完全グラフのヘッセ行列の固有値について

信州大学大学院総合理工学研究科理学専攻数学分野
矢澤明喜子 (Akiko YAZAWA) *†

概要

グラフの spanning tree の母関数のヘッセ行列を考える．このヘッセ行列をグラフのヘシアンと呼ぶ．本稿ではヘッセ行列の固有値を求めることによって完全グラフのヘシアンが消えていないことを示す．応用としてグラフィックマトロイドに付随するある環の強レフシェッツ性を示す．

1 導入

複素次元が d であるコンパクトケーラー多様体 (M,ω) のコホモロジー環 $H^{\bullet}(M,\omega)=\bigoplus_{i=0}^{2d}H^i(M,\omega)$ は次数付き環である．さらに Hard Lefschetz Theorem とよばれる次の定理が知られている: 任意の $k\in\{0,1,\ldots,d\}$ に対し，$[\omega]^{d-k}:H^k(M,\omega)\to H^{2d-k}(M,\omega)$ は $H^k(M,\omega)$ と $H^{2d-k}(M,\omega)$ の線形空間としての同型を与える．コンパクトケーラー多様体のコホモロジー環がもつこの性質をより一般の可換環で考えたものが強レフシェッツ性である (定義 2.1).

マトロイドから作られるある束の組合せ論的性質を環論的に示すために Maeno–Numata [4] においてマトロイド M に付随するある環 A_M が導入された．そこでは有限射影空間から決まるマトロイドで定義される環の強 Lefschetz 性が示されている．さらに, [4] の exetend abstract [3] では任意のマトロイドに付随する環が強レフシェッツ性をもつことを予想されている．本稿ではこの予想に対して, グラフから決まるマトロイドの場合について考える．グラフの spanning tree の重み付き母関数の零化イデアルによる多項式環の剰余環がこの場合の考えるべき環である．主結果として完全グラフのヘッセ行列行列式を計算することにより, 5 頂点以下の完全グラフから構成されるマトロイドに付随する環の強レフシェッツ性を示した．

本稿の構成は以下の通りである: 2 節では強レフシェッツ性の定義や強レフシェッツ性を判定する定理を述べる．3 節ではマトロイドについて基本的な事柄の定義を例を交えて見ていく．最後に [4] での結果を紹介する．4 節では主結果を述べる．証明などの詳細は省略をしている．詳細は [9] にある．

最後に本稿を読む際に使う記号や注意についてふれる: 2^E を集合 E の部分集合全体の集合とする．$\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする．$V(m,\mathbb{K})$ は $\mathbb{K}$ 上の m 次元ベクトル空間とする．$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ を $\mathbb{K}$ を成分とするサイズ $m\times n$ の行列とする．また, 本稿では環論, グラフ理論, 束論について用語は定義をせずに用いている．例えば, 環論についてはイデアルや次数付き環といった用語を定義せずに用いている．特に強レフシェッツ性については [2] をみるとよい．グラフ理論についてサイクル, forest, spanning

* 当研究は, (一財) 長野県科学振興会の助成を受け実施したものです．
† yazawa@math.shinshu-u.ac.jp

tree, 単純グラフといった用語を定義せずに用いているがこれらについては [1] をみるとよい. 束論については, 束, atomic 束, セミモジュラー/モジュラー束を定義せずに用いている. 特にマトロイドの詳細は [7] をみるとよい.

2 可換環の強レフシェッツ性

ここでは可換環の強レフシェッツ性を定義する. また, ある表示をもつ環が強レフシェッツ性をもつかどうかを判定する定理を紹介する.

定義 2.1. $A = \bigoplus_{k=0}^{s} A_k$, $A_s \neq \mathbf{0}$, を体 $\mathbb{K}$ 上の次数付き環とする. $L \in A_1$ が存在して, 任意の $k \in \left\{ 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{s}{2} \rfloor \right\}$ に対し掛け算写像

$$\begin{array}{rccc} \times L^{s-2k}\colon & A_k & \longrightarrow & A_{s-k} \\ & \cup\!\!\!\! & & \cup\!\!\!\! \\ & f & \longmapsto & L^{s-2k} \times f \end{array}$$

が全単射であるとき, A は強レフシェッツ性をもつという. このとき, L を強レフシェッツ元という.

強レフシェッツ性の定義から, 次数付き環 $A = \bigoplus_{k=0}^{s} A_k$ が強レフシェッツ性をもつならば $\dim_{\mathbb{K}} A_k = \dim_{\mathbb{K}} A_{s-k}$ が成り立つ.

