$SL(4,\mathbb{C})$ の有限アーベル部分群のクレパント特異点解消と G-ヒルベルトスキームについて

佐藤　悠介 (Yusuke SATO)
名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻

1　問題と背景

G を $SL(n,\mathbb{C})$ の有限部分群とすると，その商 $\mathbb{C}^n/G$ は特異点を持つ．このとき $\mathbb{C}^n/G$ はいつクレパント特異点解消を持つか，という問題について考える．
クレパント特異点解消とは特異点解消のうち次の" 良い" 性質を持ったものである．

定義 1.1. X を特異点を持つ正規な代数多様体としたとき射 $f : Y \to X$ が特異点解消であり標準因子 K_X がカルティエ因子になっていると仮定する．このとき，特異点解消 $f : Y \to X$ に対して $K_Y = f^*K_X + \sum_{i=1}^{n} a_i D_i$ が成り立つ．ここで a_i はディスクレパンシーと呼ばれる有理数であり，D_i は例外因子である．このとき全ての i において $a_i = 0$ が成り立つとき f を**クレパント特異点解消**という．

さて $\mathbb{C}^n/G$ はいつクレパント特異点解消を持つかという問題に関して，n が 2 と 3 の場合については解決されている．特に $n = 2$ のとき $SL(2,\mathbb{C})$ の任意の小型の有限アーベル部分群による商 $\mathbb{C}^2/G$ は超曲面になり，ADE 特異点やクライン特異点と呼ばれる孤立特異点を持つ．これらの曲面は代数幾何学の分野ではよく知られた研究対象であり，極小特異点解消を持つことが知られている．このとき極小特異点解消がクレパント特異点解消と一致する．また，極小特異点解消は同型を除いて一意に定まる．
次にその高次元版として $n = 3$ のとき，$\mathbb{C}^3/G$ はクレパント特異点解消を持つことが Roan，Markushevich，伊藤によって証明された ([Ito])．このとき一般に $\mathbb{C}^3/G$ はクレパント特異点解消を複数持つ場合がある．
しかし $n \geq 4$ のとき，$\mathbb{C}^n/G$ は一般にクレパント特異点解消を持つとは限らない．またいつクレパント特異点解消を持つかという判定法も見つかっておらず，クレパント特異点解消の構成の具体例は少ししか知られていない．
本稿では $SL(4,\mathbb{C})$ の有限アーベル部分群に対して $\mathbb{C}^4/G$ がクレパント特異点解消を持つ例を紹介する．

主結果 1. (S)
$G \subset SL(4,\mathbb{C})$ が 2 つの $SL(2,\mathbb{C})$ の巡回群 C_m, C_n (位数はそれぞれ m, n とする) で生成される場合について考える．つまり，$G =< \begin{pmatrix} C_m & 0 \\ 0 & C_n \end{pmatrix} >$ という場合を考える．このとき，m と n が互いに素ならば $\mathbb{C}^4/G$ はクレパント特異点解消を持つ．そうでないとき，$\mathbb{C}^4/G$ はクレパント特異点解消を持たない．

次に G-ヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^4)$ と $\mathbb{C}^4/G$ のクレパント特異点解消の関係についてこれまでに知られている結果を紹介する．$\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^n)$ は $SL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群のマッカ

イ対応を説明するために伊藤-中村 [IN] によって導入されたものであり，G-ヒルベルトスキームの定義は以下で与えられる．

定義 1.2. $GL(n,\mathbb{C})$ の有限部分群 G に対して，G-ヒルベルトスキーム $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^n)$ を以下のように定義する．

$$\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^n) := \{I \subset \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n] \mid I : G-\text{不変イデアル}, \dim(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/I) = |G|\}$$

