ある性質を持つカスプ辺とそのガウス写像に現れるカスプ特異点の幾何学的性質の関係について

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
寺本 圭佑 (Keisuke TERAMOTO) *

1 導入

U を $\boldsymbol{R}^2$ 内の領域とし, $f\colon U \to \boldsymbol{R}^3$ を C^∞ 級写像とする. このとき, f が**フロンタル**であるとは, ある f に沿う単位ベクトル場 $\nu\colon U \to S^2$ が存在し, 任意の $q \in U$ と $X \in T_qU$ に対して, $\langle df_q(X), \nu(q)\rangle = 0$ が成り立つときをいう. ただし, S^2 は 2 次元単位球面を表し, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は, $\boldsymbol{R}^3$ の標準内積を意味する. さらに, フロンタル f が**フロント**であるとは, 写像の組 $(f,\nu)\colon U \to \boldsymbol{R}^3 \times S^2$ が, はめ込みを与えるときをいう. ベクトル場 ν を f の**ガウス写像**と呼ぶ. 定義より, フロンタルやフロントは**特異点**, 即ち, はめ込みにならない点を持つことがある. しかし, 特異点においても, ガウス写像が定義されていることに注意する. このことから, 近年, フロントやフロンタルの特異点における微分幾何学的性質の研究が活発に行われている ([4–6, 8, 9, 11, 13, 15, 17–19]). 特に, **カスプ辺**と呼ばれる特異点に対する研究が顕著である ([10, 12, 14, 21]).

一方, ガウス写像 ν 自身も特異点を持つことがある. ガウス写像に代表的に現れる特異点として, **折り目特異点**や**ホイットニー・カスプ**が知られている ([2, 3, 26]). これらの特異点集合は, 局所的に U 内の正則曲線で与えられ, その ν による像は (特異点を許容する) 球面上の曲線となる. ここで, 折り目特異点の像は, 正則曲線に対応し, ホイットニー・カスプの像は, カスプに対応する. このカスプに対して, **カスプ的曲率**を計算することができる ([19, 20]).

本稿では, カスプ辺の幾何学的不変量とガウス写像に現れるホイットニー・カスプの符号の関係やその幾何学的性質について解説する. また, カスプ辺が有界なガウス曲率を持つとき, ガウス写像の特異点がカスプ辺にどのような影響を与えているかについても述べる. 本研究の内容は, 論文 [24, 25] が元になっている. 特に断らない限り, 多様体や写像は C^∞ 級とする.

2 準備

この節では, 写像の特異点や特異点を持つ曲線, 曲面の幾何学的性質を振り返る. 詳細については, [1, 7, 11, 17] などを参照していただきたい.

* E-mail: teramoto@math.kobe-u.ac.jp

2.1　多様体間の写像に現れる特異点

M^m, N^n をそれぞれ m 次元, n 次元の多様体とし, $f\colon (M^m,p) \to (N^n,P)$ を点 $p \in M$ における写像芽とする．ただし, $P = f(p) \in N$ とする．点 p が, f の**特異点**であるとは, $\operatorname{rank} df_p < \min\{m,n\}$ を満たすときをいう．いま, $S(f)(\subset (M,p))$ で, f の特異点集合を表す．本稿では, 主として $(m,n) = (1,2), (2,2), (2,3)$ の場合を扱う．

定義 2.1. $f_i\colon (M_i^m,p_i) \to (N_i^n,P_i)$ $(i = 1,2)$ を写像芽とする．このとき, f_1 が f_2 に **$\mathcal{A}$ 同値**であるとは, 微分同相写像芽 $\varphi\colon (M_1^m,p_1) \to (M_2^m,p_2)$ と $\Phi\colon (N_1^n,P_1) \to (N_2^n,P_2)$ が存在し, $\Phi \circ f_1 = f_2 \circ \varphi$ が成り立つときをいう．

定義 2.2. $f\colon (M^m,p) \to (N^n,P)$ を写像芽とする．

(1) $(m,n) = (1,2)$ とする．このとき, f が p で**カスプ**を持つとは, f が $t \mapsto (t^2,t^3)$ に $\mathcal{A}$ 同値なときをいう．

