

一般化された Kummer 4-fold のネフ錐について

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻

森 章 (Akira Mori)*

概要

吉岡氏は [Yo2] においてネフ錐とムーバブル錐の格子論的記述を与えた。本講演ではピカール数が 1 のアーベル曲面に付随した一般化された Kummer 4-fold の各錐に対して、より具体的な記述を与えられることを紹介する。

1 導入

標準束が自明な高次元代数多様体は分類理論において重要なクラスである。Bogomolov の分解定理によれば、そのような多様体は複素トーラス、カラビ-ヤウ多様体、そして既約シンプレクティック多様体の 3 つのクラスから構成される。ここでは 3 つ目の既約シンプレクティック多様体に焦点を当てる。

$\mathbb{Q}$ -分解的な正規代数多様体 X に対して、一般的に

$$\text{Amp}(X) \subset \text{Nef}(X) \subset \text{Mov}(X)$$

がいえる。ここで左から順に X のアンプル錐、ネフ錐、そしてムーバブル錐である。上記のそれぞれの錐は次の X 上の因子 D で生成される錐である。アンプル： D は正整数倍 nD が射影空間への埋め込みを与える、ネフ： 任意の既約曲線 C に対して $(D \cdot C) \geq 0$ 、ムーバブル： 線形系 $|D|$ の固定点集合の余次元が 2 以上。 X が 2 次元であるときには、 X 上の因子がムーバブルであることと、ネフであることは同値となる。しかし X の次元が 3 以上のときは一般になりたたない、つまりネフ錐とムーバブル錐が一致しない場合がある。これは部屋分解やフリップを考える動機になるため、極小モデル理論において興味深いところである [川又]。ここで与える、以下定義する一般化された Kummer 4-fold の錐の具体的記述では、錐の境界が一致するかどうか明確になる。

本講演で現れるスキーム、代数多様体は複素数体 $\mathbb{C}$ 上のものとする。アーベル曲面 A に対して、Beauville は次元が $2(l-1)$ の既約シンプレクティック多様体の一種である $\text{Km}^{l-1}(A)$ ($l \leq 2$) を構成した [Be]。それは A 上の l 点のヒルベルトスキーム $\text{Hilb}^l(A)$ のアルバネーゼ射 $\text{Hilb}^l(A) \rightarrow S^l(A) \rightarrow A$ のファイバーである。ここで $S^l(A)$ は l 次対称積である。

定義 1. $\text{Km}^{l-1}(A)$ ($l \leq 3$) を一般化された Kummer 多様体という。 $l = 2$ のときは A の Kummer $K3$ 曲面である。

* akrmori@math.kobe-u.ac.jp

既約シンプレクティック多様体 M に対して, $H^2(M, \mathbb{Z})$, したがってネロン-ゼベリ群 $\text{NS}(M)$ は双線形形式である Beauville-Bogomolov 形式をもつ [Be]. A をピカル数が 1 のアーベル曲面とする. H を $\text{NS}(A)$ の ample generator とし, $H^2/2 = n \in \mathbb{N}$ とする. このとき $\text{NS}(\text{Km}^{l-1}(A))$ ($l \geq 3$) は

$$\text{NS}(\text{Km}^{l-1}(A)) \cong \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}\delta$$

と記述でき, Beauville-Bogomolov 双線形形式は

$$h^2 = 2n, \delta^2 = -2l, (h, \delta) = 0$$

をみたす. ここで h は $S^l(A)$ のアンブル因子の $\text{Km}^{l-1}(A) \rightarrow S^l(A)$ による引き戻しである [Yo2].

2 向井ベクトル

A をアーベル曲面とする. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を代数的コホモロジー群 $H^*(A, \mathbb{Z})_{\text{alg}} := \mathbb{Z} \oplus \text{NS}(A) \oplus \mathbb{Z}$ 上の向井ペアリングとする, つまり $x = (x_0, x_1, x_2), x' = (x'_0, x'_1, x'_2)$ に対して, $\langle x, x' \rangle = x_1x'_1 - x_0x'_2 - x_2x'_0$. これにより, $H^*(A, \mathbb{Z})_{\text{alg}}$ には格子の構造が入る. $x^2 := \langle x, x \rangle$ とかく. $E \in \text{Coh}(A)$ に対して, $v(E) = \text{ch}(E) \in H^*(A, \mathbb{Z})_{\text{alg}}$ を E の向井ベクトルという.