斉次多項式 $F \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ に対し,

$$\operatorname{Ann}(F) = \left\{ P \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \;\middle|\; P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) F = 0 \right\}$$

とおく. $\operatorname{Ann}(F)$ は $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ の斉次イデアルである. 次数付き環

$$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/\operatorname{Ann}(F) = \bigoplus_{k=1}^{s} A_k$$

を考える. ただし s は多項式 F の次数とする. この環は以下のような性質をもつ: 任意の k に対し

- $\dim_{\mathbb{K}} A_k < \infty$,
- $\dim_{\mathbb{K}} A_k = \dim_{\mathbb{K}} A_{s-k}$.

このような表示をもつ環が強レフシェッツ性をもつかどうかを判定する定理が知られている: 各 A_k は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間である. Λ_k を A_k の基底とし, 行列 $H_F^{(k)}$ を

$$H_F^{(k)} = \left(e_i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) e_j\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) F \right)_{\overline{e_i}, \overline{e_j} \in \Lambda_k}.$$

と定義する. この行列を多項式 F の k 次ヘッセ行列といい, この行列式を k 次ヘシアンという.

定理 2.2 (Watanabe [8], Maeno–Watanabe [5])**.** $L = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \in A_1$ とする. 掛け算写像 $\times L^{s-2k}\colon A_k \to A_{s-k}$ が全単射であることと $\det H_F^{(k)}(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ であることは同値である.

全ての k 次ヘシアンが消えていないことがわかれば強レフシェッツ性が従う. また,

$$A_1^{(k,s-k)} = \left\{ L \in A_1 \;\middle|\; \times L^{s-2k} : A_k \to A_{s-k} \text{が全単射} \right\}$$

とおくとこの定理から

$$A_1^{(k,s-k)} = \left\{ L \in A_1 \;\middle|\; \det H_F^{(k)}(a_1, \ldots, a_n) \neq 0 \right\}$$

であることがわかる．したがって任意の k に対し，$A_1^{(k,s-k)} \neq \emptyset$ であるとき $\bigcap_k A_1^{(k,s-k)} \neq \emptyset$ である．よって $\bigcap_k A_1^{(k,s-k)}$ の元が強 Lefschetz 元である．

3　マトロイドとマトロイドに付随する環

ここではマトロイドの基本的な事柄について述べる．後半ではマトロイドに付随する環について述べる．

この節では集合は有限集合を仮定する．

定義 3.1. 集合 E と $\mathcal{I} \subset 2^E$ に対し，以下の 3 条件が成り立つとき，$(E, \mathcal{I})$ をマトロイドという:

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I2) $I \in \mathcal{I}$ かつ $I' \subset I$ ならば $I' \in \mathcal{I}$.

(I3) $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ とする．$\#I_1 < \#I_2$ ならば，$I_1 \cup \{ e \} \in \mathcal{I}$ となる元 $e \in I_2 \setminus I_1$ が存在する．

$M = (E, \mathcal{I})$ をマトロイドとする．このとき，M を E 上のマトロイドという．E を ground set という．$\mathcal{I}$ の元を独立集合という．$2^E \setminus \mathcal{I}$ の元を従属集合という．$E = E(M), \mathcal{I} = \mathcal{I}(M)$ とも書く．

行列からマトロイドが構成できる．$A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ とする．

$$\begin{aligned} E &= \{ A \text{ の列の添え字集合} \}, \\ \mathcal{I} &= \left\{ X \in 2^E \;\middle|\; X \text{ に対応する } A \text{ の列ベクトルは } V(m, \mathbb{K}) \text{ 上で一次独立} \right\} \end{aligned}$$

とすると $(E, \mathcal{I})$ はマトロイド．行列 A から作られるマトロイドを $M[A]$ と書く．$M[A]$ を A の線形マトロイドという．

M をマトロイドとする．

$$\mathcal{B}(M) = \{ X \in \mathcal{I}(M) \mid \text{任意の } e \in E \text{ に対し，} I \cup \{ e \} \in \mathcal{C}(M) \}$$

とする．$\mathcal{B}(M)$ の元を M の basis と呼ぶ．つまり M の極大な独立集合のことを M の basis という．極大性から次のことがわかる．

命題 3.2. *B_1, B_2 を M の basis とすると $\#B_1 = \#B_2$ が成り立つ．*

次に独立集合属とは異なる集合族からマトロイドを定義できることを見ていく．従属集合 C の任意の真の部分集合 C' が独立集合であるとき，C を極小従属集合という．極小従属集合をサーキットと呼ぶ．$\mathcal{C}(M)$ をマトロイド M のサーキットの集合とする．$C \in \mathcal{C}(M), \#C = n$ のとき，C を n-サーキットという．