(2) $(m,n) = (2,2)$ とする．このとき, f が p で**折り目特異点**を持つとは, f が $(u,v) \mapsto (u,v^2)$ に $\mathcal{A}$ 同値となるときをいい, f が p で**ホイットニー・カスプ**を持つとは, f が $(u,v) \mapsto (u,v^3+uv)$ に $\mathcal{A}$ 同値なときをいう．

(3) $(m,n) = (2,3)$ とする．このとき, f が p で**カスプ辺**を持つとは, f が $(u,v) \mapsto (u,v^2,v^3)$ に $\mathcal{A}$ 同値なときをいう．

注意 2.3. 折り目特異点を与える写像芽 $f\colon (\boldsymbol{R}^2,0) \ni (u,v) \mapsto (u,v^2) \in (\boldsymbol{R}^2,0)$ に対して, 特異点集合は, $S(f) = \{v = 0\}$ となる．よって, その像は, $f(S(f)) = \{(u,0)\}$ であり, これは, 正則曲線に $\mathcal{A}$ 同値であることを意味している．一方, ホイットニー・カスプを与える写像芽 $f\colon (\boldsymbol{R}^2,0) \ni (u,v) \mapsto (u,v^3+uv) \in (\boldsymbol{R}^2,0)$ に対して, その特異点集合 $S(f)$ は, $S(f) = \{u + 3v^2 = 0\}$ で与えられ, 曲線 $\gamma(v) = (-3v^2,v)$ でパラメータ表示される．このとき, $f \circ \gamma(v) = (-3v^2,-2v^3)$ で与えられ, 特異点集合の像がカスプに $\mathcal{A}$ 同値とわかる (図 1).

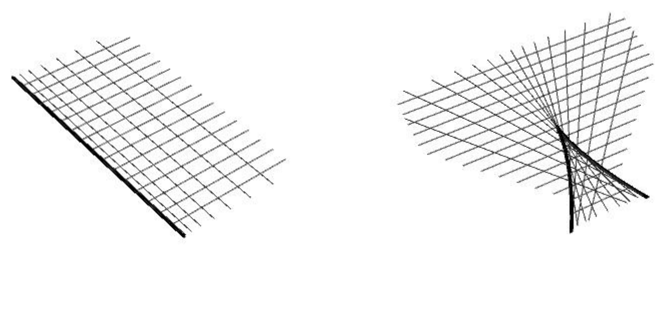

図 1　折り目特異点 (左) とホイットニー・カスプ (右). 太い曲線は, 特異点集合の像.

2.2 カスプを持つ球面曲線のカスプ的曲率

$(I;t)$ を $\boldsymbol{R}$ の開区間とし, $\sigma\colon I\to S^2(\subset \boldsymbol{R}^3)$ を球面曲線とする. 点 $t_0\in I$ を σ の特異点, つまり, $(d\sigma/dt)(t_0)=\dot\sigma(t_0)=\boldsymbol{0}$ とする. このとき, t_0 がカスプであるための必要十分条件は,

$$\det(\sigma, D_t\dot\sigma, D_tD_t\dot\sigma)(t_0)\neq 0$$

であることが知られている ([7, 16]). ただし, D は S^2 の共変微分であり, $D_t=D_{d/dt}$ を表す.

点 t_0 にカスプを持つ球面曲線 σ に対して, **カスプ的曲率** μ を

$$\mu=\left.\frac{\det(\sigma(t), D_t\dot\sigma(t), D_tD_t\dot\sigma(t))}{|D_t\dot\sigma(t)|^{5/2}}\right|_{t=t_0} \tag{2.1}$$

と定める ([19, 20]). これは, カスプの開き具合を表す量であり, 定義域の向きを保つ微分同相写像や S^2 の剛性運動によらない. 一般に, カスプを持つ 2 次元リーマン多様体上の曲線に対して, カスプ的曲率が定義できることを注意しておく.

