イデアル化の Cohen-Macaulay 型と residually faithful 加群について

千葉大学大学院 融合理学府 数学情報科学専攻
神代　真也 (Shinya Kumashiro) *

1　導入

本稿で述べる研究内容は後藤四郎氏（明治大学）と Nguyen Thi Hong Loan 女史（Vinh University）との共同研究 [4] に基づく。

本研究は可換環の解析を目的としている。可換環論は特異点論解析の重要な方法の一つであって、様々な代数系と深い関わりを持っている。可換環論は 19 世紀末に不変式論を通して D. Hilbert により創始され、E. Noether による代数学の抽象化の中で大きく展開された。20 世紀半ば、J.-P. Serre がホモロジー代数を用いて正則環を大域次元の局所有限性で特徴づけるという一大成果を挙げて以来、飛躍的な発展を遂げた。20 世紀後半からの 60 年間に、主に代数幾何学との深い関わりの中で、特異点論、整数論、複素解析的多様体論、組み合わせ論などの他分野から問題と手法を獲得しつつ、環と加群の Cohen-Macaulay 性解析を中心に急速に発展、整備されている。

環と加群の Cohen-Macaulay 性はホモロジー代数と非常に相性が良く、多くの研究者によって深い優れた研究がなされている。現代可換環論の研究分野は多岐に渡るが、本研究では多様かつ豊富に存在する Cohen-Macaulay 環をホモロジー代数的視点からの階層化

$$\text{正則環} \Rightarrow \text{完全交叉} \Rightarrow \text{Gorenstein 環} \Rightarrow \text{Cohen-Macaulay 環} \ (\Rightarrow \text{Noether 環})$$

を指標に解析する。とりわけ、Gorenstein でない Cohen-Macaulay 環を主な解析の対象としている。Gorenstein 性との距離をはかる指標として Cohen-Macaulay 型がよく知られている。Cohen-Macaulay 型は正の整数値であり、任意の Cohen-Macaulay 局所環に対して定義される。小さい値であるほど良い環構造を持っており、Gorenstein 局所環であることと Cohen-Macaulay 型が 1 の Cohen-Macaulay 局所環であることが同値である。

本稿では、与えられた可換環 R とその加群 M から新たに構成されるイデアル化 $R \ltimes M$ という可換環の Cohen-Macaulay 型を解析することを目的としている。動機を述べるために少し記号を準備する。

R は可換環であって、M を零でない R-加群とする。$A = R \ltimes M$ を M のイデアル化とする。すなわち、R-加群 $R \oplus M$ に対し

$$(a, x) \circ (b, y) = (ab, ay + bx) \quad (a, b \in A,\ x, y \in M)$$

によって積を定義することで（可換）環構造をいれたものである。この記号のもと次の事実が基本的である。

定理 1.1. *R, M, $A = R \ltimes M$ を上と同じものとすると次が成り立つ。*

(1) A が *Noether* 環である $\Leftrightarrow$ R が *Noether* 環かつ M が有限生成 R-加群である。
(2) A が *Cohen-Macaulay* 環である $\Leftrightarrow$ R が *Cohen-Macaulay* 環かつ M が極大 *Cohen-Macaulay* R-加群である。

* axwa4903@chiba-u.jp

(3) A が *Gorenstein* 環である $\Leftrightarrow$ R が *Cohen-Macaulay* 環かつ M が正準加群と同型である。

一般に極大 Cohen-Macaulay R-加群は無限にある一方で、正準加群は存在すれば同型を除き一意に定まる。このことから (2) と (3) の間には大きなギャップがあることがうかがえる。また、イデアル化 A の環構造はもともとの環 R の加群の振る舞いと密接に関連していることもみてとれる。以上の考察のもと、本稿では (2) と (3) の間を埋める理論としてイデアル化の Cohen-Macaulay 型 $\mathrm{r}(A)$ に着目した解析を行う。以下、得られた結果を述べるために本稿における状況設定を述べる。

