

テータ積の L 関数の特殊値について

伊東良純 (Ryojun Ito)*

1 導入と主結果

L 関数とは Riemann ゼータ関数の一般化であり、整数論において非常に重要な研究対象であるが、その特殊値が具体的にどのように表せるのかはあまり知られていない。

本稿では、保型形式の L 関数の特殊値について議論する。保型形式 f の q 展開を $f(q) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ とするとき、 L 関数 $L(f, s)$ を

$$L(f, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

で定義する。正整数 n に対し、 $L(f, n)$ は $f(q)$ の Mellin 変換

$$L(f, n) = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_0^1 f(q) (\log q)^{n-1} \frac{dq}{q} \quad (1)$$

で得られることに注意しておく。

近年、いくつかの保型形式に対し、 L 関数の特殊値が一般超幾何関数

$${}_{p+1}F_p \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_{p+1} \\ b_1, b_2, \dots, b_p \end{matrix} \middle| z \right] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_{p+1})_n}{(b_1)_n \cdots (b_p)_n} \frac{z^n}{(1)_n}$$

の特殊値で表せることがわかってきた。ここで、 $(a)_n := \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ は Pochhammer 記号を表す。例えば、

1. 大坪 [10] は、Fetmat 曲線の場合に、レギュレーターと呼ばれる幾何的不変量を一般超幾何関数の特殊値で表した。さらに、その結果と Bloch の定理を用いて、特定の楕円曲線に対応する保型形式の L 関数の $s=2$ での値を ${}_3F_2(1)$ で表した。
2. Rogers [11]、Rogers-Zudilin [13]、Zudilin [15]、伊東 [8] は、特定の楕円曲線に対応する保型形式の L 関数の $s=2$ での値を、解析的な手法を用いて ${}_3F_2(1)$ で表した。また、Zudilin [15] は導手 32 の楕円曲線に対応する保型形式の L 関数の $s=3$ での値を ${}_4F_3(1)$ で表した。
3. Rogers-Wan-Zucker [12] は、Dedekind エータ関数 $\eta(q) := q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$ の商で表される重さ 3 (resp. 4, 5) の特定の保型形式の L 関数の $s=2$ (resp. $s=3, 4$) での値を解析的な手法を用いてガンマ関数 $\Gamma(s)$ または一般超幾何関数の特殊値で表した。

* 千葉大学大学院理学研究科基盤理学専攻数学情報数学コース, E-mail: afua9032@chiba-u.jp

ここで、重さ k 、レベル N の尖点形式 $f(q)$ の L 関数 $L(f, n)$ に対し、関数等式

$$\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) L(f, s) = \pm \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^{k-s} \Gamma(k-s) L(f, k-s)$$

が成り立つことに注意しておく (cf. [7])。

本稿の目的は、Jacobi テータ関数 $\theta_2(q)$ 、 $\theta_3(q)$ 、 $\theta_4(q)$ (定義は 2 節を参照) または Borwein テータ関数 $a(q)$ 、 $b(q)$ 、 $c(q)$ (定義は 3 節を参照) の積で定義される重さ 3 の保型形式 (以下、単にテータ積と呼ぶ) の L 関数の $s = 1$ での値を一般超幾何関数の特殊値で表すことである。