$\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^n)$ とクレパント特異点解消の関係については以下の事実が知られている．
$n=2$ のとき，$GL(2,\mathbb{C})$ の任意の小型の有限部分群 G に対して $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^2)$ は $\mathbb{C}^2/G$ の極小特異点解消である（したがって $SL(2,\mathbb{C})$ においてクレパント特異点解消である）．さらに $G \subset SL(3,\mathbb{C})$ のとき，$\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^3)$ が $\mathbb{C}^3/G$ のクレパント特異点解消の一つを与えることが G が可換な場合は中村 [Nakamura] に，一般の場合は Bridgeland-King-Reid[BKR] によって証明された．
しかし，高次元の場合は同様の結果は得られず，$\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^n)$ はクレパント特異点解消になるとは限らない．実際 G が $SL(4,\mathbb{C})$ の有限部分群のときには $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^4)$ がクレパント特異点解消にならない例がよく知られている (例 $G=\frac{1}{2}(1,1,1,1)$）．また，Craw[Craw] によって $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^4)$ が $\mathbb{C}^4/G$ のある特定のクレパント特異点解消をブローアップして得られるものになる例が与えられた．これまで知られている $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^n)$ と $\mathbb{C}^n/G$ の関係をまとめると以下のようになる．

	$SL(n,\mathbb{C})$	$GL(n,\mathbb{C})$
n=2	極小特異点解消 （伊藤-中村）	極小特異点解消 (木藤，石井)
n=3	クレパント特異点解消 (中村, Bridgeland-King-Reid)	一般に特異点解消とは限らない 例:$G=\frac{1}{4}(1,2,3)$
n=4	一般にクレパント特異点解消とは限らない terminal になる例 :$G=\frac{1}{2}(1,1,1,1)$ クレパント特異点解消の blow-up になる例 $G=<\frac{1}{2}(1,0,0,1),\frac{1}{2}(0,1,0,1),\frac{1}{2}(0,0,1,1)>$	分かっていない

表 1 ：$\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^n)$ と $\mathbb{C}^n/G$ のこれまでに知られている関係

本稿では次の 4 次元の $\mathrm{Hilb}^{\mathrm{G}}(\mathbb{C}^4)$ が特異点を持つ例を紹介する．

主結果 2. *(*S*)*
m を正の整数とする．このとき群 $G=(C_{2m},C_2)$ に対して，$\mathbb{C}^4/G$ はクレパント特異点解消を持たず，また $m \geq 2$ のとき $\mathrm{Hilb}^{\mathrm{G}}(\mathbb{C}^4)$ は特異点を持つ．

2　トーリック多様体の準備

この章では錐，アフィントーリック多様体，扇, トーリック多様体の順に定義と特異点解消に関わる性質を説明する．性質については [Fulton] や [小田] から引用した．トーリッ

ク多様体の性質として重要な性質は，トーリック多様体の圏と扇の圏が同値であることである．この性質によってトーリック多様体の様々な性質を扇の言葉を用いて表すことができる．トーリック多様体のメリットは特異点解消を対応する扇の細分によって考えることができることである．
まず初めに $\mathbb{C}^n/G$ をトーリック多様体として構成しよう．G を位数 r の $GL(n,\mathbb{C})$ の有限アーベル部分群とする．このとき，G の元は対角行列として表すことができるので $g \in G$ に対してある整数 $0 \leq a_i \leq r (i = 1,\dots,n)$ が存在して $g = \mathrm{diag}(\varepsilon^{a_1},\dots,\varepsilon^{a_n})$ と書ける．ただし ε は 1 の原始 r 乗根とする．また，このとき g を $g = \frac{1}{r}(a_1,\dots,a_n)$ と書き，g で生成される巡回群 G を $G = \frac{1}{r}(a_1,\dots,a_n)$ と表す．また $g \in G$ に対して ϕ を $\phi(g) = \frac{1}{r}(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ とする．$\phi(G)$ の元を $\bar{g}$ と書くことにする．

- $N := \mathbb{Z}^n + \sum_{\bar{g}\in\phi(G)} \mathbb{Z}\bar{g}$: 階数 n の自由 $\mathbb{Z}$-加群,
- $M := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,\mathbb{Z})$:$N$ の双対 $\mathbb{Z}$-加群,
- σ:$N_{\mathbb{R}}$ の第一象限,

と定義する．ここで $G \cong N/\overline{N}$ であることに注意しておく．

有理強凸多面錐 σ に対して $S_\sigma = M \cap \sigma^\vee$ と定義する．このとき S_σ は有限生成の加法半群である ([小田, Proposition 1．1] を参照)．この S_σ に対して群環 $\mathbb{C}[S_\sigma]$ を次のように定義する．各 $u \in S_\sigma$ に対し X^u を対応させ，$\{X^u \mid u \in S_\sigma\}$ を $\mathbb{C}$ ベクトル空間としての基底とする．また $\mathbb{C}[S_\sigma]$ の積は S_σ での和と定義する．

