

団代数における前変異と後変異の双対性について

藤原祥吾 Fujiwara Shogo (名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻)

1 概要

団代数は変異関係式によって定まる可換代数のクラスである. 本稿では通常の変異と後変異の間の双対性について紹介する. 後変異とは初期種子を変更した際の, 団変数の初期種子による有理関数表示の変換である. 特に F 多項式の最大次数を並べてできる行列 (F 行列) を考え, F 行列が自己双対を持つことを示した. これは C 行列, G 行列に関する双対性の類似である. 本稿内容は行田康晃氏 (名古屋大学) との共同研究に基づく.

2 前変異と後変異の双対性および F 行列の自己双対性

団代数は Fomin, Zelevinsky 氏らが, リー理論における全正值性や標準基底の問題を解決するために [FZ02] で導入したものである. その後の研究により団代数の代数的・組み合わせ論的性質が, 多面体の三角形分割, 完全 WKB 解析, 籐の表現など様々な分野に現れることが分かっている. あらゆる数学分野に影響を及ぼすため, 団代数の研究は近年盛んに行われている.

団代数の主眼は種子 (団変数, y 変数, 交換行列の組) と変異の代数的・組み合わせ論的性質を調べることにある. さらに分離公式 ([FZ07, Proposition 3.13, Corollary 6.3]) により, C 行列, G 行列, F 多項式を通して団変数や y 変数の性質や表示を調べることができる. そのため C 行列, G 行列, F 多項式の性質を研究することが主である.

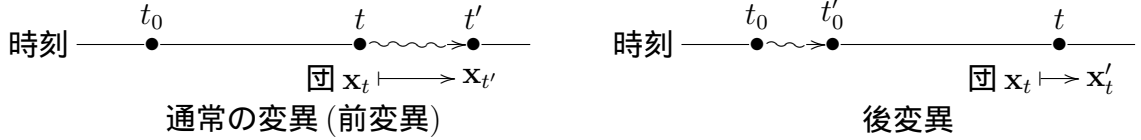
ところで F 多項式は C 行列, G 行列と異なり多項式であるため, 行列特有の操作ができず扱いにくいという点がある. そのため F 多項式の情報の一部を持つ次のような行列を定める.

定義 2.1 ([FG, Definition 2.6]). 各 F 多項式 $F_{i;t}^{B;t_0}(y_1, \dots, y_n)$ において, $y_1, \dots, y_n$ の最大次数をそれぞれ, $f_{1;t}^{B;t_0}, \dots, f_{ni;t}^{B;t_0}$ とする. それを並べて得られる列ベクトル

$$\mathbf{f}_{i;t}^{B;t_0} = \begin{bmatrix} f_{1;t}^{B;t_0} \\ \vdots \\ f_{ni;t}^{B;t_0} \end{bmatrix} \text{ を } \mathbf{f} \text{ ベクトルと呼び, } F_t^{B;t_0} = (\mathbf{f}_{1;t}^{B;t_0}, \dots, \mathbf{f}_{n;t}^{B;t_0}) \text{ を } F \text{ 行列と呼ぶ.}$$

本稿では C 行列, G 行列, F 行列の前変異関係式と後変異関係式の双対性について述べる.

通常の変異 (前変異) は下図左のように、初期頂点を固定し、現在頂点を動かした際に得られる変換である。一方後変異は下図右のように、現在頂点を固定し、初期頂点を動かした際に得られる、現在頂点における種子の“表示”の変換である。本稿では変換で定義される前変異、後変異の具体的な関係式を与え、それらが双対的であることを述べる。



まず次の事実がある。

命題 2.2 ([NZ12, (1.13), Proposition 4.2], [FG, Proposition 3.7]). C 行列の列符号同一性の仮定の下、次が成り立つ:

(1) 任意の交換行列 B , および $t_0, t \in \mathbb{T}_n$ に対し,

$$(G_t^{B;t_0})^T = C_{t_0}^{B^T;t}. \quad (2.1)$$

(2) 任意の $t \in \mathbb{T}_n$ に対し,

$$H_t^{B;t_0} = -[-G_t^{B;t_0}]_+. \quad (2.2)$$

(3) 全ての G 行列 $G_t^{B;t_0}$ ($t \in \mathbb{T}_n$) は行に関して符号同一的である。

(2.1) は C 行列と G 行列の双対性を表す重要な等式である。

さて、最初に C, G, F 行列の前変異関係式については次で与えられる。

命題 2.3 (C, G, F 行列の前変異関係式 I [FZ07, (5.9), Proposition 6.6], [FG, Proposition 2.9]). $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とする。 $\mathbb{T}_n$ の各辺 $t \xrightarrow{\ell} t'$ について、以下の式が成り立つ。

$$C_{t'}^{B;t_0} = C_t^{B;t_0} (J_\ell + [\varepsilon B_t]_+^{\ell \bullet}) + [-\varepsilon C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet \ell} B_t, \quad (2.3)$$

$$G_{t'}^{B;t_0} = G_t^{B;t_0} (J_\ell + [\varepsilon B_t]_+^{\bullet \ell}) - B[\varepsilon C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet \ell}, \quad (2.4)$$

$$F_{t'}^{B;t_0} = F_t^{B;t_0} (J_\ell + [\varepsilon B_t]_+^{\bullet \ell}) + [\varepsilon C_t^{B;t_0}]_+^{\bullet \ell} + [-\varepsilon C_t^{-B;t_0}]_+^{\bullet \ell}. \quad (2.5)$$

さらに C 行列の符号同一性を仮定することで、(2.3), (2.4), (2.5) は、次のように簡略化できる。(2.6), (2.7) は [NZ12] で既に与えられたものである。

命題 2.4 (C, G, F 行列の前変異関係式 II [FG, Proposition 2.12, 2.13]). $\mathbb{T}_n$ の各辺 $t \xrightarrow{\ell} t'$ について、以下の式が成り立つ。

$$C_{t'}^{B;t_0} = C_t^{B;t_0} (J_\ell + [\varepsilon_\bullet (C_t^{B;t_0}) B_t]_+^{\ell \bullet}), \quad (2.6)$$

$$G_{t'}^{B;t_0} = G_t^{B;t_0} (J_\ell + [-\varepsilon_\bullet (C_t^{B;t_0}) B_t]_+^{\bullet \ell}), \quad (2.7)$$

$$F_{t'}^{B;t_0} = F_t^{B;t_0} (J_\ell + [\varepsilon_\bullet (C_t^{-\varepsilon B;t_0}) (\varepsilon B_t)]_+^{\bullet \ell}) + [\varepsilon_\bullet (C_t^{-\varepsilon B;t_0}) C_t^{\varepsilon B;t_0}]_+^{\bullet \ell}. \quad (2.8)$$

ただし (2.8) において、 $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ である。

一方, 一般に C, G, F 行列の後変異関係式は次で定まる.

命題 2.5 (C, G, F 行列の後変異関係式 I). 辺 $t_0 \xrightarrow{k} t_1$ について, $\mu_k(B) = B_1$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とする. このとき以下の式が成り立つ.

$$C_t^{B_1; t_1} = (J_k + [-\varepsilon B]_+^{k\bullet}) C_t^{B; t_0} + H_t^{B; t_0}(\varepsilon)^{k\bullet} B_t, \quad (2.9)$$

$$G_t^{B_1; t_1} = (J_k + [\varepsilon B]_+^{k\bullet}) G_t^{B; t_0} - B H_t^{B; t_0}(\varepsilon)^{k\bullet}, \quad (2.10)$$

$$F_t^{B_1; t_1} = (J_k + [\varepsilon B]_+^{k\bullet}) F_t^{B; t_0} + (\varepsilon G_t^{B; t_0})^{k\bullet} - H_t^{B; t_0}(\varepsilon)^{k\bullet} - H_t^{-B; t_0}(\varepsilon)^{k\bullet}. \quad (2.11)$$

ただし $H_t^{B; t_0}(+) = H_t^{B; t_0}$, $H_t^{B; t_0}(-) = H_t^{B_1; t_1}$, $H_t^{-B; t_0}(+) = H_t^{-B; t_0}$, $H_t^{-B; t_0}(-) = H_t^{-B_1; t_1}$ である.

