反射的凸多面体とグレブナー基底

大阪大学・大学院情報科学研究科・情報基礎数学専攻
土谷昭善 (Akiyoshi Tsuchiya)

1　格子凸多面体の三角形分割とグレブナー基底

オイラーの公式，ピックの公式などにその源流を持つ凸多面体論は，組合せ論の伝統的な分野の一つである．全ての頂点が整数点（格子点）となっている**格子凸多面体**に焦点を当てると，組合せ論，可換環論，代数幾何，整数論，最適化問題，統計，そしてミラー対称性といった純粋数学や応用数学の様々な分野との間に美しい関係性が現れる．格子凸多面体の研究の中の一つのブレイクスルーは，1995 年の Bernd Strumfels による格子凸多面体の正則三角形分割と，付随するトーリックイデアルのグレブナー基底との関係の発見である．この章では，この関係について紹介する．

体 K 上の n 変数多項式環 $K[\mathbf{x}] = K[x_1, \dots, x_n]$ の単項式全体を $\mathcal{M}_n$ で表す．集合 $\mathcal{M}_n$ 上の全順序 $<$ が**単項式順序**であるとは，以下の 2 条件を満たす時をいう．

1. $1 \neq \forall u \in \mathcal{M}_n$ に対して，$1 < u$．つまり，全ての単項式の中で 1 は最小の多項式である．
2. $u, v, w \in \mathcal{M}_n, u < v \Rightarrow uw < vw$.

代表的な単項式順序として逆辞書式順序を紹介する．

例 1（逆辞書式順序）　単項式 $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ と $v = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ に対して，次の 2 条件のいずれかを満たす時，$u <_{\text{rev}} v$ と定義する．

1. $a_1 + \cdots + a_n < b_1 + \cdots + b_n$.
2. $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$ かつ $(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$ においてもっとも右にある 0 でない成分が負．

例えば，$x_1 x_2^2 x_3^2 <_{\text{rev}} x_2^4 x_3$ である．この $<_{\text{rev}}$ を**逆辞書式順序**と呼ぶ．この時，$x_n <_{\text{rev}} \cdots <_{\text{rev}} x_1$ が従う．実際はこのような変数の順番で逆辞書式順序は定義されるため，上の定義は，正確には $x_n <_{\text{rev}} \cdots <_{\text{rev}} x_1$ に関する逆辞書式順序というべきである．

単項式順序 $<$ を一つ固定する．多項式 $0 \neq f \in K[\mathbf{x}]$ に現れる単項式の中で $<$ に関して最大のものを $\text{in}_<(f)$ で表し，f の $<$ に関する**先頭単項式**と呼ぶ．イデアル $I \subset K[\mathbf{x}]$ に対して，

$$\text{in}_<(I) := (\text{in}_<(f) : 0 \neq f \in I) \subset K[\mathbf{x}]$$

を I の $<$ に関する**イニシャルイデアル**という．有限集合 $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_r\} \subset I$ が $<$ に関する I の**グレブナー基底**であるとは，$\text{in}_<(I) = (\text{in}_<(f_1), \dots, \text{in}_<(g_r))$ が成り立つ時をいう．一般にイデアル

I と単項式順序が与えられれば，そのグレブナー基底は必ず存在し，I を生成することが知られている．一方，$\mathcal{G}$ が I を生成していても，グレブナー基底になるとは限らない．

例 2　イデアル $I = (x_1x_2 - x_3x_4, x_1x_5 - x_6x_7) \subset K[x_1, \ldots, x_7]$ と逆辞書式順序 $<_{\text{rev}}$ に関して，$\{x_1x_2 - x_3x_4, x_1x_5 - x_6x_7\}$ は I のグレブナー基底ではない．実際，

$$x_5(x_1x_2 - x_3x_4) - x_2(x_1x_5 - x_6x_7) = x_3x_4x_5 - x_2x_6x_7 \in I$$

の先頭単項式 $x_3x_4x_5$ は (x_1x_2, x_1x_5) に属さない．実は，この 2 項式を加えた $\{x_1x_2 - x_3x_4, x_1x_5 - x_6x_7, x_3x_4x_5 - x_2x_6x_7\}$ は I のグレブナー基底となっている．