定義 2.4. $\sigma\colon I\to S^2$ を球面曲線で, t_0 においてカスプを持つとする. このとき, t_0 が σ の**正のカスプ**または**ジグ** (resp. **負のカスプ**または**ザグ**) であるとは, t_0 でカスプ的曲率 μ が正 (resp. 負) のときをいう.

図 2　ジグ (左) とザグ (右). ジグの場合, 曲線はカスプにおいて進行方向に右折する.

2.3 カスプ辺の幾何学的性質

$(U;u,v)\subset\boldsymbol{R}^2$ を開領域とし, $f\colon U\to\boldsymbol{R}^3$ をフロント, $\nu\colon U\to S^2$ を f のガウス写像とする. また, 点 $p\in U$ を f の特異点とする. 関数 $\lambda\colon U\to\boldsymbol{R}$ を

$$\lambda(u,v)=\det(f_u,f_v,\nu)(u,v)\quad (f_u=\partial f/\partial u,\ f_v=\partial f/\partial v) \tag{2.2}$$

とし, f の**符号付き面積密度関数**と呼ぶ. 特異点の定義から, $p\in S(f)$ であることと, $\lambda(p)=0$ であることは同値である. 点 $p\in S(f)$ が f の**非退化特異点**であるとは, $(\lambda_u(p),\lambda_v(p))\neq(0,0)$ を満たすときをいう. 点 p が f の非退化特異点であるとき, $\operatorname{rank} df_p=1$ であることに注意する. また, 陰関数定理より, 正則曲線 $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to U$ $(\varepsilon>0)$ で, $\gamma(0)=p$, $\lambda(\gamma(t))=0$ を満たすものが存在する. この曲線 γ を f の**特異曲線**と呼ぶ. さらに, p が非退化特異点のとき, U 上の零でないベクトル場 η で, γ に沿って $df(\eta)=\boldsymbol{0}$ を満たすものが存在する. このベクトル場 η を**退化ベクトル場**と呼ぶ.

事実 2.5 ([11, 18])**.** フロント f が点 p でカスプ辺を持つための必要十分条件は, p が非退化特異点であり, $\eta\lambda(p)\neq0$ を満たすことである.

この事実は, 定義域において $\det(\gamma', \eta)(0) \neq 0$ が成り立つことと同値である. 特に, p の近傍で特異曲線の各点はカスプ辺からなり, 特異曲線の f による像は正則空間曲線である. カスプ辺の周りで, 次の座標系が取れることが知られている ([11, 13, 17]).

定義 2.6. カスプ辺 p を中心とする局所座標系 $(U; u, v)$ で,

- u 軸が特異曲線を与える,
- $\eta = \partial_v$ が退化方向を与える,
- u 軸のほかに特異点がない

を満たすものが存在するとき, この局所座標系を, **適合的座標系**と呼ぶ. さらに, 適合的座標系において $\{f_u, f_{vv}, \nu\}$ が u 軸に沿って正規直交枠を与えるとき, $(U; u, v)$ を**特別な適合的座標系**という.

さて, カスプ辺に沿って次の不変量が知られている: **特異曲率** κ_s ([4, 17]), **極限法曲率** κ_ν ([13, 17]), **カスプ的曲率** κ_c ([13]), **カスプ的捩率** κ_t ([12]), **変曲曲率** κ_i ([12]). 特別な適合的座標系を用いると, これらは次のように与えられる.

$$\kappa_s(u) = \det(f_u, f_{uu}, \nu)(u, 0), \quad \kappa_\nu(u) = \langle f_{uu}, \nu \rangle (u, 0), \quad \kappa_c(u) = \det(f_u, f_{vv}, f_{vvv})(u, 0),$$
$$\kappa_t(u) = \det(f_u, f_{vv}, f_{uvv})(u, 0), \quad \kappa_i(u) = \det(f_u, f_{vv}, f_{uuu})(u, 0).$$