定義 2. 向井ベクトル $v = (r, \xi, a) \in H^*(A, \mathbb{Z})_{\text{alg}}$ が

- (1) 原始的とは $\gcd(r, \xi, a) = 1$ となるときをいう.
- (2) 等方的とは $v^2 = 0$ となるときをいう.

A をピカル数が 1 のアーベル曲面とする. H を $\text{NS}(A)$ の ample generator とし, $H^2/2 = n \in \mathbb{N}$ とする. さらに $v = (1, 0, -l) \in H^*(A, \mathbb{Z})_{\text{alg}}$ とする. このとき

$$v^\perp = \mathbb{Z}(0, H, 0) \oplus \mathbb{Z}(1, 0, l)$$

であり, isometry

$$\begin{aligned} \theta_v : \quad v^\perp &\rightarrow \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}\delta \\ (0, H, 0) &\mapsto h \\ (1, 0, l) &\mapsto \delta \end{aligned}$$

を得る. これにより, $\text{NS}(\text{Km}^{l-1}(A))$ と $v^\perp$ を同一視する. $h = (0, H, 0)$, $\delta = (1, 0, l)$ とする. このとき, $\text{NS}(\text{Km}^{l-1}(A))$ は $h\delta$ -平面で記述できることになる.

3 錐の記述

[Yo2] における, $\text{Mov}(\text{Km}^{l-1}(A))$ と $\text{Nef}(\text{Km}^{l-1}(A))$ の記述を述べる. Γ を次の不等式をみたす向井ベクトル u の集合とする:

$$\langle u, v - u \rangle > 0, u^2 \geq 0, \langle (v - u)^2 \rangle \geq 0, \langle v, u \rangle^2 > v^2 u^2.$$

$P^+ := \{x \in v^\perp \mid x^2 > 0, \langle x, h \rangle > 0\}$ とおく. $P^+ \setminus \bigcup_{u \in \Gamma} u^\perp$ の連結成分 $\mathcal{C}$ で, $h - \varepsilon\delta$ ($0 < \varepsilon \ll 1$) を含むものは $\text{Km}^{l-1}(A)$ のアンブル錐 $\text{Amp}(\text{Km}^{l-1}(A))$ となる.

$$\Gamma_m := \{u \in \Gamma \mid u^2 = 0, \langle u, v \rangle = 1 \text{ or } 2\}$$

に対して, $\mathcal{C}'$ を $P^+ \setminus \bigcup_{u \in \Gamma_m} u^\perp$ の連結成分で $\mathcal{C}$ を含むものとする. このとき,

$$\text{Nef}(\text{Km}^{l-1}(A)) = \overline{\mathcal{C}}, \quad \text{Mov}(\text{Km}^{l-1}(A)) = \overline{\mathcal{C}'}.$$

を得る. よって, それぞれの錐の境界は $u^\perp$ で張られることがわかった.

4 錐の計算

ここでは, 主結果について述べる. 特に断わらない限り, 第 2, 3 節と同様の記号を用いる.

まず, 次の補題より $\text{Nef}(\text{Km}^2(A))$ の境界は等方的ベクトル $u \in \Gamma$ によって定まることを主張する.

補題 3. $v = (1, 0, -l), l \leq 4$ とする. このとき $u \in \Gamma$ は次の条件の内一つをみたす:

- (1) $u^2 = 0$ かつ $0 < \langle u, v \rangle \leq l$.
- (2) $(v - u)^2 = 0$ かつ $0 < \langle v - u, v \rangle \leq l$.

