Pfaffian Systems of Confluent Hypergeometric Functions of Two Variables

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
向井重雄 (Shigeo MUKAI)

概 要

We study Pfaffian systems of confluent hypergeometric functions of two variables with rank 3, by using rational twisted cohomology groups associated with Euler type integral representations of them. We give bases of the cohomology groups, whose intersection matrices depend only on parameters. Each connection matrix of our Pfaffian systems admits a decomposition into five parts, each of which is the product of a constant matrix and a rational 1-form on the space of variables.

1 導入

1 変数の合流型超幾何関数として、クンマー型、ベッセル型、エルミート型、エアリー型があり、2 変数においても Humbert の Φ_1,Φ_2,Φ_3 を始め、多くの種類が知られています。Gelfand らにより一般超幾何関数の考え方が提唱され、我が国でも木村弘信らにより合流型超幾何関数の統一的取扱い法が開発されて来ました。我々も統一的取扱いの方法にのっとり $GL(n,\mathbb{C})$ の極大可換部分群上の普遍被覆を用いて考えます。複素パラメータを β と置き、λ を n の分割数とします。分割された数は極の重複度を意味します。

本研究においては、ねじれコホモロジー群 $H^1(\Omega^\bullet(x),\nabla_\omega)$ を用いて合流型超幾何関数の満たす微分方程式を考察します。非合流型である Appell の超幾何関数 F_1 では、ねじれコホモロジー群を用いて交点数を求め、交点数の勾配から Pfaffian 方程式にまとめられることが知られています。その場合に交点数は、パラメータだけに依存して変数を含まないことが分かっています。本論の主定理は、有理 1 形式 $\phi_{i;k}=d_t(\theta_i(h^{(k)}))$ を与え、合流型超幾何関数における 1 形式の交点数の公式を導き出した所にあります。そこで、1 形式の交点数はパラメータだけを含み変数が含まれない形にできることも分かりました。本公式を用いて、1 変数についてはランク 2 の、2 変数についてはランク 3 の Pfaffian 方程式系のフレームを作りました。そこで接続行列 W を求めると次のことが分かりました。

(1) 1 変数の場合 $W=d(f_1)W_1+d(f_2)W_2$, 2 変数の場合 $W=\sum_{i=1}^{5}d(f_i)W_i$ に分けられる。ここで d は変数による外微分作用素。

(2) $d(f_i)$ は、変数の有理関数。

(3) W_i は、パラメータだけの行列。

交点数を C と置き、Pfaffian の接続行列を W と書くと、交点数 C が変数を含まないことから、次の関係があることが分かります。

$$W\,C-C\,{}^tW=O$$

例として、非合流型である Appell の F_1 から合流型である Humbert の Φ_1 への交点数 C や接続行列 W の移り変わりを確かめました。クンマーに倣って一定の条件を置き、$\varepsilon \to 0$ の極限を取ると、それらは収束し Humbert の Φ_1 の式や解に一致することを確かめました。Pfaffian 方程式系を追跡すると、接続行列の 2 部分の関数部の極限 $\lim_{\varepsilon\to 0} d(f_i) = \lim_{\varepsilon\to 0} d(f_j)$ が一致し、行列同士の混合 $W_i + W_j \to W_i' + W_j'$ が起こることも見つけました。

2 コホモロジー群の同型定理

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ を自然数とし、$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m,\ n = \sum_{i=1}^m \lambda_i \geq 3,\ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$ と置き、λ を n の分割数と呼びます。$x_1(=\infty), x_2(=0), x_3, \dots, x_m$ を $\mathbb{P}$ 上の異なる m 個の点とします。空間 $X = \mathbb{P} \setminus x,\ x = \{x_1, \dots, x_m\},$ 上で定義された被積分関数

$$\begin{aligned} u_\lambda &= \exp\Big\{-\frac{\alpha_{1;2}}{s} - \cdots - \frac{\alpha_{1;\lambda_1}}{(\lambda_1 - 1)s^{\lambda_1 - 1}}\Big\} \\ &\times \prod_{i=1}^m (t - x_i)^{\alpha_{i;1}} \exp\Big\{-\frac{\alpha_{i;2}}{(t - x_i)} - \cdots - \frac{\alpha_{i;\lambda_i}}{(\lambda_i - 1)(t - x_i)^{\lambda_i - 1}}\Big\} \end{aligned} \tag{1}$$

