団代数における F 多項式の行列化

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
行田康晃 (Yasuaki GYODA)

1 導入

団代数とは，団変数と呼ばれる生成元による有理関数体の部分環として定義される可換代数であり，この団変数は変異と呼ばれる漸化式によって定義される変換によって結びついている．元々は半単純 Lie 群における全正値性や標準規定を調べるために Fomin と Zelevinsky により導入されたもの [FZ02] であるが，現在はさまざまな数学的事象の背景にこの変異の構造が存在することが知られており，クイバーの表現論や双曲幾何など，Lie 理論を超えた枠組みでその応用が行われている．

私の研究対象は，[FZ07] によって導入されたこの変異を決定する漸化式から得られる C 行列，G 行列，F 多項式と呼ばれる，2 つの行列族と 1 つの多項式族である．これらは団変数の表示を一意的に決定する点において重要な概念であるが，これにより団代数の変異に関する研究には新しい視点が与えられた．すなわち，団変数とその係数を見る代わりに，これらを表現することのできる C 行列，G 行列，F 多項式とその関係式を見ることで変異の性質を探っていこうという視点である．そのなかでも，特に C 行列と G 行列に関する研究は数多くある．その主たるものが，[NZ12] による C 行列と G 行列の双対性である．これらの研究において鍵となったのは，行列の性質やその操作である．例えば C 行列と G 行列の符号同一性と呼ばれる性質は行列の「行」や「列」に現れる特徴を述べたものであり，また C 行列と G 行列の双対性は行列の「転置」「逆行列」といった操作を介して得られる変異の性質である．これらは，団変数，係数，変異といった漸化式によって定義されているものを，行列や線形代数の文脈に落とし込むことで初めて顕在化する性質である．私はこの点に着目し，「F 多項式についてもそこから行列を構成してそちらを調べることで新しい性質を見出せるのではないか」という考えに至った．本稿では，2 節でまず団代数を定義し，3 節でその中で今回の主定理を適用するクラスである点付曲面から誘導される団代数を定める．4 節で C 行列，G 行列，F 多項式を導入，5 節で F 多項式から定まる行列である F 行列を定義し，この行列が逆に F 多項式を一意的に決定することを述べる．

2 団代数の定義

準備として，最初に**半体** *(semifield)* $\mathbb{P}$ を定義する．これは可換な乗法 $\cdot$ による群で，可換で結合的であり，乗法について分配的な加法 $\oplus$ を備えるものである．次にシードを定義する準備を行う．$\mathbb{ZP}$ を半体 $\mathbb{P}$ で生成される $\mathbb{Z}$ 上の群環であるとする．$\mathbb{ZP}$ は整域だから，全商環は体である．これを $\mathbb{Q}(\mathbb{P})$ と表すことにする． 体 $\mathcal{F}$ が $\mathbb{Q}(\mathbb{P})$ 上の n 変数有理関数体と同型な体であるとき，$\mathcal{F}$ を以下で

定める団代数 $\mathcal{A}$ の**周辺体** *(ambient field)* という．

定義 2.1 ([FZ07, Definition 2.3])**.** 任意に半体 $\mathbb{P}$ を固定して，$\mathcal{F}$ をその周辺体とする．$\mathcal{F}$ の**ラベル付シード** (*labeled seed*) を，次の条件を満たす三つ組 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ として定義する．

- $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ は $\mathcal{F}$ の自由生成集合となる代数的独立な n 個の変数の組である．
- $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ は $\mathbb{P}$ の n 個の元の組である．
- $B = (b_{ij})$ は歪対称化可能な $n \times n$ 整数行列である．ここで，行列 B が歪対称化可能であるとは，ある正整数成分対角行列 S（これを B の歪対称化行列という）が存在して SB が歪対称行列となることをいう．

$\mathbf{x}$ を (ラベル付の) **団** *(cluster)*，$\mathbf{y}$ を**係数組** *(coefficient tuple)*，B を**交換行列** *(exchange matrix)* とそれぞれ呼ぶ．