さて, ここからは $l = 3$ とする, つまり $v = (1, 0, -3)$ とする. $u \in \Gamma$ とする. 補題 3 から u が等方的かつ $\langle u, v \rangle = 1, 2, 3$ をみたすことがわかる. 適当な $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $u - \lambda v \in v^\perp \otimes \mathbb{R}$ と仮定すると, $\lambda = \langle u, v \rangle / 6$ を得る. したがって, u は次のように表すことができる:

$$u = \frac{\langle u, v \rangle}{6} v + xh + y\delta, \quad x, y \in \mathbb{Q}.$$

$\frac{6}{\langle u, v \rangle} u - v \in v^\perp \cap H^*(X, \mathbb{Z})_{\text{alg}}$ であるから,

$$\frac{6}{\langle u, v \rangle} u = v + Xh + Y\delta, \quad X, Y \in \mathbb{Z} \tag{4.1}$$

を得る. u が等方的であることから, (X, Y) は

$$\gcd(Y + 1, X, 6) = 2, 3, 6 \tag{4.2}$$

をみたし, 次の Pell 方程式といわれる二次不定方程式の解となる:

$$3Y^2 - nX^2 = 3. \tag{4.3}$$

逆に (4.2) をみたす方程式 (4.3) の解は, (4.1) をみたす原始的で等方的な向井ベクトル u を得る. また等方的向井ベクトル u に対して, $u^\perp \subset P^+$ は $\mathbb{R}_{>0}(h - \frac{nX}{3Y}\delta)$ で与えられる.

ここで Pell 方程式について成立することを復習する. (4.3) について, もし $\sqrt{n/3} \notin \mathbb{Q}$ であるならば, (X_1, Y_1) ($X_1, Y_1 > 0$) を (4.3) の基本解とする, つまり (4.3) の解 (X, Y) で $X, Y > 0$ をみたすもののうち X が最少となるものである. (X_k, Y_k) ($k \geq 1$) を

$$Y_k + \sqrt{n/3}X_k = (Y_1 + \sqrt{n/3}X_1)^k$$

によって定める. $(X_0, Y_0) := (0, 1)$ とする. このとき X_k, Y_k は (4.3) をみたす正整数で, $\{(\pm X_k, \pm Y_k) \mid k \geq 0\}$ は全解の集合となる.

さて, 次の補題は (4.3) が無限個の解をもつならば, 境界の傾きは単調に収束することを示す.

補題 4. $\sqrt{n/3} \notin \mathbb{Q}$ とする. このとき

$$0 = \frac{X_0}{Y_0} < \frac{X_1}{Y_1} < \frac{X_2}{Y_2} < \frac{X_3}{Y_3} < \cdots, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{X_k}{Y_k} = \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

よって, 各錐の境界を求める (つまり $u^\perp$ を求める) ためには Pell 方程式 (4.3) の最少解に注目すればよいことがわかった. n の値と (4.3) の解で場合分けをすることにより, 次の定理を得る.

定理 5. ([Mo]) $\text{Km}^2(A)$ のムーバブル錐 $\text{Mov}(\text{Km}^2(A))$ とネフ錐 $\text{Nef}(\text{Km}^2(A))$ は Pell 方程式 (4.3) の解と n の値によって, 次のように特徴付けされる:

type of n		type of (X_1, Y_1)			$\text{Nef}(\text{Km}^2(A))$	$\text{Mov}(\text{Km}^2(A))$
$3 \nmid n$		$3 \mid X_1$			$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_1}{3Y_1}\delta)$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_1}{3Y_1}\delta)$
$n = 3m$	m is not square	$3 \mid X_1$			$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_1}{3Y_1}\delta)$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_1}{3Y_1}\delta)$
		$3 \nmid X_1$	X_1	$3 \mid Y_1$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_1}{3Y_1}\delta)$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_2}{3Y_2}\delta)$
			even	$3 \nmid Y_1$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_1}{3Y_1}\delta)$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_3}{3Y_3}\delta)$
				X_1	$3 \mid Y_1$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_2}{3Y_2}\delta)$
			odd	$3 \nmid Y_1$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_2}{3Y_2}\delta)$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \frac{nX_3}{3Y_3}\delta)$
	m is square				$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \sqrt{\frac{n}{3}}\delta)$	$\mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \sqrt{\frac{n}{3}}\delta)$

この定理とその証明より次の系を得る:

系 6. もし $3 \nmid n$ か $n \equiv 3 \pmod{9}$ ならば, $\text{Nef}(\text{Km}^2(A)) = \text{Mov}(\text{Km}^2(A))$.