特に, κ_i は, $\kappa_i(u) = \kappa_\nu'(u) + \kappa_s(u)\kappa_t(u)$ を満たす ([12, 24]). また, 極限法曲率 κ_ν とカスプ的曲率 κ_c の積からなる, **積曲率** $\kappa_\Pi = \kappa_\nu \kappa_c$ が知られている ([13]). 特異曲率 κ_s と積曲率 κ_Π はそれぞれカスプ辺の**内在的不変量**である ([4, 13, 17]). 特に, 特異曲率 κ_s は, カスプ辺の凹凸に関係しており (図 3, [17]), 積曲率 κ_Π は, ガウス曲率の挙動に関係している ([13]). ここで, ガウス写像 ν に対して, $\Lambda(u, v) = \det(\nu, \nu_u, \nu_v)(u, v)$ とすると, f のガウス曲率 K は, 正則点集合 $U \setminus S(f)$ 上で, $K = \Lambda/\lambda$ で与えられる波面の内在的不変量である.

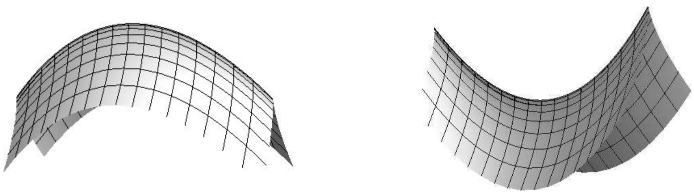

図 3　κ_s が正のカスプ辺 (左) と負のカスプ辺 (右).

上述の不変量を用いることで, 次のカスプ辺の特徴づけができる.

事実 2.7 ([10, 13, 17, 23])**.** $f\colon U \to \boldsymbol{R}^3$ をフロント, $\nu\colon U \to S^2$ を f のガウス写像, $p \in U$ をカスプ辺, γ を p を通る特異曲線とする. このとき, 次が成立する.

(1) f のガウス曲率 K が p の十分小さい近傍上で有界であるための必要十分条件は, κ_ν が γ 上で零となることである.

(2) f のガウス曲率 K が p で有理的有界 (resp. 有理的連続) であるための必要十分条件は, $\kappa_\nu(p) = 0$ (resp. $\kappa_\nu(p) = \kappa_\nu'(p) = 0$) であることである.

(3) 特異曲線 γ が f の曲率線であるための必要十分条件は, κ_t が γ 上零であることである.

ここで, ガウス曲率 K が点 p で**有理的有界** (resp. **有理的連続**) であるとは, 点 p を中心として極座標 (r,θ) をとるとき, 有限個の θ を除いて, $r\to 0$ で K が有界 (resp. 連続) となることである (詳細は, [13] 参照). また, ガウス写像 ν が点 p で特異点を持つための必要十分条件は, $\kappa_\nu(p)=0$ であることから, ガウス曲率 K が有理的有界であることと, ν が p で特異点を持つことは同値である ([13]). これは, $\Lambda(p)=0$ とも同値であることに注意する ([24]).

2.4 カスプ辺のガウス写像の特異点

$f\colon U\to \boldsymbol{R}^3$ を点 p でカスプ辺を持つフロントとし, ν をそのガウス写像で点 p において特異点を持つものとする. このとき, 関数 $\Lambda=\det(\nu,\nu_u,\nu_v)$ は, $\Lambda(p)=0$ であり, さらに $(\Lambda_u(p),\Lambda_v(p))\neq(0,0)$ を満たすとする. このような点を ν の**非退化特異点**いう. フロントの非退化特異点の場合と同様に, 陰関数定理から, 正則曲線 $\sigma\colon(-\delta,\delta)\ni\tau\mapsto\sigma(\tau)\in U$ $(\delta>0)$ で, $\sigma(0)=p$, $\Lambda(\sigma(\tau))=0$ を満たすものが存在する. この曲線 σ を f の**放物点曲線**または, ν の**特異曲線**と呼ぶ. ガウス写像 ν が点 p で折り目特異点やホイットニー・カスプを持つとき, 点 p は非退化特異点であることに注意する. また, 点 p が ν のホイットニー・カスプであるとき, $\check{\nu}(\tau)=\nu\circ\sigma(\tau)$ は, $\tau=0$ でカスプを持つ球面曲線になる (注意 2.3 参照).