と 1 形式 φ(t の有理形形式) との積

$$F = \int_\gamma u_\lambda \varphi$$

を超幾何関数と考えます、ただし積分路は固定します。(1) 式において、$s = 1/t$ は積分変数の逆数とし、係数 $\alpha_{i;k} \in \mathbb{C}$ は条件 $\alpha_{i;\lambda_i} \neq 0$ と留数定理 $\sum_{i=1}^m \alpha_{i;1} = 0$ を満たすものとし、$\lambda_i = 1$ の時は $\alpha_{i;1} \notin \mathbb{Z}$ の非整数条件を満たすものとします。ここで対数微分 1 形式を $\omega := d_t(log(u_\lambda))$ で定義します。ただし d_t は変数 t による外微分作用素とします。1 形式上のねじれ外微分作用素を $\nabla_\omega := d_t + \omega\wedge$ で定義し、X 上の有理 k 形式を $\Omega^k(x)$, x 付近で急減少する k 形式を $S^k(x)$ とすると次の複体が定義できます:

$$\begin{aligned} (\Omega^\bullet(x), \nabla_\omega) &: \ \Omega^0(x) \xrightarrow{\nabla_\omega} \Omega^1(x) \xrightarrow{\nabla_\omega} 0 \to 0, \\ (S^\bullet(x), \nabla_\omega) &: \ S^0(x) \xrightarrow{\nabla_\omega} S^1(x) \xrightarrow{\nabla_\omega} S^2(x) \xrightarrow{\nabla_\omega} 0. \end{aligned}$$

ここで $H^k(\Omega^\bullet(x), \nabla_\omega)$ を有理 k 形式のコホモロジー群、$H^k(S^\bullet(x), \nabla_\omega)$ を急減少の k 形式コホモロジー群とすると、次の補題が知られています。

補題 1. (真島 [1]) $H^k(\Omega^\bullet(x), \nabla_\omega) \simeq H^k(S^\bullet(x), \nabla_\omega)$ は同型であり、$k \neq 1$ ならば $H^k(\Omega^\bullet(x), \nabla_\omega)$ と $H^k(S^\bullet(x), \nabla_\omega)$ は消える。$H^1(\Omega^\bullet(x), \nabla_\omega)$ の次元は $n - 2$ であり、これは微分方程式系のランクと一致する。

この補題を用いて、$\psi^+ \in H^1(\Omega^\bullet, \nabla_\omega)$ と $\psi^- \in H^1(\Omega^\bullet, \nabla_{-\omega})$ の交点数 $\langle \psi^+, \psi^- \rangle_\omega$ を

$$\langle \psi^+, \psi^- \rangle_\omega = \int_{\mathbb{P}} \imath_\omega(\psi^+) \wedge (\psi^-) \tag{2}$$

で定義します、ただし $\imath_\omega$ は、$H^1(\Omega^\bullet(x), \nabla_\omega)$ から $H^1(S^\bullet(x), \nabla_\omega)$ への同型写像とします。ψ^- 側は ψ^+ 側と逆にねじれているものとします。このねじれによって「何が変数であって、何がパラメータであるか」という問題に対して明確に答える必要ができました。

3 交点形式

ここで1形式 φ が、x_i の近傍 U_i 内で $\varphi = \sum_{k=1}^{\lambda_i} \frac{c_{i;k}dt}{(t-x_i)^k} + \sum_{j=0}^{\infty} d_{i;j}(t-x_i)^j dt$ と表されているものとします、ただし $x_i = \infty$ の場合は s と t の役割を入れ替えるものとします。U_i 内で $\varphi \approx \nabla_\omega f_i$ (漸近的一致) となるような正則な関数 $f_i = \sum_{k=1}^{\lambda_i} b_{i;k}(t-x_i)^{k-1}$ を求めるためには、(1) 式を参照して行列 A_i を

$$A_i := \begin{bmatrix} \alpha_{i;\lambda_i} & \alpha_{i;\lambda_i-1} & \cdots & \alpha_{i;2} & \alpha_{i;1} \\ & \alpha_{i;\lambda_i} & \cdots & \alpha_{i;3} & \alpha_{i;2} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \mathbf{0} & & \alpha_{i;\lambda_i} & \alpha_{i,\lambda_i-1} \\ & & & & \alpha_{i,\lambda_i} \end{bmatrix} \tag{3}$$