次が主結果である。

定理 1 ([9, Theorem 1]). 次が成り立つ。

$f(q)$	$L(f, 1)$
$\frac{1}{2}\theta_2(q^4)\theta_3^4(q^4)\theta_4(q^8)$	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt{\pi}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8}, 1\end{matrix}\middle 1\right]$
$\frac{1}{2}\theta_2(q^4)\theta_3^3(q^4)\theta_4^2(q^4)$	$\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt{2\pi}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}, 1\end{matrix}\middle 1\right]$
$\frac{1}{2}\theta_2(q^4)\theta_3^2(q^4)\theta_4^3(q^4)$	$\frac{\pi}{4\sqrt{2}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1, 1\end{matrix}\middle 1\right]$
$\frac{1}{2}\theta_2(q^4)\theta_4^5(q^4)$	$\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{16\sqrt{\pi}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}, 1\end{matrix}\middle 1\right]$
$\frac{1}{2}\theta_2(q^4)\theta_4^5(q^8)$	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)}{16\pi^2}$
$\frac{1}{4}\theta_2^2(q^2)\theta_3^3(q^2)\theta_4(q^2)$	$\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt{2\pi}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}, 1\end{matrix}\middle 1\right]$
$\frac{1}{4}\theta_2^2(q^2)\theta_3(q^2)\theta_4^3(q^2)$	$\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{2\sqrt{2\pi}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4}, 1\end{matrix}\middle 1\right]$
$\frac{1}{4}\theta_2^2(q^2)\theta_4^4(q^2)$	$\frac{1}{4}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}, 1\end{matrix}\middle 1\right]$

$\frac{1}{8}\theta_2^3(q^4)\theta_3^2(q^4)\theta_4(q^4)$	$\frac{\pi}{16\sqrt{2}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1, 1\end{matrix}\middle 1\right]$
$\frac{1}{8}\theta_2^3(q^4)\theta_3(q^4)\theta_4^2(q^4)$	$\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{8\sqrt{2\pi}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4}, 1\end{matrix}\middle 1\right]$
$\frac{1}{8}\theta_2^3(q^4)\theta_4^3(q^4)$	$\frac{\pi}{32\sqrt{2}}$
$\frac{1}{8}\theta_2^3(q^4)\theta_4^3(q^8)$	$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma^3\left(\frac{3}{8}\right)}{128\pi^{5/2}}$
$\frac{1}{16}\theta_2^4(q)\theta_4^2(q)$	$\frac{\pi}{16}$
$\frac{1}{32}\theta_2^5(q^4)\theta_4(q^4)$	$\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{256\sqrt{\pi}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}, 1\end{matrix}\middle 1\right]$
$\frac{1}{32}\theta_2^5(q^4)\theta_4(q^8)$	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)}{128\pi^2}$

定理 2 ([9, Theorem 2]). 次が成り立つ。

$f(q)$	$L(f, 1)$
$\frac{1}{3}a(q^3)c(q^3)b(q^3)$	$\frac{\Gamma^6\left(\frac{1}{3}\right)}{8\sqrt{3}\pi^3}$
$\frac{1}{3}c(q^3)b^2(q^3)$	$\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \\ 1, 1\end{matrix}\middle 1\right]$
$\frac{1}{9}c^2(q^3)b(q^3)$	$\frac{2\pi}{27\sqrt{3}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \\ 1, 1\end{matrix}\middle 1\right]$
$\frac{1}{3}c(q^3)b^2(q^9)$	$\frac{2\pi}{3^{11/6}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9} \\ 1, 1\end{matrix}\middle 1\right]$
$\frac{1}{9}c^2(q^3)b(q^9)$	$\frac{2\pi}{3^{13/6}}{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9} \\ 1, 1\end{matrix}\middle 1\right]$

ここで、各定理の $f(q)$ が定数倍されているのは、 $f(q) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ と書いたとき、 $a_1 = 1$ とするためである。

Rogers-Wan-Zucker[12] が扱っている重さ 3 のテータ積 $f(q)$ では、 $L(f, 1)$ は一般超幾何関数の特殊値ではなく、ガンマ関数の特殊値で表されている。重さ 3 のテータ積 $f(q)$ の場合で、 $L(f, 1)$ に一般超幾何関数の特殊値が現れたのは本結果が初めてである。

本主結果の証明に用いる手法では、Jacobi または Borwein テータ関数が超幾何関数と密接に関係しているということが重要である (下の (2)、(3) を参照)。この手法は [8]、[11]、[12]、[13]、[15] でも用いられている。しかし、Rogers-Wan-Zucker [12] は、重さ 3 のエータ積 $f(q) = \eta^3(q^r)\eta^3(q^s)$ ($r + s \equiv 0 \pmod{8}$) の場合に、これと異なる手法を用いて $L(f, 2)$ をガンマ関数の特殊値で表していることに注意しておく。