ここで，$[b]_+ = \max(b, 0)$ と定めておく．

定義 2.2 ([FZ07, Definition 2.4])**.** $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ を $\mathcal{F}$ のラベル付けされたシードとして，$k \in J$ を任意にとる．ℓ 方向の**シード変異** (seed mutation) μ_ℓ によって $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ が次で定義される $\mu_\ell(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B) = (\mathbf{x}', \mathbf{y}', B')$ に移るものとする．

- $B' = (b_{ij})$ の成分は
$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & (i = \ell \text{ または } j = \ell); \\ b_{ij} + [-b_{i\ell}]_+ b_{\ell j} + b_{i\ell}[b_{\ell j}]_+ & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{2.1}$$
で定義される．
- $\mathbf{y}' = (y'_1, \ldots, y'_n)$ は
$$y'_j = \begin{cases} y_\ell^{-1} & (j = \ell); \\ y_j y_\ell^{[b_{\ell j}]_+} (y_\ell \oplus 1)^{-b_{\ell j}} & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{2.2}$$
で定義される．
- $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ は $j \neq \ell$ のとき $x'_j = x_j$ と定義され．$x'_\ell \in \mathcal{F}$ は**交換関係式** *(exchange relation)*
$$x'_\ell = \frac{y_\ell \prod x_i^{[b_{i\ell}]_+} + \prod x_i^{-[b_{i\ell}]_+}}{(y_\ell \oplus 1) x_\ell} \tag{2.3}$$
によって定義される．

μ_k は対合である，すなわち，$\mu_k \circ \mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ が成立することが直接計算によって確かめられる．ここから，$\mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B) = (\mathbf{x}', \mathbf{y}', B')$ がシードとなることがわかる．実際，$\mathbf{x}'$ が代数的独立であることは背理法から直ちに従う．また，直接計算から B' が歪対称化可能であり，しかも歪対称化行列 S は変異前の B と共通であることが示される．

次に，$\mathbb{T}_n$ を任意の頂点から n 本の辺が伸びており，その各辺に $1, \ldots, n$ でラベル付けされるグラフであるとする．ここで，1 つの頂点から出る n 本の辺には全て違うラベルがついているようにす

る．このグラフ $\mathbb{T}_n$ のことを n-**正則木** *(n-regular tree)* と呼ぶ．$t, t' \in \mathbb{T}_n$ が ℓ でラベル付けされた辺で繋がっているとき，$t \overset{\ell}{\text{——}} t'$ のように表すものとする．

定義 2.3 ([FZ07, Definition 2.9])**.** $\mathbb{T}_n$ と団全体の間の**団パターン** *(cluster pattern)* を，任意の $t \overset{\ell}{\text{——}} t'$ を満たす $\mathbb{T}$ の頂点 t, t' に対して，ラベル付けされたシード $\Sigma_t = (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t), \Sigma'_t = (\mathbf{x}'_t, \mathbf{y}_t, B_t)$ を互いに ℓ 方向のシード変異で移り合うような $\mathbb{T}_n$ の頂点と団の間の対応と定義する．また，Σ_t の元を以下のように表すことにする．

$$\mathbf{x}_t = (x_{1;t}, \dots, x_{n;t}),\ \mathbf{y}_t = (y_{1;t}, \dots, y_{n;t}),\ B_t = (b_{ij;t}). \tag{2.4}$$

以上で団代数を定義する準備が整った．

定義 2.4 ([FZ07, Definition 2.11])**.** 任意に団パターンが与えられたとき，

$$\mathcal{X} = \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n} \mathbf{x}_t = \{x_{i;t} : t \in \mathbb{T}_n, 1 \le i \le n\}, \tag{2.5}$$

を団パターンに現れる全てのシードの和集合として定める．ここで，$x_{i;t}$ を**団変数** *(cluster variable)* と呼ぶことにする．さらに，与えられた団パターンに付随する団代数 $\mathcal{A}$ を全ての団変数で生成される $\mathcal{F}$ の $\mathbb{ZP}$ 部分代数，すなわち $\mathcal{A} = \mathbb{ZP}[\mathcal{X}]$ と定義する．

実は団代数について以下の重要な性質が成立している．

定理 2.5 ([FZ02, Theorem 3.1])**.** $t \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ に付随する団代数 $\mathcal{A}$ はローラン多項式環 $\mathbb{ZP}[\mathbf{x}^{\pm 1}]$ に含まれる．すなわち，$\mathcal{A}$ の元は全て $\mathbf{x}$ の団変数の $\mathbb{ZP}$ 上ローラン多項式である．