定義 2.1. アフィントーリック多様体
有理強凸多面錐 σ に対して，対応するアフィントーリック多様体を $U_\sigma = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[S_\sigma]$ で表す．

別の言い方をすれば，$\mathbb{C}[S_\sigma]$ を座標環とするアフィン代数多様体をアフィントーリック多様体という．

命題 2.2. ([Fulton], §2.2 を参照)
上記の設定で，アフィントーリック多様体 U_σ は $\mathbb{C}^n/G$ に同型である．

扇（錐）が非特異であることは，対応するトーリック多様体（アフィントーリック多様体）が非特異であることと同値である．また，扇の細分はトーリック多様体のブローアップに対応する．次にクレパント特異点解消を扇の言葉で定義する．

定義 2.3. age の定義
群 G の元 $g = \frac{1}{r}(a_1,\dots,a_n)$ に対して $age(g) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^n a_i$ と定義する．

N の格子点に対しても同様に age を定めることができる．つまり $v = (b_1,\dots,b_n) \in N$ に対して $age(v) = \sum_{i=1}^n b_i$ である．当然ながら標準基底 e_i の age は 1 である．また，G が $SL(n,\mathbb{C})$ の有限アーベル部分群ならば $age(g)$ は必ず整数になる．

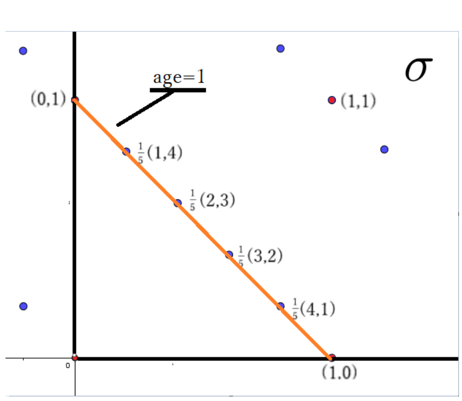


図 1: ($n=2$ のときの age が 1 の格子点)

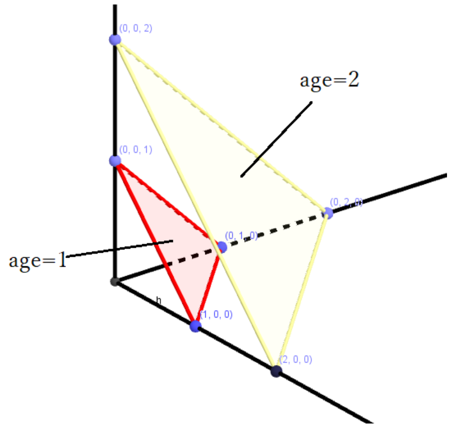


図 2: ($n=3$ の場合)

定義 2.4. トーリック多様体のクレパント特異点解消
前述の方法で定義した σ を age が 1 となる格子点のみを用いて扇 Δ に細分する．もし Δ に対応するトーリック多様体 Y が非特異であるならば，Y は $\mathbb{C}^n/G$ のクレパント特異点解消である．

図 1 および図 2 に示すように age が 1 の格子点は単体上にある．つまり $n=2$ ならば age が 1 の格子点は同一線分上に在り，$n=3$ ならば三角形上に在る．したがって本論文で主に扱う $\mathbb{C}^4/G$ の場合では age が 1 の格子点は正四面体上にある．つまり，$\mathbb{C}^4/G$ のクレパント特異点解消を考えるにあたっては正四面体の分割を考え，それによって得られた各錐が非特異であることを確かめればよい．

例 2.5. $n=2$ のとき商特異点のクレパント特異点解消の具体例を説明する．図 3 に示されているものが $G=\frac{1}{5}(1,4)$ の場合の $\mathbb{C}^2/G$ に対応する錐であり，これらを図 4 のような扇に細分することによって $\mathbb{C}^2/G$ のクレパント特異点解消を与えることができる．この細分は図 4 に示されているように age が 1 の格子点を用いた細分であり各錐が非特異であることもわかる．