次に格子凸多面体に付随するトーリックイデアルを定義する．体 K 上のローラン多項式環 $K[\mathbf{t}^{\pm 1}, s] := K[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_d^{\pm 1}, s]$ を準備する．格子点 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$ に対し，ローラン単項式 $\mathbf{t}^{\mathbf{a}} := t_1^{a_1} \cdots t_d^{a_d} \in K[\mathbf{t}^{\pm 1}, s]$ を対応させる．$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元格子凸多面体とし，$\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ とする．この時, $\mathcal{P}$ の**トーリック環**とは, $K[\mathbf{t}^{\pm 1}, s]$ の部分環 $K[\mathcal{P}] := K[\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}s, \ldots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}s]$ のことをいう．今，全射準同型 $\pi : K[\mathbf{x}] \to K[\mathcal{P}]$ を $\pi(x_i) = \mathbf{t}^{\mathbf{a}_i}s (1 \leq i \leq n)$ で定義し，その核 $I_{\mathcal{P}} := \ker \pi \subset K[\mathbf{x}]$ を $\mathcal{P}$ の**トーリックイデアル**という．トーリックイデアルは素イデアルであり，二項式で生成されることが知られている．

格子単体の集合 Δ が $\mathcal{P}$ の**三角形分割**であるとは，次の 3 条件を満たす時をいう．

1. $\mathcal{P} = \bigcup_{\mathcal{F} \in \Delta} \mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}'$ が $\mathcal{F} \in \Delta$ の面ならば，$\mathcal{F}' \in \Delta$.
3. $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \Delta$ ならば，$\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ は $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ のそれぞれの面となっている．

今，単項式順序 $<$ を一つ固定する．この時，

$$\Delta(\text{in}_<(I_{\mathcal{P}})) := \left\{ \text{Conv}(A) : A \subset \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d, \prod_{\mathbf{a}_i \in A} x_i \notin \sqrt{\text{in}_<(I_{\mathcal{P}})} \right\}$$

を $\mathcal{P}$ の $<$ に関する**イニシャル複体**という．

命題 3　イニシャル複体 $\Delta(\text{in}_<(I_{\mathcal{P}}))$ は $\mathcal{P}$ の (正則) 三角形分割である．

正則三角形分割は元々は幾何的な定義であるが，イニシャル複体によって得られる三角形分割と考えてもらって良い．三角形分割 Δ が **unimodular** であるとは，Δ の全ての極大単体の体積が $1/d!$ となる時をいう．unimodular な三角形分割の存在は，$\mathcal{P}$ にいい性質をもたらす．$\mathcal{P}$ が unimodular な正則三角形分割を持つかどうかはトーリックイデアルを調べることで判定できる．

命題 4　条件 $\mathbb{Z}((\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d) \times \{1\}) = \mathbb{Z}^{d+1}$ を仮定する．この時，$\mathcal{P}$ が unimodular な正則三角形分割を持つ必要十分条件は，ある単項式順序 $<$ が存在して，$\sqrt{\text{in}_<(I_{\mathcal{P}})} = \text{in}_<(I_{\mathcal{P}})$ が成り立つことである．つまり，すべての先頭単項式が squarefree(2 以上の指数が現れない) なグレブナー基底をもつことである．このようなグレブナー基底を **squarefree グレブナー基底**と呼ぶ．

squarefree グレブナー基底持つかどうかは，計算可換代数において重要な問題である．一方，グレブナー基底が二次の斉次二項式からなるものを見つけることも重要である．このようなグレブナー基

底を**二次グレブナー基底**と呼ぶ．イデアルが二次グレブナー基底を持てば，その剰余環は Koszul となることが知られている．格子多面体の文脈でも，二次グレブナー基底は重要な役割を担う．部分集合 $A \subset \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$ が $\mathcal{P}$ の三角形分割 T の **non-face** であるとは，$\mathrm{Conv}(A) \notin T$ の時をいう．三角形分割が **flag** であるとは，全ての極小 non-face が 2 点からなる時をいう．格子凸多面体が flag な正則三角形分割を持つかどうかは，二次グレブナー基底を持つかどうかに他ならない．つまり，

命題 5　$\mathcal{P}$ が flag な正則三角形分割を持つ必要十分条件は，$I_{\mathcal{P}}$ がある単項式順序に対して，二次グレブナー基底を持つことである．