で定義すると、$[b_{i;1} \cdots b_{i;\lambda_i}]A_i = [c_{i;\lambda_i} \cdots c_{i;1}]$ の関係があることが分かります。これは交点数が行列 A_i によって表現されていることを意味します。そこで (木村 [2]) の論文を引用して、(1) 式を次のように書き換えます。

$$\begin{aligned} u_\lambda &= \exp\Big\{\sum_{k=1}^{\lambda_1-1} \beta_{1;k}\theta_k(s, y_{1;1}, \ldots, y_{1;k})\Big\} \\ &\times \prod_{i=1}^{m} (t-x_i)^{\beta_{i;0}} \exp\Big\{\sum_{k=1}^{\lambda_i-1} \beta_{i;k}\theta_k(t-x_i, y_{i;1}, \ldots, y_{i;k})\Big\} \end{aligned} \tag{4}$$

ここで関数 θ_i は、次の母関数から定義されます。

$$\log(z_0 + z_1T + z_2T^2 + \cdots) = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j(z_0, \ldots, z_j)T^j$$

ここで行列 B_i を次で定義すると、

$$B_i := \begin{bmatrix} \beta_{i;\lambda_i-1} & \beta_{i;\lambda_i-2} & \cdots & \beta_{i;1} & \beta_{i;0} \\ & \beta_{i;\lambda_i-1} & \cdots & \beta_{i;2} & \beta_{i;1} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \mathbf{0} & & \beta_{i;\lambda_i-1} & \beta_{i,\lambda_i-2} \\ & & & & \beta_{i,\lambda_i-1} \end{bmatrix} \tag{5}$$

(3) 式と (5) 式の間に明確な関係 $A_i = {}^R\!V B_i V$ があり、B_i はパラメータだけで書き表され、${}^R\!V$ と V は変数だけで表現されます。また (5) 式を用いて1形式の交点数の計算を行うと、それはパラメータ β だけに依存し、変数 x, y を含みません。

4 主定理

ここで関数 p_k を、次の母関数から定義します。

$$\frac{z_0}{z_0 + z_1T + z_2T^2 + \cdots} = \sum_{j=0}^{\infty} p_k(z_0, \ldots, z_k)T^k$$

次の結果が得られました。

定理 1. 有理 1 形式 $\phi_{i;k} = p_k(t - x_i, y_{i;1}, \dots, y_{i;k})\frac{dt}{t-x_i}$ と $\phi_{j;l} = p_l(t - x_j, y_{j;1}, \dots, y_{j;l})\frac{dt}{t-x_j}$ の交点数は、

$$\langle \phi^+_{i;k}, \phi^-_{j;l} \rangle_\omega = 2\pi\sqrt{-1}(\delta_{ij}\frac{\psi^{(i)}_{k+l+1-\lambda_i}}{\beta_{i;\lambda_i-1}} - \epsilon_{ijl}\frac{\psi^{(i)}_{k+1-\lambda_i}}{\beta_{i;\lambda_i-1}} - \epsilon_{jik}\frac{\psi^{(j)}_{l+1-\lambda_j}}{\beta_{j;\lambda_j-1}} + \delta_{ijkl}\frac{\psi^{(i')}_{1-\lambda_{i'}}}{\beta_{i';\lambda_{i'}-1}}) \tag{6}$$

となります。ここで δ_{ij} はクロネッカー記号であり、ϵ_{ijl} は次で定義されます:

$$\epsilon_{ijl} = \begin{cases} 1, & (i = 1, j \neq 1, l = 0) \\ 1, & (i = 2, j = 1, l = 0) \\ 0, & (otherwise) \end{cases}$$

$i' := 3 - i$ で定義し、δ_{ijkl} は

$$\delta_{ijkl} = \begin{cases} 1, & (i = j = 1, k = l = 0) \\ 1, & (i = j = 2, k = l = 0) \\ 0, & (otherwise) \end{cases}$$

を意味するものとします。関数 $\psi^{(i)}_k$ は

$$\begin{aligned} \psi^{(i)}_0(\beta) &:= 1, \\ \psi^{(i)}_k(\beta) &:= p_k(\beta_{i;\lambda_i-1}, \beta_{i;\lambda_i-2}, \dots, \beta_{i;\lambda_i-k-1}) \end{aligned}$$