定義 2.8 ([17,19])**.** 点 p でカスプ辺を持つフロント f のガウス写像 ν が, 点 p でホイットニー・カスプを持つとする. このとき, 点 p が ν の**正のカスプ** (resp. **負のカスプ**) であるとは, $\check{\nu}=\nu\circ\sigma$ のカスプ的曲率 μ^{ν} が正 (resp. 負) であるときをいう. ただし, σ は, 点 p を通る f の放物点曲線である. 点 p が ν の正のカスプ (resp. 負のカスプ) のとき, p を $\check{\nu}$ の**ジグ** (resp. **ザグ**) という.

次の節で, カスプ辺がある条件を満たす場合, カスプ辺の不変量とホイットニー・カスプの符号の関係について述べる. そのために, ホイットニー・カスプの判定条件と不変量の関係を述べる. カスプ辺が, 事実 2.7 の (1), (2), (3) のどれかを満たす場合, ガウス写像の特異点は, 次のように特徴づけられる.

命題 2.9 ([24])**.** $f\colon U\to\boldsymbol{R}^3$ を $p\in U$ にカスプ辺を持つフロントとし, $\nu\colon U\to S^2$ をそのガウス写像とする. また, ガウス写像 ν は, 点 p で特異点を持つとする.

(1) f のガウス曲率 K が p の十分近くで有界であるとする. このとき,
- ν が p で折り目特異点を持つための必要十分条件は, $\kappa_t(p)\neq 0$ である.
- ν が p でホイットニー・カスプを持つための必要十分条件は, $\kappa_t(p)=0$, $\kappa_t'(p)\neq 0$, $\kappa_s(p)\neq 0$ である.

(2) K が点 p で有理的連続であるとする. このとき,
- ν が p で折り目特異点を持つための必要十分条件は, $\kappa_t(p)(4\kappa_t(p)^2+\kappa_s(p)\kappa_c(p)^2)\neq 0$ である.
- ν が p でホイットニー・カスプを持つための必要十分条件は, $\kappa_t(p)=0$, $\kappa_s(p)\neq 0$, $\kappa_i'(p)\neq 0$ である.

(3) f の特異曲線 γ が曲率線を与えているとする. このとき,
- ν が p で折り目特異点を持つための必要十分条件は, $\kappa_\nu'(p)\neq 0$ である.

- ν が p でホイットニー・カスプを持つための必要十分条件は, $\kappa_\nu'(p) = 0$, $\kappa_s(p) \neq 0$, $\kappa_\nu''(p) \neq 0$ である.

この命題から, 次のことが分かる.

命題 2.10 ([25])**.** $f\colon U \to \boldsymbol{R}^3$ を点 p にカスプ辺を持つフロントとし, ν をそのガウス写像で点 p においてホイットニー・カスプを持つものとする. さらに, 命題 2.9 にある条件 (1), (2), (3) のどれか一つを満たすとする. このとき, 点 p を通る f の特異曲線 γ の接ベクトルと f の放物点曲線 σ の接ベクトルは, 点 p で平行になる.

また, 有界なガウス曲率を持つカスプ辺に対して次のことが言える.

定理 2.11 ([25])**.** $f\colon U \to \boldsymbol{R}^3$ をフロント, $p \in U$ をカスプ辺, ν を f のガウス写像とする. フロント f のガウス曲率 K が, 点 p の十分近くで有界であり, ガウス写像が点 p で, 折り目特異点以外の非退化特異点を持つとする. このとき, K が p の近くで正 (resp. 負) であるための必要十分条件は, κ_s が p で負 (resp. 正) になることである.

3 ある性質を持つカスプ辺のガウス写像に現れるホイットニー・カスプの符号

上記の準備をもとにして, 本稿の主結果を述べる.

定理 3.1 ([25])**.** $f\colon U \to \boldsymbol{R}^3$ を点 p でカスプ辺を持つフロント, $\nu\colon U \to S^2$ を f のガウス写像とする. 点 p で, ガウス写像 ν がホイットニー・カスプを持ち, フロント f が次の条件のうち一つを満たしているとする:

(1) f のガウス曲率 K が p の十分近くで有界,
(2) f のガウス曲率 K が p で有理的連続,
(3) f の特異曲率 γ が曲率線を与える.