このような格子凸多面体の三角形分割とグレブナー基底の関係の出現により，格子凸多面体の研究は大きな発展を遂げた．グレブナー基底，トーリックイデアル，そしてその格子凸多面体への応用の詳細は [4, 17] を参照していただきたい．

2　反射的凸多面体とグレブナー基底

格子凸多面体の研究におけるグレブナー基底の応用として，反射的凸多面体の豊富な類の構成がある．まず，反射的凸多面体とは何かを見る．

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元格子凸多面体とする．$\mathbb{R}^d$ の原点が $\mathcal{P}$ の内部にある時，集合

$$\mathcal{P}^\vee := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq 1 \text{ for all } \mathbf{x} \in \mathcal{P}\}$$

は凸多面体となる．ここで, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ は $\mathbb{R}^d$ の通常の内積である．この多面体を $\mathcal{P}$ の**双対凸多面体**と呼ぶ．一般に，$\mathcal{P}^\vee$ は格子凸多面体になるとは限らない．例えば，線分 $[-2, 2]$ の双対凸多面体は $[-1/2, 1/2]$ である．格子凸多面体が**反射的**であるとは，$\mathbb{R}^d$ の原点がその内部にあり，さらにその双対凸多面体が格子凸多面体となる時をいう．例えば，線分 $[-1, 1]$ は反射的凸多面体である．この反射的凸多面体は特に代数幾何において重要な性質を持っている．実際，反射的凸多面体は代数幾何における Gorenstein toric Fano variety と 1 対 1 に対応しており，その様々な代数幾何的情報を反射的凸多面体の組合せ論的情報から得ることができる (詳しくは [12] を参照).

反射的凸多面体の特筆すべき性質として，ある種の有限性が知られている．二つの d 次元格子凸多面体 $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^d$ に対して, $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ が **unimodular 同値**であるとは，unimodular 行列 $U \in \mathbb{Z}^{d \times d}$, つまり $\det(U) = \pm 1$，と格子点 $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^d$ が存在して，U により定義される線形写像 $f_U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を用いて $\mathcal{Q} = f_U(\mathcal{P}) + \mathbf{w}$ となるときにいう．ここで $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ に対し，$f_U(\mathbf{v}) = \mathbf{v}U$ と定める．この変換において，格子凸多面体（および対応するトーリック多様体）のほとんど全ての情報は保存される．一般に，格子凸多面体の研究において，unimodular 同値な多面体は同じ多面体と考える．今，次元 d を固定する．反射的凸多面体はその定義から，内部に原点を除いて格子点が存在しない，つまりちょうど 1 個の格子点を内部に含むことが従う．この性質と [10] の結果から，d 次元反射的凸多面体は unimodular 同値なものを除いて，高々有限個しか存在しないことが導かれる．さらに低次元の反射的凸多面体の分類が行われている．実際，1 次元は 1 個，2 次元は 16 個の反射的凸多面体が存在することが理論的に証明されており，分類アルゴリズムの開発により，計算機を使って，3 次元で 4319 個，4 次元では 473800776 個もの反射的凸多面体が存在することが知られている．しかし，その量の多さから，5 次元以上の高次元の反射的凸多面体の分類はほぼ不可能である．よって，高次元

の，特に，ある”良い”性質を持った反射的凸多面体の豊富な類の構成は重要な問題の一つである．この問題の一つの方針が，グレブナー基底を用いた反射的凸多面体の構成である．実際，三角形分割の観点から次の結果が従う．

命題 6 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を内部に原点を含む d 次元格子凸多面体とする．もし $\mathcal{P}$ が unimodular な三角形分割で，そのすべての極大単体が原点を含むものを持てば，$\mathcal{P}$ は反射的凸多面体である．

この命題をグレブナー基底の観点から考えると，次のような”使いやすい”結果が得られる．

命題 7 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を内部に原点を含む d 次元格子凸多面体で，条件 $\mathbb{Z}((\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d) \times \{1\}) = \mathbb{Z}^{d+1}$ を満たすものとし，x_n を原点に対応する $K[\mathbf{x}]$ の変数とする．もし $I_{\mathcal{P}}$ の逆辞書式順序 $<_{\mathrm{rev}}$ に関する squarefree グレブナー基底が存在すれば，$\mathcal{P}$ は反射的凸多面体である．特に $\mathcal{P}$ は unimodular な正則三角形分割を持つ．

