を一般に r -光的部分多様体として， $\{N_i, W_\alpha\}$ を $\text{tr}(TM)$ の局所枠場とする．このとき，(Case I) または (Case III) の場合については，局所的に

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sum_{i=1}^r h_i^l(X, Y) N_i + \sum_{\alpha=r+1}^n h_\alpha^s(X, Y) W_\alpha$$

と表せ，同様にして，(Case II) または (Case IV) の場合については，局所的に

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sum_{i=1}^n h_i^l(X, Y) N_i$$

と表せる．この対称 $C^\infty(M)$ -双線形形式の族 $\{h_i^l\}, \{h_\alpha^s\}$ をそれぞれ M の局所光的第二基本形式，局所スクリーン第二基本形式という．

定理 8 ([3]). (M, g) を擬リーマン多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ の r -光的部分多様体とする．このとき， M の局所光的第二基本形式は， M のスクリーン分布，スクリーン横断的ベクトル束，光的横断的ベクトル束の選び方に依らない．但し， $\text{Rad}TM$ の局所枠場 $\{\xi_i\}$ の取り方には依存することに注意する．

スクリーン分布が消えない状況を考えるため，以下，(Case I) または (Case II) の場合を考える．このとき，

$$TM = S(TM) \oplus^\perp \text{Rad}TM$$

であるので、各 $X, Y \in \Gamma(TM), \xi \in \Gamma(\text{Rad}TM)$ に対し、

$$\begin{aligned}\nabla_X PY &= \nabla_X^* PY + h^*(X, PY), \\ \nabla_X \xi &= -\dot{A}(\xi, X) + \nabla_X^t \xi\end{aligned}$$

と分解される．ここで、 P は、射影 $P : TM \rightarrow S(TM)$ である．このとき、 ∇^*, ∇^t は、それぞれ $S(TM), \text{Rad}TM$ 上の計量接続となり、 $S(TM), \text{Rad}TM$ 上の誘導接続と呼ぶ． h^* は、 $\Gamma(TM) \times \Gamma(S(TM))$ 上で定まる $\Gamma(\text{Rad}TM)$ に値を持つ $C^\infty(M)$ -双線型形式であって、これを $S(TM)$ の第二基本形式という． $\dot{A}$ は、 $\Gamma(\text{Rad}TM) \times \Gamma(TM)$ 上で定まる $\Gamma(S(TM))$ に値を持つ $C^\infty(M)$ -双線型形式であって、各 $\xi \in \Gamma(\text{Rad}TM)$ に対し、 $C^\infty(M)$ -線形作用素

$$\dot{A}_\xi : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(S(TM)) ; \dot{A}_\xi(X) = \dot{A}(\xi, X) \quad (X \in \Gamma(TM))$$

を定め、これを $S(TM)$ の ξ に関する形作用素という．

次のような関係式を持つことが示される．任意の $X, Y \in \Gamma(TM), \xi \in \Gamma(\text{Rad}TM)$ に対し、

$$\bar{g}(h^l(X, PY), \xi) = g(\dot{A}_\xi X, PY)$$

が成立する．すなわち、形作用素 $\dot{A}$ と h^l の $\Gamma(TM) \times \Gamma(S(TM))$ への制限は、等価である．また、任意の $X, Y \in \Gamma(TM), N \in \Gamma(\text{ltr}(TM))$ に対し、

$$\bar{g}(h^*(X, PY), N) = \bar{g}(A_N X, PY)$$

が成立する．すなわち、形作用素 A と h^* は、等価である．

(M, g) を擬リーマン多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ の r -光的部分多様体とし、 M 上の誘導接続を ∇ とする．このとき、 M が全測地的であるとは、 ∇ に関する任意の測地線が、 $\bar{\nabla}$ に関する $\bar{M}$ の測地線になることをいう．

定理 9 ([3]). (M, g) を擬リーマン多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ の r -光的部分多様体とし、 $S(TM), S(T^\perp M), \text{ltr}(TM)$ をそれぞれ一つずつ選ぶ．このとき、次は同値である．

- (i) M は全測地的である．
- (ii) M 上で $h^l = 0, h^s = 0$ である．すなわち、 M 上で $h = 0$ である．
- (iii) 任意の $\xi \in \Gamma(\text{Rad}TM)$ に対し、 M 上で $\dot{A}_\xi = 0$ 、任意の $W \in \Gamma(S(TM))$ に対し、 A_W は $\Gamma(\text{Rad}TM)$ 値であり、任意の $X \in \Gamma(TM), V \in \Gamma(\text{tr}(TM))$ に対し、 $D^l(X, SV) = 0$ を満たす．

r -光的部分多様体が多測地的であることは、 $S(TM), S(T^\perp M), \text{ltr}(TM)$ の選び方に依らない幾何学的な条件である．