この性質は，**ローラン現象** *(Laurent phenomenon)* と呼ばれる，団代数がもつ大きな特徴の 1 つである．この性質を用いることができるということが，他の数学分野において団代数の考え方を導入する大きな利点となる．

3 点付曲面から誘導される団代数

この節では，[FST08] に沿って点付曲面から誘導される団パターンとその団代数について定義する．点付曲面とそのタグ付三角形分割による団構造の実現は，団パターン，団代数に幾何的，組み合わせ論的手法を取り入れるために定義された．

まず，点付曲面とその弧について定義する．$\mathbf{S}$ を連結な向き付きリーマン面とする．そして，$\mathbf{M}$ を $\mathbf{S}$ の閉包における **点** *(marked points)* と呼ばれる有限集合とする．特に，$\mathbf{S}$ の内部にある点を**穴** *(puncture)* と呼ぶ．このとき，$(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ を**点付曲面** *(marked surface)* という．以下，$\mathbf{M}$ は空でなく，$\mathbf{S}$ の境界成分ごとに少なくとも 1 つの点を持ち，$(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ は次のいずれでもないと仮定する：

- 1 点付，2 点付，または 3 点付の球面
- 穴を持たない，または 1 つ持つ一角形
- 穴を持たない二角形
- 穴を持たない三角形

$(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ 上の（タグなし）**弧** *(arc)* γ は，$\mathbf{S}$ 上の曲線で次を満たすものである：

- γ の端点は $\mathbf{M}$ に属する点である
- γ は端点となっている点以外では自己交差しない
- 端点を除き，γ は $\mathbf{M}$ や $\mathbf{S}$ の境界との共通部分を持たない
- γ は穴なし一角形や穴なし二角形を切り取らない（言い換えると，γ は $\mathbf{M}$ の元や $\mathbf{S}$ 境界に可縮でない）．

ここで，γ は互いに $\mathbf{S} \backslash \mathbf{M}$ 上の道ホモトピーであるものを同一視するものとする．このタグなし弧を用いて，タグ付弧を定義する．任意の $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ に属する弧 γ に対して，両端に**タグ** *(tag)* と呼ばれるラベルをつけることを考える．**タグ付弧** *(tagged arc)* はタグなし弧の 2 つの端に**プレーン** *(plain)* か**ノッチ** *(notch)*（図 1）のどちらか 1 つのタグがついており，（タグなし弧の条件に加えて）次の条件を持たすものである：

- 弧は 1 点付一角形を切り取らない
- 境界上に端点を持つとき，その端点側の弧の端にあるタグはプレーンである
- ループの両端のタグは同じものである

図 1　タグ付弧

これに関して，点付曲面において団パターンにおける団に対応するタグ付三角形分割という概念を定める．

定義 3.1. 2 つのタグ付弧 α と β について，次の条件が成立しているとき，またそのときに限り，2 つのタグ付弧は**整合的** *(compatible)* であるという：

- α と β のタグを取り除いたものの道ホモトピー類を考えたときの，端点を除く最小交差数が 0 である
- α の β のタグを取り除いたものが異なる（道ホモトピーでない）とき，α と β が端点 a を共有するならば，a についてその端についている α と β についているタグが同じである
- α と β のタグを取り除いたものが一致する（道ホモトピーである）とき，少なくとも 1 つの端点について，その端についている α と β のタグが一致している

タグ付弧の部分集合で，任意の 2 元が整合的であるようなものを考え，この集合のことを整合的集合ということにする．このうち，弧の数が極大であるものを**タグ付三角形分割** *(tagged triangulation)* という．

具体例を見る．図 2 は 1 点付き三角形のタグ付弧を全て集めてきたものである．ここで，互いに線で結ばれているもの同士が互いに整合的であることを示している．濃度最大の整合的集合，すなわち三角形分割はこの例においては全て 3 つの弧たちの組み合わせであることが見て取れる．この図にお