これらの命題を使って，様々な高次元の unimodular な正則三角形分割を持つ反射的凸多面体の豊富な類が構成されている (例えば [7, 8])．一方，この手法は反射的凸多面体が unimodular な正則三角形分割を持つ時にしか使えない．そこで，[11] では，行列等の線形代数のテクニックを使い，高次元の反射的凸多面体の豊富な類の構成に成功している．

unimodular な正則三角形分割を持つ反射的凸多面体は，数え上げ数学において，非常に良い性質を持つ．次の章ではその性質について紹介する．

3 格子凸多面体の δ 多項式とその unimodal 性

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元格子凸多面体とする．この時，$\delta(\mathcal{P}, t)$ を次の公式で定義する．

$$\delta(\mathcal{P}, t) := (1-t)^{d+1} \left[1 + \sum_{k \geq 1} |k\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d| t^k \right].$$

ここで $k\mathcal{P} := \{k\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathcal{P}\}$ である．この時，$\delta(\mathcal{P}, t)$ は t に関する，高々 d 次の多項式になることが知られており，$\delta(\mathcal{P}, t) = \delta_0 + \delta_1 t + \cdots + \delta_d t^d$ は $\mathcal{P}$ の **δ 多項式**と呼ばれている．δ 多項式について以下のことが知られている．

- $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = |\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d| - (d+1)$, $\delta_d = |(\mathcal{P} \setminus \partial\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d|$.
- $\delta_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
- $\delta(\mathcal{P}, 1) = \delta_0 + \cdots + \delta_d$ は $\mathcal{P}$ の正規化体積，つまり (通常の体積) $\times d!$ に一致する．

上記のように δ 多項式は格子凸多面体の様々な情報を持っており，その性質の研究は非常に重要である．δ 多項式に関する標準的な教科書として [1] をあげておく．

今，$f = \sum_{i=0}^{d} a_i t^i$ を d 次の非負実係数多項式とする．この時，

- f が **real-rooted** であるとは，f の全ての根が実数の時をいう．
- f が **lon-concave** であるとは，$a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ が全ての i に対して成り立つ時をいう．
- f が **unimodal** であるとは，ある k に対して，$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \geq \cdots \geq a_d$ が成り立つ時

をいう．

一方，f が**回帰的**であるとは，$a_i = a_{d-i}$ が全ての i に対して成り立つ時をいう．さらに回帰的な f が **γ-positive** であるとは，ある $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{\lfloor d/2 \rfloor} \geq 0$ が存在して，$f = \sum_{i \geq 0} \gamma_i t^i (1+t)^{d-2i}$ が成り立つ時をいう．また $\sum_{i \geq 0} \gamma_i t^i$ を f の **γ 多項式**と呼ぶ． この時，f が real-rooted であることと，その γ 多項式が real-rooted であることは同値である．f に関する上記の性質はそれぞれ関係があり，実際 f が回帰的であれば，次の図式が成立する:

$$
\begin{tikzcd}
& \text{log-concave} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{real-rooted} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{unimodal} \\
& \gamma\text{-positive} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

δ 多項式がいつ上記のような性質を持つかを調べることは，格子凸多面体の研究において重要な研究の一つである．

一方，反射的凸多面体は δ 多項式によって特徴付けることができる．実際，$\mathcal{P}$ が反射的凸多面体（に unimodular 同値）であることと，その δ 多項式が d 次かつ回帰的であることは同値である ([5])．反射的凸多面体の δ 多項式がいつ unimodal となるかという研究は，格子凸多面体の研究における流行の一つとなっている．

反射的凸多面体の δ 多項式の unimodal 性についての強力な結果が知られている．

定理 8（[2, Bruns-Römer]） 反射的凸多面体が unimodular な正則三角形分割を持てば，その δ 多項式は unimodal である．

この結果により，いつ反射的凸多面体が unimodular な正則三角形分割を持つか，また unimodular な正則三角形分割を持つ反射的凸多面体を構成する研究が盛んに行われている．しかし，δ 多項式に対し，unimodal 性より強い性質についての研究は多くない．δ 多項式のような数え上げに関する多項式の real-rooted 性について以下のような予想があった．