例 3.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
E(M[A]) &= \{\,1,2,3,4,5\,\},\\
\mathcal{I}(M[A]) &= \{\,\emptyset, \{\,1\,\}, \{\,2\,\}, \{\,4\,\}, \{\,5\,\}, \{\,1,2\,\}, \{\,1,5\,\}, \{\,2,4\,\}, \{\,2,5\,\}, \{\,4,5\,\}\,\},\\
2^E \setminus \mathcal{I}(M[A]) &= \{\,\{\,3\,\}, \{\,1,3\,\}, \{\,2,3\,\}, \{\,3,4\,\}, \{\,3,5\,\}, \{\,1,4\,\}\,\} \cup \{\,X \subset E \mid \#X \geq 3\,\},\\
\mathcal{B}(M[A]) &= \{\,\{\,1,2\,\}, \{\,1,5\,\}, \{\,2,4\,\}, \{\,2,5\,\}, \{\,4,5\,\}\,\},\\
\mathcal{C}(M[A]) &= \{\,\{\,3\,\}, \{\,1,4\,\}, \{\,1,2,5\,\}, \{\,2,4,5\,\}\,\}.
\end{aligned}
$$

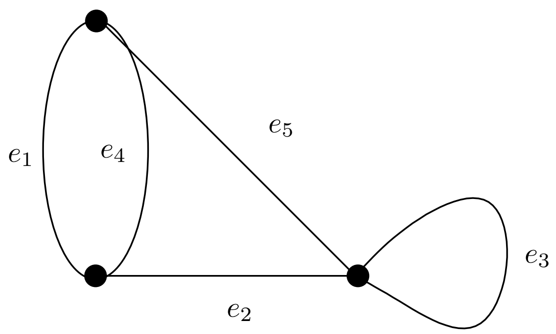
である．

サーキットの集合からマトロイドを構成する．

命題 3.4. E を集合, $\mathcal{C} \subset 2^E$ をサーキット集合とする．$\mathcal{I} = \{\,X \subset E \mid$ 任意の $C \in \mathcal{C}$ に対し, $C \not\subset X\,\}$ とする．このとき, $(E, \mathcal{I})$ はマトロイドである．

グラフからマトロイドが構成できる．E をグラフの辺集合とする．$\mathcal{C}$ をグラフのサイクルの集合とする．このとき, $\mathcal{C}$ は E 上のマトロイドのサーキット集合である．グラフ Γ から構成されるマトロイドを Γ のサイクルマトロイドといい, $M(\Gamma)$ と書く．

例 3.5. 以下のグラフ Γ を考える．



このとき，

$$
\begin{aligned}
E(M(\Gamma)) &= \{\,e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\,\},\\
\mathcal{I}(M(\Gamma)) &= \{\,\emptyset, \{\,e_1\,\}, \{\,e_2\,\}, \{\,e_4\,\}, \{\,e_5\,\}, \{\,e_1, e_2\,\}, \{\,e_1, e_5\,\}, \{\,e_2, e_4\,\}, \{\,e_2, e_5\,\}, \{\,e_4, e_5\,\}\,\},\\
\mathcal{C}(M(\Gamma)) &= \{\,\{\,e_3\,\}, \{\,e_1, e_4\,\}, \{\,e_1, e_2, e_5\,\}, \{\,e_2, e_4, e_5\,\}\,\}.
\end{aligned}
$$

ここでマトロイドの同型を定義する．

定義 3.6. M, M' をマトロイドとする．任意の $X \subset E(M)$ に対し, X が M の独立集合であることと $\psi(X) \subset E(M')$ が独立集合であることが同値となる全単射 $\psi : E(M) \to E(M')$ が存在するとき, M と M' は同型であるといい $M \cong M'$ と書く．このとき, ψ を同型写像という．

定義 3.7. グラフのサイクルマトロイドと同型なマトロイドをグラフィックマトロイドという．

例 3.8. 例 3.3 の線形マトロイド $M[A]$ と例 3.5 のサイクルマトロイド $M(\Gamma)$ を考える．$\psi : E(M[A]) \to E(M(\Gamma))$ を $\psi(i) = e_i$ とすると ψ は同型写像である．よって, $M[A]$ はグラフィックマトロイドである．

次にマトロイドの basis の母関数を考える.

$$F_M = \sum_{T \in \mathcal{B}(M)} \prod_{e \in T} x_e$$

と定義する. 補題 3.2 から F_M は斉次多項式である.

$$A_M = \mathbb{K}[\ x_e \mid e \in E(M)\ ]/\operatorname{Ann}(F_M)$$

と定義する. ここでは A_M をマトロイド M に付随する環と呼ぶことにする.

