

Generators of invariant linear system on metric graphs for finite isometry group

首都大学東京大学院 理工学研究科 数理情報科学専攻

宋珠愛 (Chue SON)

概要

加法として $\max$ 演算, 乗法として通常の加法を備える集合 $\mathbf{T} := \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ は半体を成す. $\mathbf{T}$ 上の代数幾何学であるトロピカル^{*1}幾何学の一次元の研究対象は距離グラフとして実現される. 本稿では距離グラフ上での基礎的な諸概念の定義から始まり, Haase–Musiker–Yu[2] によって示された完備線形系の有限生成性定理を用いて, 有限群の作用により不変な線形系が有限生成であることを紹介する.

1 導入

トロピカル幾何学は, 最大値関数と通常の加法を演算とするトロピカル代数を用いた代数幾何学である. これは可積分系や工学系まで, 幅広い分野への応用を持つことが分かり, 近年, 重要性を増している. 研究対象であるトロピカル多様体は, 多面体的複体であり, 代数多様体からトロピカル化という極限操作で得られる. 一次元のトロピカル多様体であるトロピカル曲線は距離グラフとして実現され, その上で因子や有理関数等が定義される. 2007 年, Baker–Norine[1] によりトロピカル曲線版の Riemann–Roch の定理が証明され, トロピカル曲線に対する研究が加速した.

2 準備

グラフ G と, G の各辺に有限の長さを割り当てる関数 l との組 (G, l) を距離グラフという (無限の長さを許す場合もあるが, 今は簡単の為有限の長さのみを考える. 参考文献を読む際には注意すること). ただし, 本稿におけるグラフとは, 重みのない有限で連結な空でない多重グラフを意味する. 距離グラフ $\Gamma = (G, l)$ の各辺 e を, 閉区間 $[0, l(e)]$ と同一視し, 辺たちを G の接続関係に従い接着する. これにより, 距離グラフ Γ はコンパクトな距離空間となる.

距離グラフ Γ 上の全ての点で生成された自由アーベル群の元を Γ 上の因子という. Γ 上の因子 D が有効であるとは, D の各点での係数が非負であることをいう.

距離グラフ Γ 上の有理関数とは, Γ 上で恒等的に $-\infty$ を取る関数か, 区分的に $\mathbf{Z}$ アフィン関数 (すなわち, 各区分上での傾きが整数) となる連続関数のことをいう. Γ 上の有理関数 $f \neq -\infty$ に対し, Γ 上の各点 x における f の外向き方向微分の和を $\text{ord}_x(f)$ と書く. 距離グラフ上の有理関数の

^{*1} 「トロピカル」は, ブラジルに住んでいたハンガリー人数学者・計算機科学者の Imre Simon に因んで付けられた.

定義より、有限個の点を除き $\text{ord}_x(f)$ は 0 となるので、 $\text{div}(f) := \sum_{x \in \Gamma} \text{ord}_x(f) \cdot x$ は Γ 上の因子となる。これを f によって定まる主因子という。

距離グラフ Γ 上の二つの因子 D_1, D_2 に対し、その差がある Γ 上の有理関数によって定まる主因子であるとき、 D_1 と D_2 は線形同値であるという。 Γ 上の因子 D に対し、 D に線形同値で有効な Γ 上の因子全体を $|D|$ と書き、 D に付随する完備生成系という。さらに、 $R(D)$ を、 $|D|$ の各元を定める Γ 上の有理関数および $-\infty$ から成る集合とする。 $R(D)$ はトロピカル半加群（あるいはトロピカルベクトル空間）を成すことが分かる ([2, Lemma 4])。ただしここでトロピカル半加群とは、トロピカル半体 T 上の半加群のことである (T は概要を参照)。「半」は、加法に対する逆元が存在しないことを意味する。 n 次元トロピカル射影空間 $TP^n := T^{n+1}/T^\times$ が通常の射影空間の構成と同様にして定義される ($T^\times = \mathbf{R}$ に注意する)。 $|D|$ は $R(D)$ の射影化 $(R(D) \setminus \{-\infty\})/T^\times$ と同一視されるので、 $|D|$ には射影空間の構造が入る。 $|D|$ の線形部分空間を線形系という。一般に、 Γ 上の有限個の有理関数を並べることで Γ からトロピカル射影空間への写像を構成できるが、これを有理写像という（ただし有理関数の選び方によっては有限個の点では定義できない場合がある）。有理写像は距離グラフを調べるのに有用な道具である。 $R(D)$ の部分半加群 R が有限生成であると、その生成系から有理写像が定まる。有限生成な R に対応する線形系を Λ としたとき、 R の極小生成系から定まる有理写像を Λ により誘導された有理写像という。

3 主定理

古典的な場合とは異なり、トロピカル半加群は有限次元であっても有限生成であるとは限らないが、Haase–Musiker–Yu[2] により次が示された。

定理 1 ([2, Theorem 6]). 距離グラフ上の因子 D に対し、 $R(D)$ は有限生成である。

この定理によって $|D|$ は有限生成であり、したがって、 $|D|$ により有理写像が誘導されることが分かった。筆者はこの定理に有限群の作用を考慮した、次の定理を示した。

定理 2. 有限群 K が作用する距離グラフ上の有効因子 D に対し、 $R(D)^K = \{f \in R(D) \mid f : K \text{ 不変} \}$ は有限生成である。特に D が K 不変のとき、 $R(D)^K$ の生成系として次の $\{g_1, \dots, g_n\}$ が取れる： $R(D)$ の生成系 $\{f_1, \dots, f_n\}$ に対し、 $g_i := \sum_{\sigma \in K} f_i \circ \sigma$ （ここで、“ $\sum$ ” はトロピカル演算であることを表す）。

D が K 不変のとき、 K 不変線形系 $|D|^K = \{E \in |D| \mid E : K \text{ 不変} \}$ は $R(D)^K$ の射影化 $(R(D)^K \setminus \{-\infty\})/T^\times$ と同一視できることが示せるので、 $|D|^K$ もまた有限生成である（したがって有理写像を誘導する）ことが分かった。 $|D|^K$ によって誘導された有理写像はどのような性質を持っているだろうか？実はこのことについてもある程度分かっているが、それは [3] に譲ることとし、今回はそこに触れない。

参考文献

- [1] Mathew Baker, Serguei Norine, *Harmonic Morphisms and Hyperelliptic Graphs*, Int. Math. Res. Not. **15** (2009), 2914–2955.
- [2] Christian Haase, Gregg Musiker, Josephine Yu, *Linear Systems on Tropical Curves*, Mathematische Zeitschrift **270** (2012), 1111–1140.
- [3] 宋珠愛, *Galois quotients of metric graphs and invariant linear systems*, 首都大学東京修士論文, 2018.