ける 2 次元単体（三角形）が各三角形分割に対応している，一般に次の定理が成り立つ：

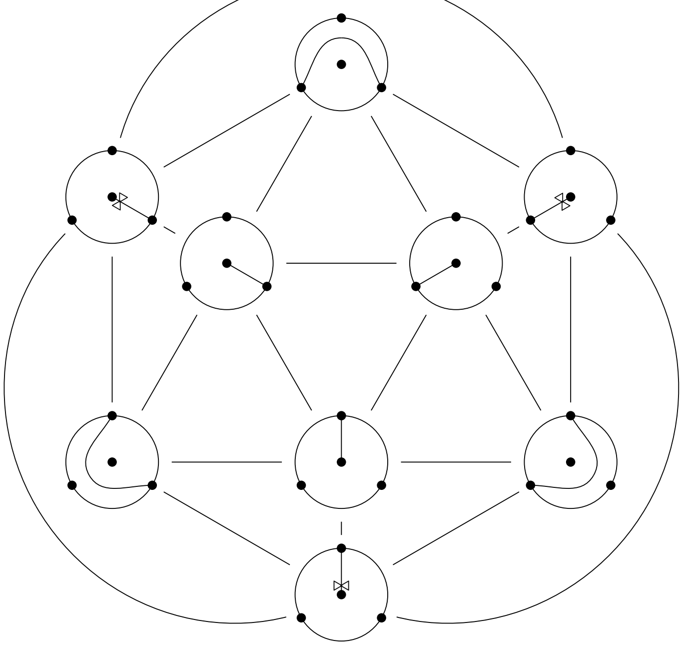

図 2　1 点付三角形の弧と整合的集合

補題 3.2 ([FST08, Lemma 7.9])**.** 任意の $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ を 1 つ固定する．$(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ におけるタグ付三角形分割の濃度は，タグ付三角形分割の選び方によらず一定である．さらにこの濃度を n とすると，$n-1$ 個の弧を持つ任意の整合的集合について，それを部分集合として持つタグ付三角形分割がちょうど 2 つ存在する．

次に，タグ付三角形分割から団パターンにおける交換行列を定めることを考える．まずランク（三角形分割の濃度）が n の点付曲面 $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ とそのタグ付三角形分割 T を任意に固定する．T に付随する行列 $B = B(T)$ を定める．いくつか準備をする．便宜上 T の弧に 1 から n までのラベルをつけ，$\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ とする．$\overline{T}$ を T に属するダグ付き弧からタグを取り除いた弧の集合とする．ここで，$\overline{\gamma}_i \in \overline{T}$ を γ_i のタグを取り除いた弧としておく．$(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ における T からタグなし弧全体への写像 π_T を次で定める：2 つのタグ付弧 $\gamma_i, \gamma_j \in T$ で，$\overline{\gamma}_i = \overline{\gamma}_j$ であり，$\overline{\gamma}_i$ の端点が a と b で，γ_i と γ_j のタグが a 側の端で異なっているとき，$\pi_T(\gamma_i) = \pi_T(\gamma_j)$ を b を端点として a を囲むようなループとして定める (図 3)．T におけるそれ以外の弧については, $\pi_T(\gamma_i) = \overline{\gamma}_i$ とする．$\pi_T(T)$ の任意の

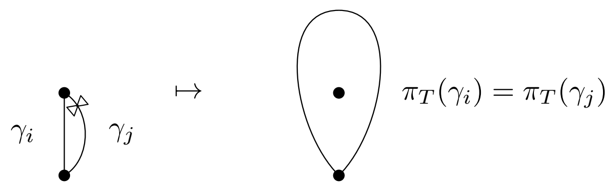

図 3　写像 π_T

辺が折りたたまれていない三角形 Δ について，$n \times n$ 行列 $B^{\Delta} = (b^{\Delta}_{ij})$ を次で定義する：

$$b^{\Delta}_{ij} = \begin{cases} 1 & \left(\begin{array}{l} \pi_T(\gamma_i) \text{ と } \pi_T(\gamma_j) \text{ が } \Delta \text{ の辺であり，} \\ \text{時計回りの順に } \pi_T(\gamma_i),\ \pi_T(\gamma_j) \text{ とならんでいるとき} \end{array} \right) \\ -1 & (\text{反時計回りの順に並んでいるとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{3.1}$$