3 主結果

この章では $G \subset SL(4,\mathbb{C})$ が 2 つの $SL(2,\mathbb{C})$ の巡回群 C_m, C_n(位数はそれぞれ m,n とする) で生成される場合について考える．つまり，$G=< \begin{pmatrix} C_m & 0 \\ 0 & C_n \end{pmatrix} >$ という場合を考える．以下，この群を $G=(C_m,C_n)$ と表すことにする．
群 G の位数は m と n の最小公倍数になる．この群 G に関して以下の二つが成り立つ．

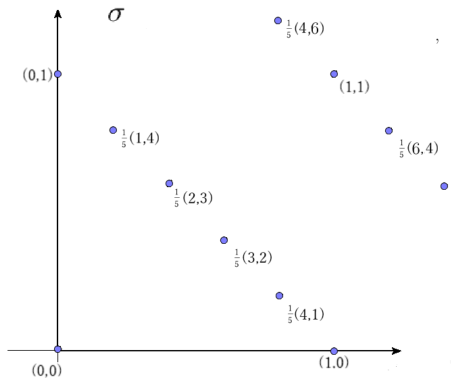


図 3: $\mathbb{C}^2/G$ に対応する錐

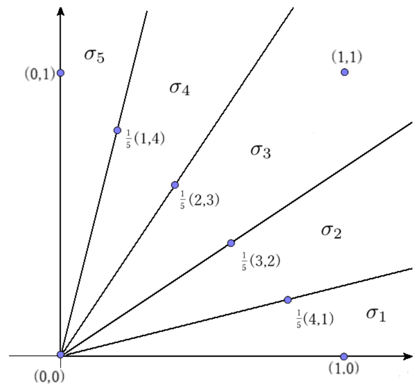


図 4: $\mathbb{C}^2/G$ のクレパント特異点解消を与える扇

定理 3.1. **(S)**
$G=<\begin{pmatrix} C_m & 0 \\ 0 & C_n \end{pmatrix}>\subseteq SL(4,\mathbb{C})$ とする．このとき，m と n が互いに素ならば $\mathbb{C}^4/G$ はクレパント特異点解消を持つ．そうでないとき，$\mathbb{C}^4/G$ はクレパント特異点解消を持たない．

定理 3.2. (S)
m を正の整数とする．このとき群 $G=(C_{2m},C_2)$ に対して，$\mathbb{C}^4/G$ はクレパント特異点解消を持たず，また $m\geq 2$ のとき $\mathrm{Hilb}^{\mathrm{G}}(\mathbb{C}^4)$ は特異点を持つ．

$G=(C_m,C_n)$ というタイプの群は $age(g)=2$ となる元で生成される群である．また $m=n$ のときは群 G のすべての元の age が 2 となるため $\mathbb{C}^4/G$ は端末特異点を持つ．したがってこの場合のとき $\mathbb{C}^4/G$ はクレパント特異点解消を持たない．
また，$m\neq n$ のとき（特に $m>n$ とする）は群 G の生成元を g とすると，n は群 G の位数 r の約数であるから，$g^{\frac{r}{n}}$ は C_n の部分が単位元になる．つまり $g^{\frac{r}{n}}=\frac{1}{r}(x,r-x,0,0,)$ という形になるため，この元の age は 1 になる．したがって $m\neq n$ のときは $\mathbb{C}^4/G$ の特異点は端末特異点ではない．

3.1 主結果 1 について

$l=LCM(m,n)$ とすると G は位数 l の巡回群である．また群 $G<\begin{pmatrix} C_m & 0 \\ 0 & C_n \end{pmatrix}>$ は $G=\frac{1}{l}(\frac{l}{m},-\frac{l}{m},\frac{l}{n},-\frac{l}{n})$ と表せる．
このとき群 G 由来の格子点で，age が 1 になる格子点は $v_i=\frac{1}{l}(ni,l-ni,0,0),u_j=\frac{1}{l}(0,0,mj,l-mj)$ という 2 種類ある．ただし $i=1,\dots,\frac{l}{n}-1,j=1,\dots,\frac{l}{m}-1$ である．これらの点は図に示すように $(1,0,0,0)$ と $(0,1,0,0)$ を結ぶ線分上及び $(0,0,1,0)$ と $(0,0,0,1)$ を結ぶ線分上にある．