系 10 ([3]). 全測地的 r -光的部分多様体上に誘導されるすべての誘導接続は、計量接続であり、レビ・チビタ接続 $\bar{\nabla}$ の $\Gamma(TM)$ への制限に一致する．

系 11 ([3]). (M, g) を擬リーマン多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ の余等方的部分多様体とする．このとき、次は同値である．

- (i) M は全測地的である.
- (ii) M 上で $h^l = 0$ である.
- (iii) 任意の $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$ に対し, M 上で $A_\xi^* = 0$ である.
- (iv) 誘導接続 ∇ は, 計量接続である.

系 12 ([3]). (M, g) を擬リーマン多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ の等方的部分多様体とする. このとき, 次は同値である.

- (i) M は全測地的である.
- (ii) M 上で $h^s = 0$ である.
- (iii) 任意の $X \in \Gamma(TM), V \in \Gamma(\text{tr}(TM))$ に対し, $D^l(X, SV) = 0$ である.

系 13 ([3]). すべての全光的部分多様体は, 全測地的である.

3. 急 (主結果と課題)

W を指数 p の $(m+n)$ 次元擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}_p^{m+n}$ 内の退化 m 次元部分空間, $v \in \mathbb{R}_p^{m+n}$ とする. このとき, $v + W$ を $\mathbb{R}_p^{m+n}$ 内の光的 m -平面という. 容易に分かることとして, 任意の r -光的 m -平面は, 擬ユークリッド空間内の全測地的光的部分多様体である. 逆が成立する.

定理 14 (S.). $m \geq 2, n \geq 1, 1 \leq p \leq [\frac{m+n}{2}]$ とし, M を m 次元連結多様体, $f: M \rightarrow \mathbb{R}_p^{m+n}$ を r -光的はめ込みとする. f による M 上に誘導される退化計量を g で表す. このとき, (M, g) が擬ユークリッド空間 $\mathbb{R}_p^{m+n}$ 内の全測地的光的部分多様体ならば, f による像 $f(M)$ は, $\mathbb{R}_p^{m+n}$ 内のある r -光的 m -平面の開部分集合である.

Proof. 証明は, 測地線の議論を使う. すなわち, 擬ユークリッド空間内の任意の測地線は, 直線であることを利用する. $\square$

$m \geq 2, 1 \leq p \leq [\frac{m+1}{2}]$ とし, $\varepsilon = \pm 1$ に対し, 非平坦な擬リーマン空間形を

$$Q_p^{m+1}(\varepsilon) := \begin{cases} \mathbb{S}_p^{m+n}(1) \subset \mathbb{R}_p^{m+2} & (\varepsilon = 1), \\ \mathbb{H}_p^{m+n}(-1) \subset \mathbb{R}_{p+1}^{m+2} & (\varepsilon = -1) \end{cases}$$

と定める. 更に, $\bar{p} := p + \frac{1-\varepsilon}{2}$ とすれば, 統一的に

$$Q_p^{m+1}(\varepsilon) \subset \mathbb{R}_{\bar{p}}^{m+2}$$

と表せる. このとき, $Q_p^{m+1}(\varepsilon)$ 内の超曲面 $N(\varepsilon)$ を次で構成する.

光的ベクトル $v := (1, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}_{\bar{p}}^{m+2}$ と直交するベクトル全体の空間

$$W := \{x \in \mathbb{R}_{\bar{p}}^{m+2} \mid \langle x, v \rangle = 0\}$$

は, 1-光的 $(m+1)$ -平面である. このとき, 次を定める.

$$N(\varepsilon) := Q_p^{m+1}(\varepsilon) \cap W.$$

命題 15 (S.). $N(\varepsilon)$ は, $Q_p^{m+1}(\varepsilon)$ 内の全測地的光的超曲面である.

超曲面の場合, この逆が成立する.

定理 16 (S.). $m \geq 2, 1 \leq p \leq [\frac{m+1}{2}], \varepsilon = \pm 1$ とし, M を m 次元連結多様体, $f: M \rightarrow Q_p^{m+1}(\varepsilon)$ を r -光的はめ込みとする. f による M 上に誘導される退化計量を g で表す. このとき, (M, g) が $Q_p^{m+1}(\varepsilon)$ 内の全測地的光的超曲面ならば, $Q_p^{m+1}(\varepsilon)$ の等長変換の差を除いて, f の像 $f(M)$ は, $N(\varepsilon)$ の開部分集合である.