このとき，$B = B(T) = (b_{ij})$ を

$$B = \sum_{\Delta} B^{\Delta}, \tag{3.2}$$

で定義する．ここでの総和は T における折りたたまれていない三角形 Δ すべてでとる．行列 B は $n \times n$ 歪対称行列であり，すべての成分が $0, 1, -1, 2, -2$ のいずれかに等しい．

定義 3.3. 点付曲面 $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ とそのタグ付三角形分割 T について，$(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ **と** T **から誘導される団パターン**，**団代数**を初期シードが $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B(T))$ であるような団パターン，団代数とする．

以降，$T = \{\gamma_1, \dots \gamma_n\}$ とする．つぎに，団パターンにおける変異にあたる操作であるフリップを定義する．

定義 3.4 ([FST08, Definition 3.5])**.** 点付曲面 $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ について，タグ付三角形分割 T を任意にとる．i に関する**フリップ** *(flip)* φ_i を，T から $(T \backslash \{\gamma_i\}) \cup \{\gamma'_i\}$ への変換とする．ただし，γ'_i は $(T \backslash \{\gamma_i\})$ の各元と整合的であり γ_i と異なる（一意的な）元であるとする．

注 3.5. 定理 3.4 における γ'_i の一意性と存在は定理 3.2 により保証されている．

次の 2 つの定理より，点付曲面と団パターン（団代数）の間に，フリップと変異，タグ付弧と団変数，タグ付三角形分割と団の 1 対 1 対応があることがわかる．

定理 3.6 ([FST08, Lemma 9.7])**.** 任意の $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ と T について，$B(\varphi_i(T)) = \mu_i(B(T))$ が成立する．

定理 3.7 ([FST08, Theorem 7.11])**.** 1 点付閉曲面でない $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ とそのタグ付三角形分割 T を任意に固定する．$A, \mathfrak{A}$ をそれぞれ $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ におけるすべてのタグ付弧，タグ付三角形分割とし，$C, \mathfrak{C}$ をそれぞれ $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ と T から誘導される団パターンの団変数，団とする． このとき，

(1) 写像

$$\Psi : A \to C,\ \Psi(\varphi_{i_m} \cdots \varphi_{i_1}(\gamma_j)) = \mu_{i_m} \cdots \mu_{i_1}(x_j) \tag{3.3}$$

は全単射である．ここで，$i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots n\}$ とする．

(2) Ψ から誘導される写像

$$\overline{\Psi} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C} \tag{3.4}$$

は well-defined かつ全単射である．

注 3.8. $(\mathbf{S},\mathbf{M})$ が 1 点付閉曲面の場合は，A として両端のタグがどちらもプレーンであるような弧全体，$\mathfrak{A}$ として両端のタグがどちらもプレーンであるような弧のみから構成されるタグ付三角形分割をとることで，定理 3.7 と同様の定理が成り立つ．

これらの対応により，点付曲面から誘導される団パターン，団代数における問題を，点付曲面における問題に帰着させることができる．

4 C 行列，G 行列，F 多項式

ここからは，団代数を決定する団パターンとその変異の性質に絞って話を進める．まず C 行列，G 行列，F 多項式について定義する．

定義 4.1. 団パターンの頂点 t に付随する行列 $C_t^{B;t_0} = (c_{ij;t})$ を次のように定義する．

まず $t = t_0$ のとき $c_{ij;t_0} = \delta_{ij}$（クロネッカーのデルタ）とし，$t \overset{\ell}{\text{---}} t'$ に対して，

$$c_{ij;t'} = \begin{cases} -c_{i\ell;t} & (j = \ell); \\ c_{ij;t} + c_{i\ell;t}[b_{\ell j;t}]_+ + [-c_{i\ell;t}]_+ b_{\ell j;t} & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{4.1}$$

で漸次的に定める．ただし，$b_{ij;t}$ は B_t の (i,j) 成分である．これを C **行列** *(C-matrix)* と呼ぶ．

定義 4.2. 団パターンの頂点 t に付随する行列 $G_t^{B;t_0} = (g_{ij;t})$ を次のように定義する．

まず $t = t_0$ のとき $g_{ij;t_0} = \delta_{ij}$（クロネッカーのデルタ）とし，$t \overset{\ell}{\text{---}} t'$ に対して，

$$g_{ij;t'} = \begin{cases} g_{ij;t} & (j \neq \ell); \\ -g_{i\ell;t} + \sum_{k=1}^{n} g_{ik;t}[b_{k\ell;t}]_+ - \sum_{k=1}^{n} b_{ik}[c_{k\ell;t}]_+ & (j = \ell). \end{cases} \tag{4.2}$$