系 7. $\sqrt{3n} \notin \mathbb{Q}$ を仮定する. 次の場合, $\text{Mov}(\text{Km}^2(A))$ の境界はヒルベルト-チャウ収縮により与えられる:

1. $2 \mid X_1$.
2. $3 \mid n$, $X_1 \equiv \pm 1 \pmod{6}$ and $3 \mid Y_1$.

$l = 3$ のときと同様の議論を用いることにより, 一般化された Kummer 多様体のムーバブル錐 $\text{Mov}(\text{Km}^{l-1}(A))$ も求めることができる.

定理 8. 1. $\sqrt{ln} \notin \mathbb{Q}$ と仮定する. u を $\text{Km}^{l-1}(A)$ のムーバブル錐の境界を定める向井ベクトルとする.

- (1) $Y = Y_1$ か $Y = -Y_1$ に対して $l \mid Y + 1$ とする. $Y = Y_1$ or $Y = -Y_1$ に従って $X = X_1$ もしくは $X = -X_1$ とおく. このとき, もし

$$\gcd(\frac{Y+1}{l}, \frac{X}{l}, Y-1) = 1 \text{ ならば, } u = (\frac{Y+1}{l}, \frac{X}{l}H, Y-1) \text{ に対して } \langle u, v \rangle = 2.$$

$$\gcd(\frac{Y+1}{l}, \frac{X}{l}, Y-1) = 2 \text{ ならば, } u = (\frac{Y+1}{2l}, \frac{X}{2l}H, \frac{Y-1}{2}) \text{ に対して } \langle u, v \rangle = 1.$$

- (2) $l \nmid (Y_1 \pm 1)$ とする. このとき $u = -(nZ_1^2, Z_1Y_1H, Y_1^2)$ に対して $\langle u, v \rangle = 1$.
 2. $\sqrt{ln} \in \mathbb{Q}$ と仮定する. このとき $\text{Mov}(\text{Km}^{l-1}(A)) = \mathbb{R}_{\geq 0}h + \mathbb{R}_{\geq 0}(h - \sqrt{\frac{n}{l}}\delta)$.

注意 9. 一般化された Kummer 多様体のムーバブル錐の境界を求められたのは, 境界を定める向井ベクトルが等方的になるからである. しかし, ネフ錐の境界を定める向井ベクトル u が等方的になるかどうかは一般的に非自明である. 今回の場合では, $l = 3$ とし, 補題 3 を用いることにより u を等方的な向井ベクトルとすることができた. 補題 3 より $l = 4$ についても $l = 3$ のときと同様の方法で $\text{Mov}(\text{Km}^3(A))$ と $\text{Nef}(\text{Km}^3(A))$ を求めることができる. 一般の場合は, u が等方的であるという条件の代わりになるものを見つけなければ同様の記述を得れないと思われる.

注意 10. 定理 5 より ネフ錐とムーバブル錐が一致していない場合に, $\text{Mov}(\text{Km}^2(A))$ に対して, $\text{Km}^2(A)$ の極小モデルのアンプル錐がそれぞれの部屋となるような部屋分解を与えられる [Mo].

参考文献

- [Be] A. Beauville, *Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 755-782
 [Mo] A. Mori, *Nef Cone of a Generalized Kummer 4-fold*, arXiv:1810.07892v1
 [Yo1] K. Yoshioka, *Moduli spaces of stable sheaves on abelian surfaces*, Math. Ann. **321** (2001), 817-884
 [Yo2] K. Yoshioka, *Bridgeland's stability and the positive cone of the moduli spaces of stable objects on an abelian surface*, Adv. Stub. Pure Math. **69**(2016), 473–537
 [川又] 川又 雄二郎, 高次元代数多様体論, 2014, 岩波書店