設定 1. 本稿を通して特に述べない限り $(R, \mathfrak{m})$ は次元が d の *Cohen-Macaulay* 局所環とする。また、M は零でない極大 *Cohen-Macaulay* 加群とする。加群 M に対して、

$$\mathrm{r}_R(M) = \ell_R(\mathrm{Ext}_R^d(R/\mathfrak{m}, M))$$

を M の *Cohen-Macaulay* 型という。ただし、$\ell_R(*)$ は長さを表す。R の *Cohen-Macaulay* 型 $\mathrm{r}_R(R)$ は単に $\mathrm{r}(R)$ と表すことにする。$\mathrm{Q}(R)$ は R の全商環を表し、$\mathrm{Q}(R)$ の R-部分加群 I, J に対して、

$$I : J = \{a \in \mathrm{Q}(R) \mid aJ \subseteq I\}$$

とする。また、$I :_R J = (I : J) \cap R$ で R への制限を表すものとする。

上記の仮定のもと、本稿の概要について述べたい。次章では上の設定のもとで、基本となる不等式

$$\mathrm{r}_R(M) \le \mathrm{r}(R \ltimes M) \le \mathrm{r}_R(M) + \mathrm{r}(R)$$

について述べる。この不等式は sharp であるが、一方で両極端なケース

$$\mathrm{r}_R(M) = \mathrm{r}(R \ltimes M),\ \mathrm{r}(R \ltimes M) = \mathrm{r}_R(M) + \mathrm{r}(R)$$

も非常に数多く存在することが示される。そこで第三章では両極端となるような加群 M の性質についてそれぞれ述べる。

2　不等式 $\mathrm{r}_R(M) \le \mathrm{r}(R \ltimes M) \le \mathrm{r}_R(M) + \mathrm{r}(R)$ について

次の補題が鍵である。

補題 2.1. $(R, \mathfrak{m})$ を（*Noether* とは限らない）局所環として、M を R-加群とする。$A = R \ltimes M$ とおいて、$\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \times M$ でその極大イデアルを表す。このとき、次が正しい。

$$(0) :_A \mathfrak{n} = ([(0) :_R \mathfrak{m}] \cap \mathrm{Ann}_R M) \times [(0) :_M \mathfrak{m}].$$

従って、R が *Artin* 局所環であれば $(0) :_A \mathfrak{n} = (0) \times [(0) :_M \mathfrak{m}]$ であることの必要十分条件は $\mathrm{Ann}_R M = (0)$ (i.e. M が faithful) である。

このことから次が従う。

定理 2.2. 設定 1 のもとで、不等式

$$\mathrm{r}_R(M) \le \mathrm{r}(A) \le \mathrm{r}(R) + \mathrm{r}_R(M)$$

が成立する。更に、$\mathfrak{q}$ を巴系イデアルとして $\overline{R} = R/\mathfrak{q}$, $\overline{M} = M/\mathfrak{q}M$ とおくと次が正しい。

(1) 左の等号成立条件は $\overline{M}$ が *faithful* $\overline{R}$*-module* である。

(2) 右の等号成立条件は $(\mathfrak{q} :_R \mathfrak{m})M = \mathfrak{q}M$ である。

例 2.3 に示すとおり、この不等式は sharp であり一般にイデアル化の Cohen-Macaulay 型 $\mathrm{r}(A)$ は $[\mathrm{r}_R(M), \mathrm{r}(R) + \mathrm{r}_R(M)]$ の任意の整数値を取りうる。その一方で定理 2.4 に示すように両極端な二つの場合

$$\mathrm{r}_R(M) = \mathrm{r}(R \ltimes M),\ \mathrm{r}(R \ltimes M) = \mathrm{r}_R(M) + \mathrm{r}(R)$$

も非常に数多く存在する。

例 2.3. $S = k[[X_1, X_2, \ldots, X_\ell]]$ $(\ell \geq 2)$ を体 k 上のべき級数環とする。$\mathfrak{a} = \mathbb{I}_2(\mathbb{M})$ を 2×2 小行列式で生成されたた S のイデアルとする。ただし、$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_{\ell-1} & X_\ell \\ X_2 & X_3 & \ldots & X_\ell & X_1^q \end{pmatrix}$ $(q \geq 2)$ とする。このとき、$R = S/\mathfrak{a}$ とおくと R は一次元 *Cohen-Macaulay* 局所環である。勝手な整数 $2 \leq p \leq \ell$ に対して、$I_p = (x_1) + (x_p, x_{p+1}, \ldots, x_\ell)$ とおく（x_i は X_i の R への像を表す）。すると、

$$\mathrm{r}(R \ltimes I_p) = \mathrm{r}_R(I_p) + (\ell - p + 1) \quad (2 \leq \forall p \leq \ell)$$