命題 2.5 に (2.2) を適用することで, 次を得る:

命題 2.6 (C, G, F 行列の後変異関係式 II). 辺 $t_0 \xrightarrow{k} t_1$ について, $\mu_k(B) = B_1$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とする. このとき以下の式が成り立つ.

$$C_t^{B_1; t_1} = (J_k + [-\varepsilon B]_+^{k\bullet}) C_t^{B; t_0} - [-\varepsilon G_t^{B; t_0}]^{k\bullet} B_t, \quad (2.12)$$

$$G_t^{B_1; t_1} = (J_k + [\varepsilon B]_+^{k\bullet}) G_t^{B; t_0} + B[-\varepsilon G_t^{B; t_0}]^{k\bullet}, \quad (2.13)$$

$$F_t^{B_1; t_1} = (J_k + [\varepsilon B]_+^{k\bullet}) F_t^{B; t_0} + [\varepsilon G_t^{B; t_0}]^{k\bullet} + [-\varepsilon G_t^{-B; t_0}]^{k\bullet}. \quad (2.14)$$

ここで命題 2.3, 命題 2.6 を比べよう. (2.1) を通して (2.3) と (2.13), (2.4) と (2.12), (2.5) と (2.14) がそれぞれ双対的な式になっていることが分かる.

さらに, 命題 2.2 (3) を用いて, 命題 2.6 の式を簡略化できる:

命題 2.7 (C, G, F 行列の後変異関係式 III). 辺 $t_0 \xrightarrow{k} t_1$ について, $\mu_k(B) = B_1$ とする. このとき以下の式が成り立つ.

$$C_t^{B_1; t_1} = (J_k + [-\varepsilon_k \bullet (G_t^{B; t_0}) B]_+^{k\bullet}) C_t^{B; t_0}, \quad (2.15)$$

$$G_t^{B_1; t_1} = (J_k + [\varepsilon_k \bullet (G_t^{B; t_0}) B]_+^{k\bullet}) G_t^{B; t_0}, \quad (2.16)$$

$$F_t^{B_1; t_1} = (J_k + [\varepsilon_k \bullet (G_t^{-\varepsilon B}) (\varepsilon B)]_+^{k\bullet}) F_t^{B; t_0} + [\varepsilon_k \bullet (G_t^{-\varepsilon B}) G_t^{\varepsilon B; t_0}]^{k\bullet}. \quad (2.17)$$

ただし (2.17) において, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ である.

先ほどと同じように命題 2.4, 命題 2.7 を見比べる. (2.1) を通して (2.6) と (2.16), (2.7) と (2.15), (2.8) と (2.17) がそれぞれ双対的な式になっていることが分かる. 以上が本稿の題目となっていた前変異と後変異の双対性である.

最後に (2.1) の類似である, F 行列の自己双対性を述べる. これが本稿における主結果である.

定理 2.8 ([FG, Theorem 3.10]). 任意の交換行列 B , および $t_0, t \in \mathbb{T}_n$ に対し, 次が成り立つ:

$$(F_t^{B; t_0})^T = F_{t_0}^{B^T; t}. \quad (2.18)$$

参考文献

- [FG] S. Fujiwara and Y. Gyoda, *Duality between front and rear mutations in cluster algebras*, preprint, arXiv:1808.02156.
- [FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster Algebra I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529.
- [FZ07] ———, *Cluster Algebra IV: Coefficients*, Comp. Math. **143** (2007), 112–164.
- [NZ12] T. Nakanishi and A. Zelevinsky, *On tropical dualities in cluster algebras*, Contemp. Math. **565** (2012), 217–226.