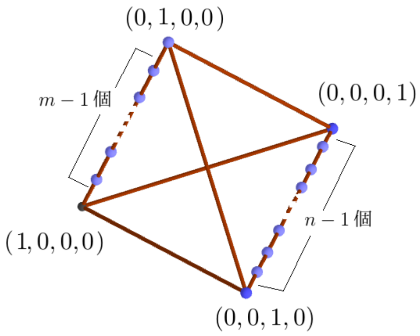


図 5: age が 1 の格子点の様子

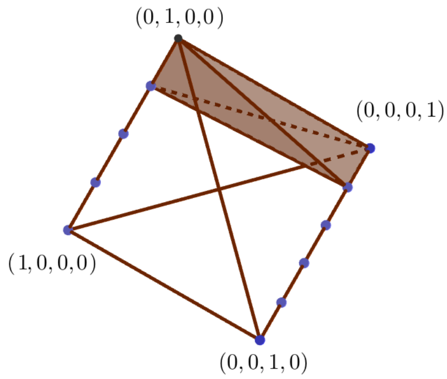


図 6: $m=5, n=4$ の場合の σ_{11} の age $=1$ の断面図

これらの点を用いた次のような細分を考える．細分によって得られる扇 Δ が

$$|\Delta| = \bigcup_{1\le i\le \frac{l}{n}, 1\le j\le \frac{l}{m}} \sigma_{ij}$$

を満たすように細分する．ここで $\sigma_{ij} = \mathrm{Cone}(v_{i-1}, v_i, u_{j-1}, u_j)$ と定義する．ただし $v_0 = (0,1,0,0), v_{\frac{l}{n}} = (1,0,0,0), u_0 = (0,0,0,1), u_{\frac{l}{m}} = (0,0,1,0)$ である．

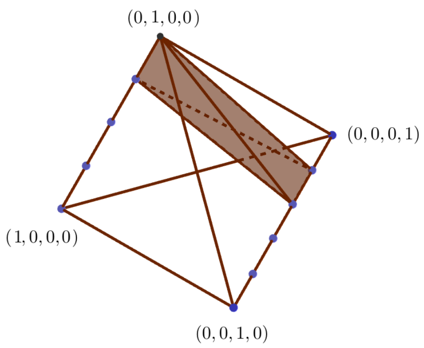


図 7: σ_{12} の $age = 1$ での断面図

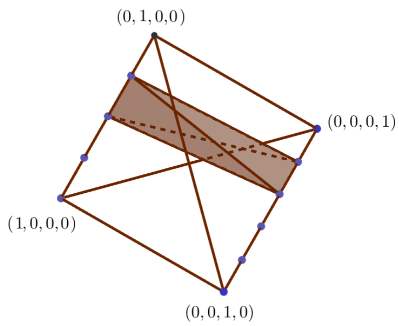


図 8: σ_{22} の $age = 1$ での断面図

この扇 Δ の最大次元の錐の個数は m と n の最大公約数を d とすると，$\frac{l}{m} \times \frac{l}{n} = \frac{l}{d}$ で与えられる．群 G の位数は l であるため $d > 1$ のとき，オイラー数が群の位数と一致しないためこの細分による扇 Δ に対応するトーリック多様体は $\mathbb{C}^4/G$ のクレパント特異点解消にならず，age が 1 の格子点のみを用いた細分は Δ しかないことから $\mathbb{C}^4/G$ はクレパント特異点解消を持たない．一方 $d = 1$ のとき，つまり m と n が互いに素のとき上記で与えられた σ_{ij} が非特異である．このことを以下に示す．

$\sigma_{ij} = \mathrm{Cone}(v_{i-1}, v_i, u_{j-1}, u_j)$ において $v_{i-1}, v_i, u_{j-1}, u_j$ が $N = \mathbb{Z}^4 + \sum_{g\in G} \bar{g}\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}$-基底