さらに, 特異曲線 γ と放物点曲線 σ が, $\gamma'(0) \cdot \dot{\sigma}(0) > 0$ を満たしているとする. ただし, ドット '$\cdot$' は, $\boldsymbol{R}^2$ の標準内積を意味する. このとき, 点 p が ν の正のカスプ (resp. 負のカスプ) であるための必要十分条件は, $\kappa_s(p) > 0$ (resp. $\kappa_s(p) < 0$) が成り立つことである.

この定理から, ガウス写像が正のカスプ (resp. 負のカスプ) を持つためには, カスプ辺は凸 (resp. 凹) でなければならないことが分かる. また, 放物点曲線の向きを変えると, ジグとザグが入れ替わることに注意しておく.

定理 2.11 と定理 3.1 から, 次のことが分かる.

系 3.2 ([25])**.** 定理 3.1 の仮定の下, ガウス曲率がカスプ辺 p の近くで有界であるとする. このとき, ガウス曲率が p の近くで正 (resp. 負) ならば, p はガウス写像の負のカスプ (resp. 正のカスプ) である. 即ち, 点 p は $\tilde{\nu}$ のザグ (resp. ジグ) となる.

このことから, カスプ辺の近くで有界なガウス曲率を持つフロントのガウス写像には, ジグもしくはザグのどちらか一方しか現れないことが分かる.

例 3.3. $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ を

$$f(u,v)=\left(u, 3u^2+\frac{v^2}{2}, \frac{v^3}{3}+u^4+u^2v^2\right)$$

とする. これは, 原点にカスプ辺を持つ写像であり, $S(f)$ は u 軸に一致する. 対応するガウス写像 ν は,

$$\nu(u,v)=\frac{\left(8u^3-2uv(v-3), -2u^2-v, 1\right)}{\sqrt{1+(v+2u^2)^2+(8u^3-2uv(v-3))^2}}$$

で与えられる. 直接計算から, 極限法曲率 κ_ν は, u 軸に沿って零であり,

$$\kappa_s(u)=\frac{6\left(1+24u^4+64u^6\right)}{\sqrt{1+4u^2+64u^6}\,(1+36u^2+16u^6)^{3/2}}, \quad \kappa_t(u)=\frac{4u}{1+4u^2+64u^4}$$

を得る. したがって, $\kappa_t(0)=0$, $\kappa_s(0)=6>0$, $\kappa_t'(0)=4\neq 0$ とわかるので, ν は, 原点に ホイットニー・カスプを持つ. また, ガウス曲率 K は有界であり, 原点の十分近くで負になる. 実際, K は,

$$K=\frac{2\left(-3-8u^2+v\right)}{\left(1+64u^6+v^2+u^4\left(4+96v-32v^2\right)+4u^2v\left(1+9v-6v^2+v^3\right)\right)^2}$$

と表される.

一方, 放物点曲線は u 軸であり, $\check{\nu}(u)=\nu(u,0)$ は,

$$\check{\nu}(u)=\frac{\left(8u^3, -2u^2, 1\right)}{\sqrt{1+4u^4+64u^6}}$$

となる. これは $u=0$ にカスプを持ち, カスプ的曲率 μ^ν は,

$$\mu^\nu=6=\frac{2\kappa_s(0)}{\sqrt{|\kappa_t'(0)|}}>0$$

である. よって, 原点は, ν の正のカスプ, つまり, $\check{\nu}$ のジグである.(図 4).

