# $G_2$ 作用によるグラスマン多様体内の等質超曲面の主曲率

お茶の水女子大学大学院　人間文化創成科学研究科　理学専攻
榎吉 奏子 (Kanako ENOYOSHI)

**概要**

例外型 Lie 群 $G_2$ 作用によるグラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ における等質超曲面の主曲率を求める．ここで, $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ は八元数の虚部 $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ の向きづけられた 3 次元部分空間全体のなすグラスマン多様体を表す．その応用として, austere 部分多様体となる軌道が唯一存在することと, proper 二重調和性をもつ軌道がちょうど 2 つ現れることを示す．さらに, その austere 軌道が弱鏡映部分多様体であることの証明を与える．

## 1　はじめに

等質超曲面は余等質性 1 作用の軌道として得られる．A. Kollross は既約コンパクト Riemann 対称空間上の余等質性 1 作用を分類した ([5])． その分類により, 余等質性 1 作用の多くは Hermann 作用となることが知られている．そして, それらの作用による等質超曲面の主曲率は, 多くの研究者たちによって既に求められている．グラスマン多様体 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ への $G_2$-作用は Hermann 作用ではない例外型余等質性 1 の作用である．そこで我々は, Lie 環 $\mathfrak{g}_2$ の不変部分空間分解に着目することで, $G_2$-作用による $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ における等質超曲面の主曲率を計算する．

## 2　準備

$\mathbb{H} = \{x1 + yi + zj + wk \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^4$ $(i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k)$ を四元数体, $\mathrm{Im}\mathbb{H}$ を純虚四元数全体の集合とする．単位四元数の集合を $Sp(1) \subset \mathbb{H}$ で表す．八元数からなるノルム代数 $\mathbb{O}$ は, ある単位八元数 $\varepsilon$ に対し,$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon$ で与えられる．ここで, 八元数 $\mathbb{O}$ 上の積は, $(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = (ac - \bar{d}b) + (da + b\bar{c})\varepsilon$ で与えられる．八元数 $\mathbb{O}$ の純虚八元数全体の集合を $\mathrm{Im}\mathbb{O} = \mathrm{Im}\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon$ で表す．$\mathrm{Im}\mathbb{O}$ 上の交代 3 次形式 $\varphi$ を

$$\varphi(x, y, z) = \langle x, yz\rangle$$

で定める． ここで, $\langle , \rangle$ は八元数上の内積である． 交代 3 次形式 $\varphi$ は $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ 上の associative calibration と呼ばれる ([2] p.113 Definition 1.5). Lie 群 $G_2$ は,

$$G_2 = \mathrm{Aut}(\mathbb{O}) = \{g \in GL_8(\mathbb{R}) \mid \text{任意の元 } x, y \in \mathbb{O} \text{ に対して, } g(xy) = g(x)g(y)\}$$

で定められる．Lie 群 $G_2$ は 14 次元で単純であることが知られている ([2])．任意の元 $g \in G_2$ は部分空間 $\mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{O}$ を固定し, $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ を不変に保つ．$G_2$ は $SO(\mathrm{Im}\mathbb{O}) = SO(7)$ の部分群であること, そして $G_2 = \{g \in O(7) | \ g^*\varphi = \varphi\}$ となることが知られている ([2])．$Sp(1) \times Sp(1)$ の $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon$ への作用は, $(q_1, q_2) \in Sp(1) \times Sp(1)$, $a + b\varepsilon \in \mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\varepsilon$ に対して,

$$\rho(q_1, q_2)(a + b\varepsilon) = q_1 a q_1^{-1} + (q_2 b q_1^{-1})\varepsilon$$

で与えられる．$\rho(q_1, q_2)$ は $G_2$ の元になることが分かる．$\rho$ は $Sp(1) \times Sp(1)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(4)$ の作用である．

八元数の虚部 $\mathrm{Im}\mathbb{O}$ の向き付けられた 3 次元部分空間全体のなすグラスマン多様体を $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ で表す．$\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ は Riemann 対称空間 $SO(7)/SO(3) \times SO(4)$ である．ここで, $SO(7)$ の Lie 環 $\mathfrak{so}(7)$ 上の Killing 形式により, Riemann 計量を導入する．associative calibration $\varphi$ の値は, $\zeta \in \widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ の正規直交基底の選び方によらないため, $\varphi$ は $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ 上の関数とみなすことができる．さらに, 任意の $\zeta \in \widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ に対して, $|\varphi(\zeta)| \leq 1$ が成立する ([2] p.113 Theorem 1.4)．そこで, $-1 \leq \Phi \leq 1$ に対して, $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ の等位集合 $M(\Phi)$ を次で定める:

$$M(\Phi) = \{\zeta \in \widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O}) \mid \varphi(\zeta) = \Phi\}.$$

八元数 $\mathbb{O}$ の任意の四元数部分代数の純虚数 3 次元部分空間で, 四元数代数から定まる向きを備えたものを associative 部分空間という．associative 部分空間全体の集合を associative グラスマン多様体といい, $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ で表す．基点として $o = \mathrm{Im}\mathbb{H}$ をとる．$G_2$ は $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ に推移的に作用し, $o$ における等方部分群は $\rho(Sp(1) \times Sp(1))$ である．それゆえ, $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ は 8 次元の Riemann 対称空間 $G_2/SO(4)$ と同一視されることが知られている ([2] p.114 Theorem 1.8)．Lie 群 $G_2$ は各 $M(\Phi)$ $(-1 \leq \Phi \leq 1)$ に推移的に作用する．$M(1)$ は $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ と一致する．$M(-1)$ の部分空間の向きを逆向きにすれば, $M(-1)$ は $M(1) = \widetilde{\mathrm{Gr}}_{ass}(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ に等長である．$M(1)$ と $M(-1)$ は全測地的特異軌道であり, $-1 < \Phi < 1$ に対し, $M(\Phi)$ は余次元 1 の主軌道で $G_2/SO(3)$ に微分同型となる．特に, associative calibration $\varphi$ は等径関数である．