マトロイドに付随する環は Maeno–Numata [4] で導入されたものである. [4] の結果を紹介する.

$(E,\mathcal{I})$ をマトロイドとする. E の部分集合 X に対し $\mathcal{I}|X = \{\, I \subset X \mid I \in \mathcal{I}\,\}$ とすると, $(X,\mathcal{I}|X)$ はマトロイドである. $(X,\mathcal{I}|X)$ を M の X への制限 $M|X$ と書く. B を $M|X$ の basis とする. このとき, $r(X) = \#B$ である. 補題 3.2 より basis の要素数は等しいので r は well-defined である. $r(X)$ を X のランクという. B を X の basis という. M を E 上のマトロイドとする. $r : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $X \mapsto r(X)$ で定義する. r を M のランク関数という.

E 上のマトロイド M に対し

$$\sigma(X) = \{\, e \in E \mid r(X \cup \{\, e\,\}) = r(X)\,\}$$

とする. ただし r は M のランク関数とする. $\sigma(X) = X$ となる $X \subset E$ を M の閉包という. 包含関係による順序が入った M の閉包からなる半順序集合を $\mathcal{L}(M)$ とおく. 一般に $\mathcal{L}(M)$ は atomic なセミモジュラー束であることが知られている. [4] では $\mathcal{L}(M)$ がモジュラーであるとき A_M が強レフシェッツ性をもつことが示されている.

4　主結果

ここでは 5 頂点以下の完全グラフから構成されるマトロイドに付随する環の強レフシェッツ性を示す.

グラフィックマトロイドに付随する環について考える. M をグラフィックマトロイドとする. このとき, ある連結グラフ Γ が存在して $M = M(G)$ である. よって以下では連結なグラフから構成されるマトロイドのみを考える. また, グラフは単純グラフを仮定する. つまり 1-サーキットまたは 2-サーキットをもたないグラフィックマトロイドを考える.

E をグラフ Γ の辺集合とする. Γ から構成されるマトロイド $M(\Gamma) = (E,\mathcal{I})$ の独立集合について以下は同値である:

- $X \subset E$ は独立集合である.
- X がサイクルを含まない.
- 辺集合 X から誘導されるグラフが forest である.

また, $M(\Gamma)$ の basis について以下は同値である:

- $T \subset E$ は basis である.
- 辺集合 T から誘導されるグラフが spanning tree である.

グラフィックマトロイド $M(\Gamma)$ の basis の母関数を $F_\Gamma = F_{M(\Gamma)}$ とおく．いま, Γ は単純であることを仮定しているので F_Γ に現れる単項式は square free である．

グラフ Γ に対し,

$$H_\Gamma = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} F_\Gamma \right)_{i,j \in E(\Gamma)}$$

と定義する．ただし $E(\Gamma)$ は Γ の辺集合とする．$H_\Gamma, \det H_\Gamma$ をそれぞれグラフ Γ のヘッセ行列, ヘシアンという．H_Γ の各変数に 1 を代入した行列を $\tilde{H}_\Gamma$ とする．

例 4.1. 4 頂点のサイクル Γ を考える．このとき,

$$\begin{aligned} F_\Gamma &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4, \\ H_\Gamma &= \begin{pmatrix} 0 & x_3+x_4 & x_2+x_4 & x_2+x_3 \\ x_3+x_4 & 0 & x_1+x_4 & x_1+x_3 \\ x_2+x_4 & x_1+x_4 & 0 & x_1+x_2 \\ x_2+x_3 & x_1+x_3 & x_1+x_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{H}_\Gamma &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり $\det \tilde{H}_\Gamma = -48, \det H_\Gamma \neq 0$ がわかる．

例 4.2. 5 頂点の tree Γ を考える．このとき,

$$\begin{aligned} F_\Gamma &= x_1x_2x_3x_4, \\ H_\Gamma &= \begin{pmatrix} 0 & x_3x_4 & x_2x_4 & x_2x_3 \\ x_3x_4 & 0 & x_1x_4 & x_1x_3 \\ x_2x_4 & x_1x_4 & 0 & x_1x_2 \\ x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{H}_\Gamma &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり $\det \tilde{H}_\Gamma = -3, \det H_\Gamma \neq 0$ がわかる．

グラフのヘシアンを完全グラフの場合に計算した．

定理 4.3 (主結果)**.** Γ が完全グラフのとき $\det H_\Gamma \neq 0$.