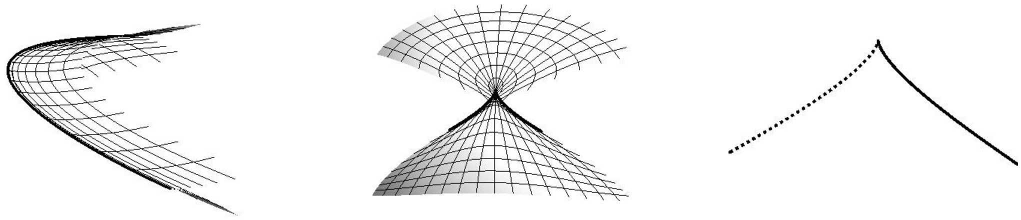

図 4　例 3.3 で与えられたカスプ辺 (左), ガウス写像 (中央) と $\check{\nu}$ (右) の像. 太い曲線は, 放物点曲線の像.

例 3.4. $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ を

$$f(u,v)=\left(u, -u^2+\frac{1}{2}v^2, \frac{1}{3}v^3+u^4\right)$$

で与えられる写像とする．これは原点にカスプ辺を持ち, 特異点集合は, $S(f)=\{v=0\}$ である．また, 退化方向は, $\eta=\partial_v$ で与えられている．対応するガウス写像 ν は,

$$\nu(u,v)=\frac{\left(-4u^3-2uv,-v,1\right)}{\sqrt{1+v^2+4u^2(2u^2+v)^2}}$$

である．フロント f に対して,

$$\kappa_s(u)=\frac{-2+64u^6}{\sqrt{1+16u^6}(1+4u^2+16u^6)^{3/2}},\quad \kappa_\nu(u)=\frac{12u^2}{\sqrt{1+16u^6}(1+4u^2+16u^6)},$$
$$\kappa_t(u)=\frac{24u^3}{(1+16u^6)(1+4u^2+16u^6)},\quad \kappa_i(u)=-\frac{24u(-1+2u^2+56u^6)}{\sqrt{1+16u^6}(1+4u^2+16u^6)^{5/2}},$$

$\kappa_c(0)=2$ が成り立ち, 正則点集合で, ガウス曲率 K は,

$$K=\frac{2\left(6u^2+v\right)}{v\left(1+16u^6+16u^4v+v^2+4u^2v^2\right)^2}$$

となる．したがって, $\kappa_\nu(0)=\kappa_\nu'(0)=0$, $\kappa_\nu''(0)=24\neq 0$, $\kappa_t(0)=0$, $\kappa_s(0)\kappa_i'(0)=-48\neq 0$ を得る．これは, K が原点において有理的連続であり, ν が原点でホイットニー・カスプを持つことを意味している．

直接計算より, ν の特異点集合は, $S(\nu)=\{(u,v)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 6u^2+v=0\}$ であり, したがって, 放物点曲線 σ は, $\sigma(u)=(u,-6u^2)$ で与えられる．さらに, $\sigma'(0)=(1,0)=\gamma'(0)$ とわかる．放物点曲線の ν による像 $\check{\nu}(u)=\nu(\sigma(u))$ は,

$$\check{\nu}(u)=\frac{\left(8u^3,6u^2,1\right)}{\sqrt{1+36u^4+64u^6}}$$

で与えられる．この曲線 $\check{\nu}$ の $u=0$ におけるカスプ的曲率 μ^ν は,

$$\mu^\nu=\frac{-2}{\sqrt{3}}=2\kappa_s(0)\sqrt{\left|\frac{\kappa_s(0)}{\kappa_i'(0)}\right|}<0.$$

よって, 原点は ν の負のカスプである (図 5).

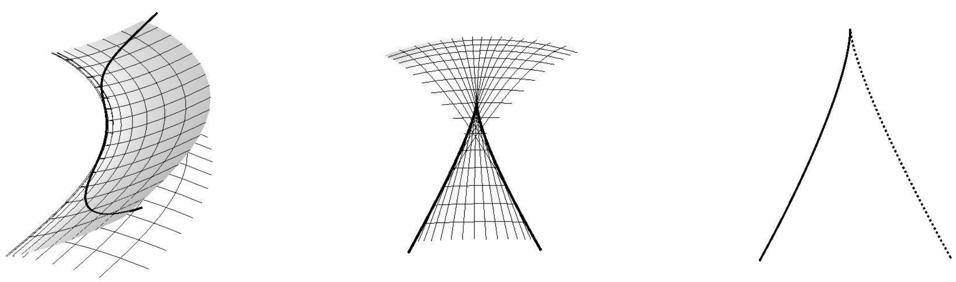

図 5　左: 例 3.4 のカスプ辺の像．太い曲線は, 放物点曲線の像．中央: ガウス写像 ν の像．右: $\check{\nu}$ の像．破線は $u<0$ の部分を表し, 太い曲線は $u>0$ の部分を表している．

参考文献

[1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps. Vol. I.*, Monographs in Math. **82**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.