を表すものとします。

5 Pfaffian 方程式系

次の系に対して、Pfaffian 方程式の元となる、Gauss-Manin 接続を求めました。

Function name	λ	Normal form of z	Normal form of β
Gauss's ${}_2F_1$	(1,1,1,1)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -x \end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0}, \beta_{2;0}, \beta_{3;0}, \beta_{4;0})$
Kummer's ${}_1F_1$	(2,1,1)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0}, \beta_{1;1}, \beta_{2;0}, \beta_{3;0})$
Bessel's J_a	(2,2)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{x}{2} \\ 0 & \frac{x}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0}, \beta_{1;1}, \beta_{2;0}, \beta_{2;1})$
Hermite's H_e	(3,1)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0}, 0, \beta_{1;2}, \beta_{2;0})$
Airy's A_i	(4)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x \end{bmatrix}$	$(0, 0, 0, \beta_{1;3})$

Function name	λ	Normal form of z	Normal form of β
Appell's F_1	(1,1,1,1,1)	$\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&-1&-x&-y\end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0},\beta_{2;0},\beta_{3;0},\beta_{4;0},\beta_{5;0})$
Horn's G_2		$\begin{bmatrix}1&0&1&x&1\\0&1&-1&1&y\end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0},\beta_{2;0},\beta_{3;0},\beta_{4;0},\beta_{5;0})$
Humbert's Φ_1	(2,1,1,1)	$\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&y&1&-1&-x\end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0},\beta_{1;1},\beta_{2;0},\beta_{3;0},\beta_{4;0})$
Humbert's Φ_2		$\begin{bmatrix}1&0&0&x&y\\0&1&1&1&1\end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0},\beta_{1;1},\beta_{2;0},\beta_{3;0},\beta_{4;0})$
Horn's Γ_1		$\begin{bmatrix}1&0&0&1&x\\0&y&1&-1&1\end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0},\beta_{1;1},\beta_{2;0},\beta_{3;0},\beta_{4;0})$
Humbert's Φ_3	(2,2,1)	$\begin{bmatrix}1&0&0&y&x\\0&1&1&0&1\end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0},\beta_{1;1},\beta_{2;0},\beta_{2;1},\beta_{3;0})$
Horn's Γ_2		$\begin{bmatrix}1&0&0&x&1\\0&y&1&0&-1\end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0},\beta_{1;1},\beta_{2;0},\beta_{2;1},\beta_{3;0})$
[2] $\Phi_{(3,1,1)}$	(3,1,1)	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&x&y&1&-1\end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0},0,\beta_{1;2},\beta_{2;0},\beta_{3;0})$
[2] $\Phi_{(3,2)}$	(3,2)	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&y\\0&1&x&1&0\end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0},0,\beta_{1;2},\beta_{2;0},\beta_{2;1})$
[2] $\Phi_{(4,1)}$	(4,1)	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&x&y&1\end{bmatrix}$	$(\beta_{1;0},0,0,\beta_{1;3},\beta_{2;0})$
[2] $\Phi_{(5)}$	(5)	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&x&y\end{bmatrix}$	$(0,0,0,0,\beta_{1;4})$

6 Appell's F_1 と、Humbert's Φ_1 の場合

Appell の F_1 の場合、$\begin{cases}\varphi_{0,F}=\frac{dt}{t}-\frac{dt}{t-1}\\ \varphi_{1,F}=\frac{xdt}{xt-1}-\frac{dt}{t-1}\\ \varphi_{2,F}=\frac{ydt}{yt-1}-\frac{dt}{t-1}\end{cases}$ と置いて、

$$\frac{\nabla_x}{dx}\begin{bmatrix}\varphi_{0,F}\\ \varphi_{1,F}\\ \varphi_{2,F}\end{bmatrix}=\left\{\frac{1}{x}W_{1,F}+\frac{1}{x-1}W_{2,F}+\frac{1}{x-y}W_{5,F}\right\}\begin{bmatrix}\varphi_{0,F}\\ \varphi_{1,F}\\ \varphi_{2,F}\end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\frac{\nabla_y}{dy}\begin{bmatrix}\varphi_{0,F}\\ \varphi_{1,F}\\ \varphi_{2,F}\end{bmatrix}=\left\{\frac{1}{y}W_{3,F}+\frac{1}{y-1}W_{4,F}+\frac{1}{y-x}W_{5,F}\right\}\begin{bmatrix}\varphi_{0,F}\\ \varphi_{1,F}\\ \varphi_{2,F}\end{bmatrix}, \tag{8}$$