である。

定理 2.4. $0 \neq M \in \Omega\mathrm{CM}(R)$ とする。すなわち、ある有限生成自由加群 F と極大 *Cohen-Macaulay* 加群 N があって、$0 \to M \to F \to N \to 0$ が完全であるとする。

このとき、次が正しい。

$$\mathrm{r}(R \ltimes M) = \begin{cases} \mathrm{r}_R(M) & \textit{if } R \textit{ is a direct summand of } M, \\ \mathrm{r}(R) + \mathrm{r}_R(M) & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

また、正準加群 K_R があれば定理 2.2 の不等式はより具体的に次のように表せる。

定理 2.5. R は正準加群 K_R を持つとせよ。極大 *Cohen-Macaulay* 加群 M に対して

$$t = t_{\mathrm{K}_R}^M : \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{K}_R) \otimes_R M \to \mathrm{K}_R$$

を $t(f \otimes m) = f(m)$（ただし、$f \in \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{K}_R)$ *and* $m \in M$）で定める。このとき、

$$\mathrm{r}(R \ltimes M) = \mathrm{r}_R(M) + \mu_R(\mathrm{Coker}\, t)$$

である。

3 等号が成立する R-加群について

本章では、前章で与えた不等式の極端な場合について考察する。まず等号 $\mathrm{r}_R(M) = \mathrm{r}(R \ltimes M)$ が成立するときについて考える。以下、常に設定 1 を仮定する。次の定義は [2] による。

定義 3.1. [2] M を極大 *Cohen-Macaulay* 加群とする。このとき M が residually faithful であるとは、$M/\mathfrak{q}M$ はある巴系イデアル $\mathfrak{q}$ に対して、$R/\mathfrak{q}$-*module* として *faithful* であることをいう。

定理 2.2 より、residually faithful 性は巴系イデアル $\mathfrak{q}$ の取り方によらない。定理 2.2, 2.5 により次が直ちに従う。

系 3.2. R は正準加群 K_R を持つとせよ。このとき次は同値である。

(1) $\mathrm{r}(R \ltimes M) = \mathrm{r}_R(M)$ である。

(2) $t = t_{\mathrm{K}_R}^M : \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{K}_R) \otimes_R M \to \mathrm{K}_R$ は全射準同型写像である。

(3) M は *residually faithful* R-加群である。

以上を用いることで、以下の residually faithful 加群の性質が示される。

命題 3.3. M を極大 *Cohen-Macaulay* 加群とする。このとき次が成立する。

(1) $a \in \mathfrak{m}$ を R の非零因子とすると、M が *residually faithful* R-加群である必要十分条件は M/aM が *residually faithful* $R/(a)$-加群であることである。
(2) $(S, \mathfrak{n})$ を *Cohen-Macaulay* 局所環として、$\varphi : R \to S$ を平坦局所写像が与えられているとする。このとき、M が *residually faithful* R-加群である必要十分条件は $S \otimes_R M$ が *residually faithful* S-加群であることである。
(3) M を *residually faithful* R-加群とすると、M は *faithful* であって、更に任意の素イデアル $p \in \operatorname{Spec} R$ に対して M_p は *residually faithful* R_p-加群である。
(4) K_R が存在するとせよ。このとき、M が *residually faithful* R-加群ならば $M^\vee = \operatorname{Hom}_R(M, \mathrm{K}_R)$ も *residually faithful* R-加群である。

系 3.4. $\mathrm{r}(R \ltimes M) = \mathrm{r}_R(M)$ とする。このとき、次が正しい。

(1) $\mathrm{r}(R_\mathfrak{p} \ltimes M_\mathfrak{p}) = \mathrm{r}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ *for every* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.
(2) K_R が存在するとせよ。このとき、$\mathrm{r}(R \ltimes M^\vee) = \mu_R(M)$ である。ただし、$\mu_R(*)$ は極小生成元の個数とする。