2 定理 1 の証明

Jacobi テータ関数 $\theta_2(q)$ 、 $\theta_3(q)$ 、 $\theta_4(q)$ を

$$\theta_2(q) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{(n+1/2)^2}, \quad \theta_3(q) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}, \quad \theta_4(q) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2},$$

で定義する。これらは重さ $1/2$ の保型形式である。

これらの間には非常に多くの関係式があることが知られている。その中でも特に有名なのが次の Jacobi の等式である [4]。

$$\theta_3^4(q) = \theta_2^4(q) + \theta_4^4(q).$$

このほかの基本的性質については、[2]、[4] を参照されたい。

$\alpha := \theta_2^4(q)/\theta_3^4(q)$ とおく。Jacobi の等式より、 $1 - \alpha = \theta_4^4(q)/\theta_3^4(q)$ であることに注意する。この α を用いて、Jacobi テータ関数と超幾何関数が次のようにして結びつくことが知られている [1]、[2]。

$$\theta_3^2(q) = {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| \alpha \right], \quad \frac{dq}{q} = \frac{d\alpha}{\alpha(1-\alpha) {}_2F_1^2 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| \alpha \right]}. \quad (2)$$

これらの公式により定理 1 を得る。ここでは、

$$L(f, 1) = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{8\sqrt{2\pi}} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}, 1 \end{matrix} \middle| 1 \right]$$

($f(q) = \frac{1}{2}\theta_2(q^4)\theta_3^2(q^4)\theta_4^3(q^4)$) の場合にのみ示す。残りの結果も同様に証明できる。詳細は [9] を参照されたい。

(1) より、

$$L(f, 1) = \frac{1}{2} \int_0^1 \theta_2(q^4)\theta_3^2(q^4)\theta_4^3(q^4) \frac{dq}{q} = \frac{1}{8} \int_0^1 \theta_2(q)\theta_3^2(q)\theta_4^3(q) \frac{dq}{q}$$

を得る。(2) を用いると、

$$\frac{1}{8} \int_0^1 \theta_2(q)\theta_3^2(q)\theta_4^3(q) \frac{dq}{q} = \frac{1}{8} \int_0^1 \alpha^{1/4}(1-\alpha)^{3/4} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| \alpha \right] \frac{d\alpha}{\alpha(1-\alpha)}$$

がわかる。ここで、一般超幾何関数は次の積分表示を持つことに注意する [14]。

$$\begin{aligned} & {}_{p+1}F_p \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_{p+1} \\ b_1, b_2, \dots, b_p \end{matrix} \middle| z \right] \\ &= \frac{\Gamma(b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b_1 - a_1)} \int_0^1 t^{a_1} (1-t)^{b_1 - a_1} {}_pF_{p-1} \left[\begin{matrix} a_2, \dots, a_{p+1} \\ b_2, \dots, b_p \end{matrix} \middle| zt \right] \frac{dt}{t(1-t)}. \end{aligned}$$

この積分表示を上記の積分に適用することで、

$$L(f, 1) = \frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)}{8\Gamma(1)} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1, 1 \end{matrix} \middle| 1 \right]$$

を得る。最後に、ガンマ関数の相反公式

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

を用いてガンマ関数部分を整理すれば、公式を得る。

3 定理 2 の証明

Borwein テータ関数 $a(q)$ 、 $b(q)$ 、 $c(q)$ を

$$\begin{aligned} a(q) &:= \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} q^{n^2 + nm + m^2}, \\ b(q) &:= \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \omega^{n-m} q^{n^2 + nm + m^2}, \\ c(q) &:= \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} q^{(n+1/3)^2 + (n+1/3)(m+1/3) + (m+1/3)^2}. \end{aligned}$$