が得られます。ここで各行列は

$$W_{1,F}=\begin{bmatrix}0&0&0\\ \beta_{2;0}&\beta_{1;0}+\beta_{4;0}&\beta_{5;0}\\ 0&0&0\end{bmatrix},\quad W_{2,F}=\begin{bmatrix}0&\beta_{4;0}&0\\ 0&\beta_{3;0}+\beta_{4;0}&0\\ 0&\beta_{4;0}&0\end{bmatrix},$$

$$W_{3,F}=\begin{bmatrix}0&0&0\\ 0&0&0\\ \beta_{2;0}&\beta_{4;0}&\beta_{1;0}+\beta_{5;0}\end{bmatrix},\quad W_{4,F}=\begin{bmatrix}0&0&\beta_{5;0}\\ 0&0&\beta_{5;0}\\ 0&0&\beta_{3;0}+\beta_{5;0}\end{bmatrix},\quad W_{5,F}=\begin{bmatrix}0&0&0\\ 0&\beta_{5;0}&-\beta_{5;0}\\ 0&-\beta_{4;0}&\beta_{4;0}\end{bmatrix},$$

と表されます。これに被積分関数を掛け、積分すると Pfaffian 方程式が得られます。

Humbert の Φ_1 の場合、$\begin{cases}\varphi_{0,\Phi}=\frac{\mathrm{d}t}{t}-\frac{\mathrm{d}t}{t-1}\\ \varphi_{1,\Phi}=\frac{x\mathrm{d}t}{xt-1}-\frac{\mathrm{d}t}{t-1}\\ \varphi_{2,\Phi}=-\frac{\mathrm{d}t}{t-1}\end{cases}$ と置いて、

$$\frac{\nabla_x}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix}\varphi_{0,\Phi}\\ \varphi_{1,\Phi}\\ \varphi_{2,\Phi}\end{bmatrix}=\left\{\frac{1}{x}W_{1,\Phi}+\frac{1}{x-1}W_{2,\Phi}-\frac{y'}{x^2}W_{5,\Phi}\right\}\begin{bmatrix}\varphi_{0,\Phi}\\ \varphi_{1,\Phi}\\ \varphi_{2,\Phi}\end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\frac{\nabla_{y'}}{\mathrm{d}y'}\begin{bmatrix}\varphi_{0,\Phi}\\ \varphi_{1,\Phi}\\ \varphi_{2,\Phi}\end{bmatrix}=\left\{\frac{1}{y'}W_{3,\Phi}+W_{4,\Phi}+\frac{1}{x}W_{5,\Phi}\right\}\begin{bmatrix}\varphi_{0,\Phi}\\ \varphi_{1,\Phi}\\ \varphi_{2,\Phi}\end{bmatrix}, \tag{10}$$

が得られます。ここで各行列は

$$W_{1,\Phi}=\begin{bmatrix}0&0&0\\ \beta_{2;0}&\beta_{1;0}+\beta_{4;0}&0\\ 0&-\beta_{4;0}&\beta_{4;0}\end{bmatrix},W_{2,\Phi}=\begin{bmatrix}0&\beta_{4;0}&0\\ 0&\beta_{3;0}+\beta_{4;0}&0\\ 0&\beta_{4;0}&0\end{bmatrix},$$

$$W_{3,\Phi}=\begin{bmatrix}0&0&0\\ 0&0&0\\ \beta_{2;0}&\beta_{4;0}&\beta_{1;0}\end{bmatrix},W_{4,\Phi}=\begin{bmatrix}0&0&\beta'_{1;1}\\ 0&0&\beta'_{1;1}\\ 0&0&\beta'_{1;1}\end{bmatrix},W_{5,\Phi}=\begin{bmatrix}0&0&0\\ 0&\beta'_{1;1}&-\beta'_{1;1}\\ 0&0&0\end{bmatrix},$$

と表されます。また (7)(8) 式で、$\begin{cases}y=\varepsilon y'\\ \beta_{5;0}=\frac{1}{\varepsilon}\beta'_{1;1}\end{cases}$ と置いて、$\varepsilon\to 0$ の極限を取ると、(9)(10) 式に収束します。

7 統計分野への応用

統計の分野では、ホロノミック勾配法を用いて超幾何関数の数値計算 (斎藤 [3]) が行われています。将来合流型についても、数値計算分野においての応用方法が開発されるかもしれません。

参考文献

[1] Majima, H. Asymptotic analysis for integrable connections with irregular singular points, lecture Notes in Math. 1075, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1984.
[2] Kimura, H., and Koitabashi, T., Normalize of Maximal Abelian Subgroup of $GL(n)$ and GeneralHypergeometric Functions, Kumamoto J. Math. Vol.9 (1996),13-43.
[3] Saito, M., Sturmfels, B., Takayama., N. Groebner Deformations of Hypergeometric Differential Equations, 2000, Springer.