Proof. 光的超曲面は, 余等方的であるので, 系 10, 11 の結果を使って, 初等的な計算により, 階数 1 の根基分布の枠場が定ベクトルとして取れることを示す. $\square$

非平坦な擬リーマン空間形 $Q_p^{m+1}(\varepsilon)$ の場合に, 全測地的部分多様体を完全分類することが直近の課題である. 擬ユークリッド空間のときと同様に, 測地線の議論で示することができるだろうか. ローレンツ空間形の場合に, リーマン沈め込みを利用した先行研究が存在する [6]. より統一的な証明が求められる.

一方, 平坦の場合であるが, n 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}_1^n$ 内の光的超曲面についてはある意味では, 研究が完了している. より厳密には, 次が成立する.

事実 ([8]). n 次元ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}_1^n$ 内の光的超曲面は, 線織超曲面である.

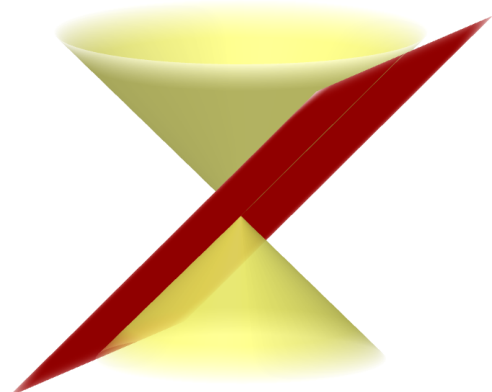


図 1: $\mathbb{R}_1^3$ 内の全測地的光的曲面 (赤色) と光錐 (黄色) の図示.

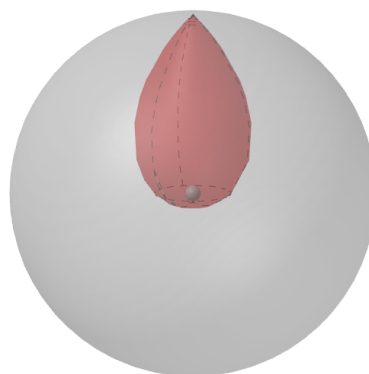


図 2: $S^3_1(1)$ 内の全測地的光的曲面 $N(1)$ (赤色) の図示.

参考文献

- [1] H. Anciaux, “*Minimal submanifolds in pseudo-Riemannian geometry*”, World Scientific (2011).
- [2] M. E. Aydin, “*Classification results on surfaces in the isotropic 3-space*”, AKU J. Sci. Eng. **16** (2016), 239–246.
- [3] A. Bejancu and K. L. Duggal, “*Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications*”, Kluwer Academic Publishers (1996).
- [4] B. Y. Chen, “*Pseudo-Riemannian geometry, δ -invariants and applications*”, World Scientific (2011).
- [5] K. L. Duggal and D. H. Jin, “*Totally umbilical lightlike submanifolds*”, Kodai Math. J. **26** (2003), no. 1, 49–68.

- [6] A. Ferrandez, A. Gimenez and P. Lucas, “*Geometry of lightlike submanifolds in Lorentzian space forms*”, Pub. de la RSME. **5** (2003), 125–139.
- [7] S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, “*Entire zero-mean curvature graphs of mixed type in Lorentz-Minkowski 3-space*” Quarterly J. Math. **67** (2016), 801–837.
- [8] S. Izumiya and T. Sato, “*Lightlike hypersurfaces along spacelike submanifolds in Minkowski space-time*”, J. Geom. Phys. **71** (2013), 30–52.
- [9] D. N. Kupeli, “*Singular semi-Riemannian geometry*”, Kluwer Academic Publishers (1996).
- [10] M. O’Neill, “*Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*”, Academic Press, London (1983).
- [11] M. Sakaki, “*On the definition of minimal lightlike submanifolds*”, Int. Electron. J. Geom. **3** (2010), no. 1, 16–23.
- [12] Y. Sato, “*d-minimal surfaces in three-dimensional singular semi-Euclidean space $\mathbb{R}^{0,2,1}$* ”, arXiv:1809.07518.
- [13] O. C. Stoica, “*On singular semi-Riemannian manifolds*”, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., **11**, (2014), no. 5, 1450041.