予想 9（Real Root 予想） flag generalized homology shpere の h 多項式は real-rooted である．

詳しい定義は述べないが，flag generalized homology sphere とはある代数的および幾何的性質を持った単体的複体であり，その h 多項式はその面の数え上げに関する多項式，実際は付随する Stanley-Risner 環の h 多項式のことである．また generalized homology sphere は **Gorenstein*** 複体とも呼ばれている．しかし，Real Root 予想は Ś. Gal により反例が与えられた．一方，その反例を与える過程で，次の予想が提唱された [3]．

予想 10（Gal 予想） flag generalized homology shpere の h 多項式は γ-positive である．

一方，反射的凸多面体の δ 多項式と flag generalized homology sphere の h 多項式には次のような関係がある．

命題 11 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元の反射的凸多面体とする．もし $\mathcal{P}$ が unimodular かつ flag な正則三角形分割で，その全ての極大単体が原点を含むものを持てば，$\mathcal{P}$ の δ 多項式は，ある flag generalized homology sphere の h 多項式と一致する．

したがって，命題 7 の条件を「squarefree 二次グレブナー基底」に変えると，上の命題の条件を満たすことになる．本稿では，unimodular な正則三角形分割を持つ反射的凸多面体の新しい豊富な類を与え，上の二つの予想について議論する．

4 二部グラフに付随する反射的凸多面体

格子凸多面体の構成を考える時，他の組合せ論的対象，例えばグラフなどから構成することが多々ある．そうやって構成した多面体の情報は，元となった組合せ論的対象の情報から得られることが多い．一つ，そのようにしてできた多面体の類を紹介する．G を $[d] := \{1, \ldots, d\}$ 上の有限単純グラフ，つまりループや多重辺がない無向グラフとし，$E(G)$ をその辺集合とする．今，$\mathcal{P}_G$ を集合

$$\{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j : \{i, j\} \in E(G)\}$$

の凸閉包と定義する．ここで $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ は $\mathbb{R}^d$ の標準基底である．この多面体を G の**辺凸多面体**と呼ぶ．この辺凸多面体は付随するトーリック環についての研究が盛んに行われており，様々な貴重な例を可換環論および格子凸多面体の理論に与えている (例えば [6, 13, 14, 15])．特に [14] では，unimodular な非正則三角形分割を持つが，unimodular な正則三角形分割を持たない格子凸多面体という驚くべき例の発見につながっている．

本稿では，この辺凸多面体と関連させて，以下の凸多面体を考える．今，$\mathcal{B}_G$ を集合

$$\{\pm\mathbf{e}_1, \ldots, \pm\mathbf{e}_d\} \cup \{\pm\mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j : \{i, j\} \in E(G)\}$$

の凸閉包と定義する．この時，$\mathcal{B}_G$ は d 次元格子凸多面体であり，原点をその内部に含み，さらに辺凸多面体 $\mathcal{P}_G$ をその極大面に持つ．この関係から，$\mathcal{B}_G$ は $\mathcal{P}_G$ の性質に大きく影響されており，実際，様々な代数的性質は $\mathcal{P}_G$ と同じものを持つ．特に，$I_{\mathcal{B}_G}$ のグレブナー基底は $I_{\mathcal{P}_G}$ のグレブナー基底から構成することが可能である．命題 7 の条件を満たすグレブナー基底の存在を考えることで，以下の結果が証明できる．

定理 12（[16]） G を有限単純グラフとする．この時，次は同値である．

- $\mathcal{B}_G$ は反射的凸多面体である．
- $\mathcal{B}_G$ は unimodular な正則三角形分割を持つ反射的凸多面体である．
- G は二部グラフである．

さらに G が二部グラフの時，次は同値である．

- $\mathcal{B}_G$ は flag かつ unimodular な正則三角形分割を持つ．
- G の長さ 6 以上のサイクルは弦を持つ，つまり弦二部グラフである．

特にこの時，$\mathcal{B}_G$ の δ 多項式は，ある flag generalized homology sphere の h 多項式と一致する．

G が二部グラフの時の $I_{\mathcal{B}_G}$ のグレブナー基底の形はここでは記載しない．興味のある方は [16] を参照してほしい．この結果から，$\mathcal{B}_G$ が反射的であれば，unimodular な正則三角形分割を持つ．よってその δ 多項式は回帰的かつ unimodal である．最後の章では，この δ 多項式の real-rooted 性と γ-positive 性について議論する．