[2] T. Banchoff, T. Gaffney and C. McCrory, *Cusps of Gauss mappings*, Research Notes in Math. **55**, Pitman, Boston, Mass.-London, 1982.

[3] D. Bleecker and L. Wilson, Stability of Gauss maps, *Illinois J. Math.* **22** (1978), 279–289.

[4] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Intrinsic properties of surfaces with singularities, *Intarnat. J. Math.* **26** (2015), no. 4, 1540008, 34 pp.

[5] A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, Isometric deformations of wave fronts at non-degenerate signular points, arXiv:1710.02999.

[6] G. Ishikawa and Y. Machida, Singularities of improper affine spheres and surfaces of constant Gaussian curvature, *Internat. J. Math.* **17** (2006), no. 3, 269–293.

[7] S. Izumiya, M. C. Romero Fuster, M. A. S. Ruas and F. Tari, *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2016.

[8] S. Izumiya and K. Saji, The mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in Lorentz-Minkowski space and "flat" spacelike surfaces, *J. Singul.* **2** (2010), 92–127.

[9] S. Izumiya, K Saji and M. Takahashi, Horospherical flat surfaces in hyperbolic 3-space, *J. Math. Soc. Japan* **62** (2010), no. 3, 789–849.

[10] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, Flat surfaces along cuspidal edges, *J. Singul.* **16** (2017), 73–100.

[11] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Singularities of flat fronts in hyperbolic space, *Pacific J. Math.* **221** (2005), no. 2, 303–351.

[12] L. F. Martins and K. Saji, Geometric invariants of cuspidal edges, *Canad. J. Math.* **68** (2016), no. 2, 445–462.

[13] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, Geometry and Topology of Manifolds, 247–281, Springer Proc. Math. Stat. **154**, Springer, Tokyo, 2016.

[14] K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, Isometric deformations of cuspidal edges, *Tohoku Math. J. (2)* **68** (2016), no. 1, 73–90.

[15] R. Oset Sinha and F. Tari, On the flat geometry of the cuspidal edge, *Osaka J. Math.* **55** (2018), no. 3, 393–421.

[16] I. R. Porteous, *Geometric differentiation. For the intelligence of curves and surfaces, Second edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[17] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, The geometry of fronts, *Ann. of Math. (2)* **169**

(2009), no. 2, 491–529.

[18] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, A_k singularities of wave fronts, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **146** (2009), no. 3, 731–746.

[19] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, The duality between singular points and inflection points on wave fronts, *Osaka J. Math.* **47** (2010), no. 2, 591–607.

[20] S. Shiba and M. Umehara, The behavior of curvature functions at cusps and inflection points, *Differential Geom. Appl.* **30** (2012), 285–299.

[21] K. Teramoto, Parallel and dual surfaces of cuspidal edges, *Differential Geom. Appl.* **44** (2016), 52–62.

[22] K. Teramoto, Focal surfaces of wave fronts in the Euclidean 3-space, *Glasgow Math. J.* (2018). https://doi.org/10.1017/S0017089518000277

[23] K. Teramoto, Principal curvatures and parallel surfaces of wave fronts, to appear in *Adv. Geom.* (DOI 10.1515/advgeom-2018-0038), arXiv:1612.00577v2.

[24] K. Teramoto, Singularities of Gauss maps of wave fronts with non-degenerate singular points, arXiv:1806.08140.

[25] K. Teramoto, On cusps of Gauss maps of cuspidal edges with certain properties, preprint.

[26] H. Whitney, On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane, *Ann. of Math. (2)* **62** (1955), 374–410.