であることを示せばよい．なお $l=mn$ であることに注意する．
$v_i - v_{i-1} = \frac{1}{mn}(n,-n,0,0)$ および $u_j - u_{j-1} = \frac{1}{mn}(0,0,m,-m,)$ が成り立つから，$v_i - v_{i-1} + u_j - u_{j-1} = \frac{1}{mn}(n,-n,m,-m)$ を得る．m と n が互いに素であることから，$G = <\begin{pmatrix} C_m & 0 \\ 0 & C_n \end{pmatrix}> = <\frac{1}{mn}(n,-n,m,-m)>$ となる．したがって $v_{i-1}, v_i, u_{j-1}, u_j$ は N の元のうち $\sum_{g\in G} \bar{g}\mathbb{Z}$ と表せる元の生成系になっている．残りは $(1,0,0,0), (0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$ の 4 点が $v_{i-1}, v_i, u_{j-1}, u_j$ で表せることを示せば良い．$(1,0,0,0)$ の場合を示す．ある実数 a,b が存在し $av_i + bv_{i+1} = (1,0,0,0)$ であるとすると，

$$\begin{pmatrix} \frac{i}{m} & \frac{i-1}{m} \\ 1-\frac{i}{m} & 1-\frac{i-1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

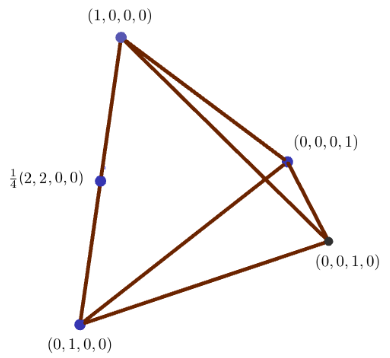
が成り立ち，$\det \begin{pmatrix} \frac{i}{m} & \frac{i-1}{m} \\ 1-\frac{i}{m} & 1-\frac{i-1}{m} \end{pmatrix} = \frac{1}{m}$ であることから a,b は整数になる．したがってある整数 a,b で $av_i + bv_{i+1} = (1,0,0,0)$ と表せる．残りの点の場合も同様である．$v_{i-1}, v_i, u_{j-1}, u_j$ が一次独立であることは v_{i-1}, v_i が一次独立であり，u_{j-1}, u_j もまた一次独立であることからわかる．よって $v_{i-1}, v_i, u_{j-1}, u_j$ は N の $\mathbb{Z}$-基底になっている．つまり σ_{ij} は非特異である．
したがって $G = <\begin{pmatrix} C_m & 0 \\ 0 & C_n \end{pmatrix}>$ のとき $\mathbb{C}^4/G$ がクレパント特異点解消を持つための必要十分条件は m と n が互いに素であることである

3.2 $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^4)$ が特異点を持つ例

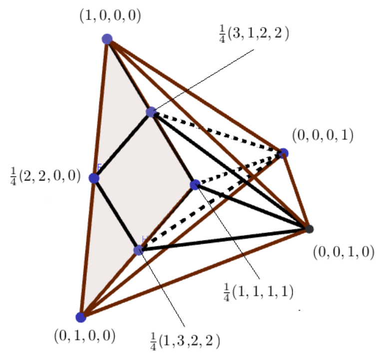
次に，この節では $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^4)$ が特異点を持つ例を説明する．G が $SL(n,\mathbb{C})$ の有限アーベル部分群に対して $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^4)$ が特異点を持つ例はこれまで知られていなかった例である．また，以下の群において $\mathbb{C}^4/G$ 自身は標準特異点を持つが $m \neq 1$ のときそれらは端末特異点ではないことに注意する．

定理 3.3. (S) m を正の整数とする．このとき群 $G = (C_{2m}, C_2)$ に対して，$\mathbb{C}^4/G$ はクレパント特異点解消を持たず，また $m \geq 4$ のとき $\mathrm{Hilb}^{\mathrm{G}}(\mathbb{C}^4)$ は特異点を持つ．

例として $m=4$ のとき，つまり $G = \frac{1}{4}(1,3,2,2)$ について詳しく紹介する．このとき格子点集合 N のうち age が 1 になる格子点は図に示すような 5 つの点のみである．一方 $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{C}^4)$ に対応する扇は計 10 個の錐からなり，生成元として $\frac{1}{4}(3,1,2,2), \frac{1}{4}(1,1,1,1), \frac{1}{4}(1,3,2,2)$ という age が 2 の N の格子点や，N 以外の点を新たに付け加える必要がある．