5 $\delta(\mathcal{B}_G, t)$ の γ-positive 性と内部多項式

Hypergraph $\mathcal{H} = (V, E)$ は，頂点集合 $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ と hyperedge の集合 $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ からなるものである．この時，hypergraph $\mathcal{H}$ を二部グラフ Bip$\mathcal{H}$ に対応させることができる．ここで，Bip$\mathcal{H}$ は頂点分割 $V \cup E$ で，もし $v_i \in e_j$ なら $\{v_i, e_j\}$ が辺となる二部グラフである．今，Bip$\mathcal{H}$ は連結であると仮定する．$\mathcal{H}$ の **hypertree** は関数 $\mathbf{f} : E \to \{0, 1, \ldots\}$ で，Bip$\mathcal{H}$ の spanning tree Γ が存在して，各 hyperedge $e \in E$ に対応する頂点の Γ における次数が $\mathbf{f}(e) + 1$ となるもののことである．$B_{\mathcal{H}}$ を $\mathcal{H}$ のすべての hypertree の集合とする．Hyperedge $e_j \in E$ が hypertree $\mathbf{f} \in B_{\mathcal{H}}$ に関して，**internally active** であるとは，$\mathbf{f}' \in B_{\mathcal{H}}$ と，ある整数 $j' < j$ で

$$\mathbf{f}'(e_i) = \begin{cases} \mathbf{f}(e_i) - 1, & (i = j), \\ \mathbf{f}(e_i) + 1, & (i = j'), \\ \mathbf{f}(e_i), & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

となるものが存在しない時をいう．Hyperedge が internally active でない時，**internally inactive** であると呼び，$\bar{\iota}(\mathbf{f})$ を hypertree $\mathbf{f} \in B_{\mathcal{H}}$ に関して internally inactive な hyperedge の個数とする．この時，$\mathcal{H}$ の**内部多項式**とは，

$$I_{\mathcal{H}}(t) = \sum_{\mathbf{f} \in B_{\mathcal{H}}} t^{\bar{\iota}(\mathbf{f})}$$

のことをいう．もし $G = \mathrm{Bip}\mathcal{H}$ であれば，$I_G(t) = I_{\mathcal{H}}(t)$ と表記する．内部多項式は [9] において，Kálmán によって導入された．もし $\mathcal{H}$ がグラフで $T(x, y)$ をその Tutte 多項式とすれば，内部多項式は $t^{|V|-1}T(1/t, 1)$ に一致する．内部多項式は Tutte 多項式の hypergraph への一般化として考えられた．

この内部多項式を用いることで，G が二部グラフの時，$\mathcal{B}_G$ の δ 多項式の公式を与えることができる．特にその公式より，$\delta(\mathcal{B}_G, t)$ は γ-positive であることが従う．G を頂点分割を $V_1 \cup V_2 = [d]$ とする二部グラフとする．この時，$\widehat{G}$ を辺集合を

$$E(\widehat{G}) = E(G) \cup \{\{i, d+1\} : i \in V_1\} \cup \{\{j, d+2\} : j \in V_2 \cup \{d+1\}\}$$

とする $[d+2]$ 上の連結二部グラフと定義する．

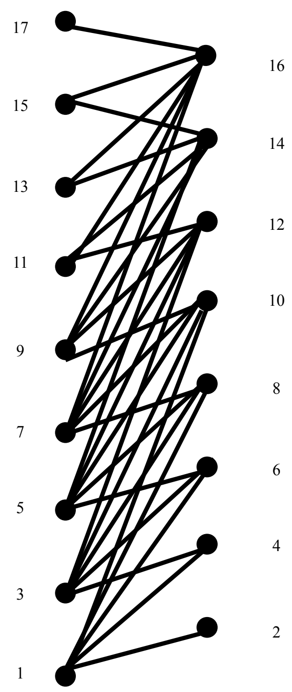
定理 13（[16]） G を $[d]$ 上の二部グラフとする．この時，

$$\delta(\mathcal{B}_G, t) = (t+1)^d I_{\widehat{G}}\left(\frac{4t}{(t+1)^2}\right)$$

となる．特に $\delta(\mathcal{B}_G, t)$ は γ-positive である．また $\delta(\mathcal{B}_G, t)$ が real-rooted になる必要十分条件は $I_{\widehat{G}}(t)$ が real-rooted になることである．