次に $\mathrm{r}(R \ltimes M) = \mathrm{r}_R(M) + \mathrm{r}(R)$ の場合について考察する。以下、定理を簡便にするため、
$\mathrm{CM}(R) = \{M \mid M$ は非零極大 Cohen-Macaulay R-加群 $\}$
$\Omega\mathrm{CM}(R) = \{M \in \mathrm{CM}(R) \mid \exists 0 \to M \to F \to X \to 0$ ただし F は自由加群で $X \in \mathrm{CM}(R)\}$
$\Omega\mathrm{CM}^\times(R) = \{M \in \Omega\mathrm{CM}(R) \mid M$ は自由直和因子を持たない $\}$
$\mathrm{Ul}(R) = \{M \in \mathrm{CM}(R) \mid \mu_R(M) = \mathrm{e}^0_\mathfrak{m}(M)\}$
とおく。$M \in \mathrm{Ul}(R)$ は Ulrich R-加群と呼ばれるものであり、興味深い性質を持つことが知られている [1]。調べたい対象は次である。

$$\mathcal{A} = \{M \in \mathrm{CM}(R) \mid \mathrm{r}(R \ltimes M) = \mathrm{r}_R(M) + \mathrm{r}(R)\}.$$

定理 3.5. R を正則局所環でないとせよ。このとき、次が正しい。

(1) 勝手な $i \geq d$ に対して、$\Omega^i_R(R/\mathfrak{m}) \in \mathcal{A}$ である。
(2) $\Omega\mathrm{CM}^\times(R) \subseteq \mathcal{A}$, $\mathrm{Ul}(R) \subseteq \mathcal{A}$ である。
(3) I を *Ulrich* イデアルで M を I に関する *Ulrich* 加群とする。このとき、$M \in \mathcal{A}$ であって、更に

$$\mathrm{r}(R \ltimes M) = \mathrm{r}_R(M) + \mathrm{r}(R) = \mathrm{r}(R/I) \cdot \{\mu_R(M) + \mu_R(I) - d\}$$

である。

$\mathcal{A}$ の性質について少し述べる。

命題 3.6. R を正則局所環でないとせよ。このとき、次が正しい。

(1) R は正準加群 K_R を持つとせよ。このとき $M \in \mathcal{A}$ ならば、$M^\vee \in \mathcal{A}$ である。
(2) $d = 1$ とすると、

$$\mathcal{A} = \{0 \neq M \mid M \text{ は極大 } \textit{Cohen-Macaulay} \text{ 加群で } (\mathfrak{m} : \mathfrak{m})M = M\}$$

である。このとき、$\mathcal{A} = \Omega\mathrm{CM}^{\times}(R)$ である $\Leftrightarrow$ R が *almost Gorenstein* 環である (see [6])。

(3) $\mathcal{A} = \mathrm{Ul}(R)$ である $\Leftrightarrow$ R が極小重複度を持つ。

参考文献

[1] J. P. Brennan, J. Herzog, and B. Ulrich, Maximally generated maximal Cohen-Macaulay modules, *Math. Scand.*, **61** (1987), no. 2, 181–203.

[2] J. P. Brennan and W. V. Vasconcelos, On the structure of closed ideals, *Math. Scand.*, **88** (2001), 3–16.

[3] S. Goto, R. Isobe, and S. Kumashiro, Chains of Ulrich ideals in one-dimensional Cohen-Macaulay local rings, *Acta Math. Vietnam.* (to appear).

[4] S. Goto, S. Kumashiro, and N. T. H. Loan, Residually faithful modules and the Cohen-Macaulay type of idealizations, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, (to appear), arXiv:1804.07885.

[5] S. Goto, N. Matsuoka, and T.T. Phuong, Almost Gorenstein rings, *J. Algebra*, **379** (2013), 355–381.

[6] T. Kobayashi, Syzygies of Cohen-Macaulay modules over one dimensional Cohen-Macaulay local rings, arXiv:1710.02673.

[7] I. Reiten, The converse of a theorem of Sharp on Gorenstein modules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **32** (1972), 417-420.