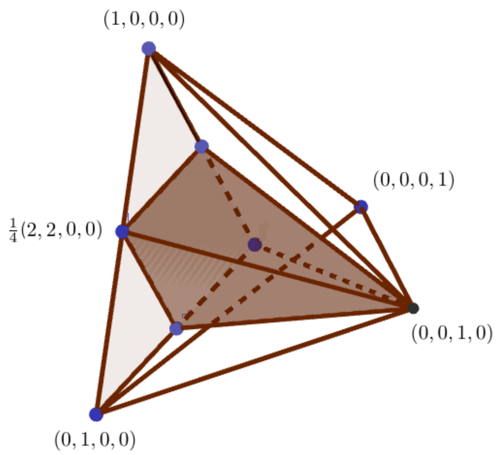


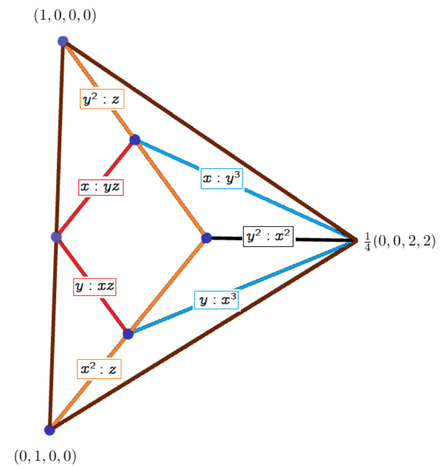
age(g)=1 の格子点



$\mathrm{Hilb}^{\mathrm{G}}(\mathbb{C}^4)$

以下の図に示す四角錐が $I_1 = (x^2, y^2, z^2, w, xy, yz, zx)$ から定まる錐である．さらにこの四角錐の反対側に同様の錐として $I_2 = (x^2, y^2, z, w^2, xy, yw, wx)$ から定まる四角錐が存在する．これらの座標環はともに $\mathbb{C}[\frac{x^2}{z}, \frac{y^2}{z}, \frac{xz}{y}, \frac{yz}{x}, \frac{w}{z}] \cong \mathbb{C}[XYZWV]/(XW - YZ)$ と表すことができる．
最後の図は各細分に付随する単項式の比を表したものである．





参考文献

[BKR] T. Bridgeland, A. King, and M. Reid, The Mckay correspondence as an equivalence of derived categories, J. Amer. Math. Soc. 14(2001), no.3, 535-554.

[Craw] A. Craw, Quiver representations in toric geometry, arXiv:0807:2191

[D.H.Z.] D. I. Dais, M. Henk, and G. M. Ziegler, On the existence of crepant resolutions of Gorenstein abelian quotient singularities in dimensions ≥ 4, Contemp. Math., 423, (2006), 124-204, Amer. Math. Soc.,Providence .

[Fulton] W．Fulton, Introduction to Toric Varieties, Princeton University Press, 1993.

[HIS] T. Hayashi, Y. Ito, Y. Sekiya, Existence of crepant resolutions, Advanced Study in Pure Mathematics, vol.74 (2017), 185-202.

[IN] Y. Ito, I. Nakamura, Mckay correspondence and Hilbert schemes, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 72(1996), no.7, 135-148

[Ito] Y. Ito, *The McKay correspondence - A bridge from algebra to geometry*, Algebraic Geometry in European women in mathematics(Malta, 2001), pp. 127-147, World Scientific Publ., River Edge, NJ(2003).

[Nakamura] I. Nakamura, Hilbert schemes of abelian group orbits, J. Algebraic Geom. , 10,(2001), 757 -759.

[小田] 小田忠雄, 凸体と代数幾何学, 紀伊国屋書店, 1977.

[Reid] M. Reid, Young person's guide to canonical singularities, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985(Brunswick, Maline, 1985), 345-414, Proc. Sympos. Pure Math., 46, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[K.Sato] K. Sato, Existence of crepant resolution for abelian quotient singularities by order p elements in dimension 4, Saitama Math. J. ,Vol. 27(2010),9-23