で定義する [5]、[6]。ただし、 ω は 1 の原始 3 乗根を表す。これらは重さ 1 の保型形式である。

これらの間には Jacobi テータ関数の関係式の類似が多く成り立つことが知られている。例えば、Jacobi の等式の類似として次が成り立つ [5]。

$$a^3(q) = b^3(q) + c^3(q).$$

このほかの基本的な性質については、[3]、[5]、[6] を参照されたい。

$\alpha := c^3(q)/a^3(q)$ とおく。このとき、上の等式より、 $1 - \alpha = b^3(q)/a^3(q)$ であることに注意する。Jacobi テータ関数の場合と同様に、この α を用いて、Borwein テータ関数は超幾何関数と結びつくことが知られている [1]、[3]、[5]。

$$a(q) = {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| \alpha \right], \quad \frac{dq}{q} = \frac{d\alpha}{\alpha(1-\alpha) {}_2F_1^2 \left[\begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \\ 1 \end{matrix} \middle| \alpha \right]}. \quad (3)$$

これらの公式を用いて Jacobi テータ積の場合と同様な計算を行うことで、定理 2 が導かれる。ここでは、

$$L(f, 1) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \\ 1, 1 \end{matrix} \middle| 1 \right]$$

($f(q) = \frac{1}{3}c(q^3)b^2(q^3)$) の場合にのみ証明する。残りの結果も同様な計算で証明することが出来る。詳細は [9] を参照されたい。

(1) より、

$$L(f, 1) = \frac{1}{3} \int_0^1 c(q^3)b^2(q^3) \frac{dq}{q} = \frac{1}{9} \int_0^1 c(q)b^2(q) \frac{dq}{q}$$

を得る。(3) を用いることで、

$$\int_0^1 c(q)b^2(q) \frac{dq}{q} = \int_0^1 \alpha^{1/3}(1-\alpha)^{2/3} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \middle| \alpha \right] \frac{d\alpha}{\alpha(1-\alpha)}$$

がわかる。したがって、一般超幾何関数の積分表示とガンマ関数の相反公式を用いることで、公式を得る。

参考文献

- [1] B.C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, part II*, Springer, New York, NY, 1989.
- [2] B.C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, part III*, Springer, New York, NY, 1991.
- [3] B.C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, part V*, Springer, New York, NY, 1998.
- [4] J.M. Borwein and P.B. Borwein, *Pi and the AGM: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*, John Wiley & Sons, 1987.
- [5] J.M. Borwein and P.B. Borwein, *A Cubic Counterpart of Jacobi's Identity and the AGM*, Transactions of the American Mathematical Society, 323(2) (1991), 691-701.
- [6] J. M. Borwein, P. B. Borwein and F. G. Garvan *Some cubic modular identities of Ramanujan*, Trans. Amer. Math. Soc. 343 (1994), 35-47.
- [7] N. Koblitz, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*, Springer-Verlag, 1993.
- [8] R. Ito, *The Beilinson conjectures for CM elliptic curves via hypergeometric functions*, Ramanujan J (2018) 45: 433-449.
- [9] R. Ito, *The Special values of L-functions at s = 1 of theta products of weight 3*, in preparation.
- [10] N. Otsubo, *Certain values of Hecke L-functions and generalized hypergeometric functions*, J.Number Theory, 131 (2011), 648-660.
- [11] M. Rogers, *Boyd's conjectures for elliptic curves of conductor 11, 19, 39, 48 and 80*, unpublished notes, 2010.
- [12] M. Rogers, J.G. Wan , I.J. Zucker, *Moments of elliptic integrals and critical L-values*, Ramanujan J. 37, 2015, 113-130.
- [13] M. Rogers, W. Zudilin, *From L-series of elliptic curves to Mahler measures*, Compositio Math. 148, 2012, 385-414.
- [14] L. J. Slater, *Generalized Hypergeometric functions*, Cambridge University Press, 1966.
- [15] W. Zudilin, *Period(d)ness of L-Values*, Number Theory and Related Fields, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics vol. 43, 2013, 381-395.