# 3 主結果

等質超曲面 $M(\Phi)$ $(-1 < \Phi < 1)$ は, 全測地的特異軌道 $M(1)$ の周りの管状超曲面と一致するという性質を用いて主曲率を計算する．法ベクトル場 $-\frac{\mathrm{grad}\varphi}{||\mathrm{grad}\varphi||}$ に関して, $G_2$ 作用による $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ 内の等質超曲面 $M(\Phi)$ $(-1 < \Phi < 1)$ の主曲率は以下で与えらえる．

**定理 1**　等質超曲面 $M(\Phi)$ $(-1 < \Phi < 1)$ の主曲率は,

$$\mu_1(\Phi) = 0,$$
$$\mu_2(\Phi) = \frac{1}{2\sqrt{30(1-\Phi^2)}}(-3\Phi + \sqrt{8+\Phi^2}),$$
$$\mu_3(\Phi) = \frac{1}{2\sqrt{30(1-\Phi^2)}}(-3\Phi - \sqrt{8+\Phi^2})$$

である. ここで, 重複度はそれぞれ $\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 3$, $\nu_3 = 3$ である.

# 4 応用

F. R. Harvey と H. B. Lawson ([2]) は austere 部分多様体という概念を導入した．$N$ を Riemann 多様体, $M$ を $N$ の部分多様体とする．$M$ の各点の法ベクトル $u$ に対して, $M$ の型作用素 $A_u$ の固有値全体のなす集合が $-1$ 倍に関して不変であり, $-1$ 倍で対応する固有値の重複度が等しいとき, $M$ を austere 部分多様体という. 定理 1 を用いて, 次の系を得る.

**系 1**　主軌道 $M(0)$ は $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ の austere 部分多様体である.

1983 年, J. Eells と L. Lemaire が Riemann 多様体間の写像に対して二重調和性という概念を導入した ([1]). $(M, g)$ と $(N, \tilde{g})$ を Riemann 多様体とし, $\phi\colon M \to N$ を滑らかな写像とする. $\tau(\phi)$ を $\phi$ のテンション場としたとき, $M$ のコンパクト領域 $\Omega$ 上の bienergy 汎関数は次で定義される.

$$E_2(\phi; \Omega) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\tau(\phi)|^2 dv_g,$$

ここで, $dv_g$ は $M$ の体積要素である. 任意のコンパクト領域 $\Omega \subset M$ に対して, $\phi$ が $E_2(\phi; \Omega)$ の臨界点となっているとき, $\phi$ を二重調和写像という. 調和写像ではない二重調和写像を proper 二重調和写像という. $N = G/K$ を Killing 形式から定まる計量を備えたコンパクト半単純 Riemann 対称空間とする. このとき, 平均曲率一定の超曲面 $\phi\colon M \to G/K$ が proper 二重調和性をもつことの必要十分条件は, $M$ の型作用素 $A$ が

$$|A|^2 = \frac{1}{2}$$

を満たすことである ([4] Theorem 3). この事実と定理 1 を用いて, 次の系を得る.

**系 2**　主軌道 $M(\pm\frac{1}{\sqrt{10}})$ は $G_2$ 作用による $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ の 唯一の proper 二重調和等質超曲面である.

## 5　弱鏡映部分多様体

主軌道 $M(0)$ は austere 性より強い性質をもつ. O. Ikawa, T. Sakai と H. Tasaki は弱鏡映部分多様体という概念を導入した ([3]). $N$ を Riemann 多様体, $M$ を $N$ の部分多様体とする. 各点 $p \in M$ における法ベクトル $\xi \in T_p^\perp M$ に対して次の条件を満たす $N$ の等長変換 $\sigma_\xi$ が存在するとき, $M$ を弱鏡映部分多様体という.

$$\sigma_\xi(p) = p, \qquad (d\sigma_\xi)_p \xi = -\xi, \qquad \sigma_\xi(M) = M.$$

**命題 1**　主軌道 $M(0)$ は $\widetilde{\mathrm{Gr}}_3(\mathrm{Im}\mathbb{O})$ の弱鏡映部分多様体である.

## 参考文献


[1] J. Eells and L. Lemaire, *Selected Topics in Harmonic Maps*, Regional Conference Series in Math. **50** (1983), Amer. Math. Soc.

[2] F.R.Harvey and H.B.Lawson, *Calibrated geometries*, Acta Math. **148** (1982), 47-157.

[3] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, J. Math. Soc. Japan **61** (2009), no. 2, 437-481.

[4] J. Inoguchi and T. Sasahara, *Biharmonic hypersurfaces in Riemannian symmetric spaces* Ⅰ, Ⅱ, Hiroshima Math. J. **46** (2016), 97-121, **47** (2017), 349-378.

[5] A. Kollross, *A Classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2001), no. 2, 571-612.