上の結果より，$\mathcal{B}_G$ は反射的凸多面体であれば，その δ 多項式は常に γ-positive となることがわかった．しかし，real-rooted になるとは限らない．最後にその例について紹介する．

例 14　G を次の二部グラフとする．



この時，$\widehat{G}$ の内部多項式は

$$I_{\widehat{G}}(t) = 3t^8 + 86t^7 + 658t^6 + 1946t^5 + 2534t^4 + 1420t^3 + 336t^2 + 32t + 1$$

となる．一方，$I_{\widehat{G}}(t)$ は $-1.85884 \pm 0.149768i$ をその根にもつ（ただしこれは近似した値）．よって，$I_{\widehat{G}}(t)$ は real-rooted ではない．したがって，定理 13 より，$\delta(\mathcal{B}_G, t)$ も real-rooted ではない．実際，$\mathcal{B}_G$ の δ 多項式は

$$\begin{aligned}
\delta(\mathcal{B}_G, t) &= (t+1)^{17} I_{\widehat{G}}\left(\frac{4t}{(t+1)^2}\right) \\
&= t^{17} + 145t^{16} + 7432t^{15} + 174888t^{14} + 2128332t^{13} + 14547884t^{12} + 59233240t^{11} \\
&\quad + 148792184t^{10} + 234916470t^9 + 234916470t^8 + 148792184t^7 + 59233240t^6 \\
&\quad + 14547884t^5 + 2128332t^4 + 174888t^3 + 7432t^2 + 145t + 1
\end{aligned}$$

であり，$-3.88091 \pm 0.18448i$ と $-0.257091 \pm 0.0122209i$ をその根に持つ（ただしこれは近似した値）．また，この二部グラフ G は弦二部グラフとなっている．よって，この例は Real Root 予想の反例にもなっている．

参考文献

[1] M. Beck and S. Robins. "Computing the continuous discretely: Integer-point enumeration in polyhedra," Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2007.

[2] W. Bruns and T. Römer, h-Vectors of Gorenstein polytopes, *J. Combin. Theory Ser. A* **114** (2007), 65–76.

[3] S. R. Gal, Real Root Conjecture fails for five and higher dimensional spheres, *Discrete Comput. Geom.*, **34** (2005), 269–284.

[4] T. Hibi, Ed., "Gröbner Bases: Statistics and Software Systems," Springer, 2013.

[5] T. Hibi, Dual polytopes of rational convex polytopes, *Combinatorica* **12** (1992), 237–240.

[6] T. Hibi, K. Matsuda and A. Tsuchiya, Edge rings with 3-linear resolutions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[7] T. Hibi and A. Tsuchiya, Facets and volume of Gorenstein Fano polytopes, *Math. Nachr.*, **290** (2017), 2619–2628.

[8] T. Hibi and A. Tsuchiya, Reflexive polytopes arising from perfect graphs, *J. Combin. Theory Ser. A*, **157** (2018), 233–246.

[9] T. Kálmán, A version of Tutte's polynomial for hypergraphs, *Adv. Math.* **244** (2013), 823–873.

[10] J. C. Lagarias and G. M. Ziegler, Bounds for lattice polytopes containing a fixed number of interior points in a sublattice, *Canad. J. Math.* **43** (1991), 1022–1035.

[11] T. Nagaoka and A. Tsuchiya, Reflexive polytopes arising from edge polytopes, *Linear Algebra Appl.*, **557** (2018), 438–454.

[12] B. Nill, Gorenstein toric Fano varieties, *Manuscripta Math.* **116** (2005), 183–210.

[13] H. Ohsugi and T. Hibi, Normal polytopes arising from finite graphs, *J. Algebra* **207** (1998), 409–426.

[14] H. Ohsugi and T. Hibi, A normal $(0,1)$-polytope none of whose regular triangulations is unimodular, *Disc. Comput. Geom.* **21** (1999), 201–204.

[15] H. Ohsugi and T. Hibi, Koszul bipartite graphs, *Adv. Applied Math.* **22** (1999), 25–28.

[16] H. Ohsugi and A. Tsuchiya, Reflexive polytopes arising from bipartite graphs with γ-positivity associated to interior polynomials, arXiv:1810.12258.

[17] B. Sturmfels, "Gröbner bases and convex polytopes," Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.