以下, Γ は n 頂点の完全グラフであるとする．これを証明するために, $\det \tilde{H}_\Gamma \neq 0$ であることを示す．$\tilde{H}_\Gamma$ の (i,j) 成分には辺 i, j を含む $T \in B_\Gamma$ の数が現れる．一般に k 辺を含む完全グラフの spanning tree の個数が Moon によって知られている [6]. よって以下がわかる．

補題 4.4. $\tilde{H}_\Gamma = (h_{ij})_{i,j\in E(\Gamma)}$ とすると

$$h_{ij} = \begin{cases} 0 & \textit{if } i = j, \\ 4n^{n-4} & \textit{if } i \cap j = \emptyset, \\ 3n^{n-4} & \textit{otherwise}. \end{cases}$$

$A = \frac{1}{n^{n-4}}\tilde{H}_\Gamma$ とおくと固有値とその重複度は次のようになっている．

補題 4.5. A の固有値は, -2, $-n$, $2n(n-2)$ である．重複度はそれぞれ $\binom{n}{2} - n$, $n-1$, 1 である．

この補題を使うと $\tilde{H}_\Gamma$ の行列式がわかる．

定理 4.6. $\tilde{H}_\Gamma$ の行列式は

$$(-1)^{\binom{n}{2}-1} 2^{\binom{n}{2}-(n-1)} n^{\binom{n}{2}(n-4)}(n-2)$$

である．よって $\tilde{H}_\Gamma$ は正則行列で, $\tilde{H}_\Gamma$ も正則行列.

頂点数が小さい場合の例は以下の通りである．

例 4.7. $n = 3$ のとき,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = 54.$$

$n = 4$ のとき,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = -4096.$$

$n = 5$ のとき,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 0 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 0 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = -1875000000.$$

最後に完全グラフから構成されるマトロイドに付随する環の強レフシェッツ性について考える．$n+1 \geq 3, N = \binom{n+1}{2}$ とする．K_{n+1} を $n+1$ 頂点の完全グラフとする．$A_{M(K_{n+1})}$ は

$$A_{M(K_{n+1})} = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_N]/\operatorname{Ann}(F_{K_{n+1}}) = \bigoplus_{k=0}^{n} A_k$$

と斉次分解される．定理 2.2, 4.6 より次がわかる．

定理 4.8. $L = x_1 + \ldots + x_N$ とする．このとき掛け算写像 $\times L^{n-1} : A_1 \to A_{n-1}$ は全単射である．

これより $n \leq 5$ に対し，$A_{M(K_n)}$ の強レフシェッツ性がわかる．

参考文献

[1] Norman Biggs, *Algebraic graph theory*, second ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1993. MR 1271140

[2] Tadahito Harima, Toshiaki Maeno, Hideaki Morita, Yasuhide Numata, Akihito Wachi, and Junzo Watanabe, *The Lefschetz properties*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2080, Springer, Heidelberg, 2013, URL `https://doi.org/10.1007/978-3-642-38206-2`. MR 3112920

[3] Toshiaki Maeno and Yasuhide Numata, *Sperner property, matroids and finite-dimensional Gorenstein algebras*, Tropical geometry and integrable systems, Contemp. Math., vol. 580, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, pp. 73–84, URL `https://doi.org/10.1090/conm/580/11496`. MR 2985388

[4] ———, *Sperner property and finite-dimensional Gorenstein algebras associated to matroids*, J. Commut. Algebra **8** (2016), no. 4, 549–570, URL `https://doi.org/10.1216/JCA-2016-8-4-549`. MR 3566530

[5] Toshiaki Maeno and Junzo Watanabe, *Lefschetz elements of Artinian Gorenstein algebras and Hessians of homogeneous polynomials*, Illinois J. Math. **53** (2009), no. 2, 591–603, URL `http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1266934795`. MR 2594646

[6] J. W. Moon, *Enumerating labelled trees*, Graph Theory and Theoretical Physics, Academic Press, London, 1967, pp. 261–272. MR 0231755

[7] James Oxley, *Matroid theory*, second ed., Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 21, Oxford University Press, Oxford, 2011, URL `https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198566946.001.0001`. MR 2849819

[8] Junzo Watanabe, *A remark on the Hessian of homogeneous polynomials*, The curves seminar at Queen's, vol. XIII, Queen's Papers in Pure and Appl. Math., vol. 119, Queen's Univ., Kingston, ON, 2000, pp. 171–178.

[9] Akiko Yazawa, *The Hessians of the complete and complete bipartite graphs and its application to the strong Lefschetz property*, arXiv:1812.07199, URL `https://arxiv.org/abs/1812.07199`.