で漸次的に定める．これを G **行列** *(G-matrix)* と呼ぶ．

定義 4.3. 団パターンの頂点 t に付随する多項式族 $\{F_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})\}_{1\leq i\leq n}$ を次のように定義する．

まず $t = t_0$ のとき任意の $1 \leq i \leq n$ に対して $F_{i;t_0}^{B;t_0}(\mathbf{y}) = 1$ とし，$t \overset{\ell}{\text{---}} t'$ に対して，

$$F_{i;t'}^{B;t_0}(\mathbf{y}) = \begin{cases} F_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}) & (i \neq \ell); \\ \dfrac{\prod_{k=1}^{n} y_k^{[c_{k\ell;t}]_+} \prod_{k=1}^{n} (F_{k;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}))^{[b_{k\ell;t}]_+} + \prod_{k=1}^{n} y_k^{[-c_{k\ell;t}]_+} \prod_{k=1}^{n} (F_{k;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}))^{[-b_{k\ell;t}]_+}}{F_{\ell;t}(\mathbf{y})} & (i = \ell) \end{cases} \tag{4.3}$$

で漸次的に定める．これを F **多項式** *(F-polynomial)* と呼ぶ．

注 4.4. 定義からは非自明な事実であるが，これにより定義される $F_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})$ 達は多項式となる．

これらの重要性は，これらが任意の係数を持つ団パターンの完全に構造を決定するという点にある．

命題 4.5 ([FZ07, Proposition 3.13])**.** $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)$ を初期頂点が t_0 であるような任意の団パターンとする．このとき，任意の $t \in \mathbb{T}_n$ と $j \in \{1, \ldots, n\}$ について，

$$y_{j;t} = \prod_{k=1}^{n} y_k^{c_{kj}} \prod_{k=1}^{n} (F_{k;t}^{B;t_0}|_{\mathbb{P}}(\mathbf{y}))^{b_{kj;t}}. \tag{4.4}$$

が成立する．ここで，$|_{\mathbb{P}}$ は加法を $\mathbb{P}$ についての加法 $\oplus$ にする操作を表す．

命題 4.6 ([FZ07, Corollary 6.3])**.** $t \mapsto (\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)$ を初期頂点が t_0 であるような任意の団パターンとする．このとき，次が成立する；

$$x_{j;t} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{g_{ij;t}} \frac{F_{j;t}^{B;t_0}|_{\mathcal{F}}(\hat{\mathbf{y}})}{F_{j;t}^{B;t_0}|_{\mathbb{P}}(\mathbf{y})}. \tag{4.5}$$

ただし，$\hat{y}_i = y_i \prod_{i=1}^{n} x_i^{b_{ij}}$ である．

これらの命題より，主係数を持つ団パターンは C 行列，G 行列，F 多項式，交換行列 B_t の 4 つの要素で決定されることがわかる．

5 F 行列の一意性と F 多項式の復元

F 行列とは，n 個の F 多項式の最高次数に関する情報を持つ行列である．

定義 5.1 ([FG18, Proposition 2.6])**.** B を t_0 における初期交換行列とする．任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ と $t \in \mathbb{T}_n$ について，$f_{1i;t}^{B;t_0}, \ldots, f_{ni;t}^{B;t_0}$ を i 番目の F 多項式 $F_{i;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})$ における $y_1, \ldots, y_n$ の最大冪であるとする．このとき，非負整数ベクトル $\mathbf{f}_{i;t}^{B;t_0} = \begin{bmatrix} f_{1i;t}^{B;t_0} \\ \vdots \\ f_{ni;t}^{B;t_0} \end{bmatrix}$ を t における **f ベクトル** *(**f**-vector)* と呼び，$\mathbf{f}_{1;t}^{B;t_0}, \ldots, \mathbf{f}_{n;t}^{B;t_0}$ を順に横に並べた $n \times n$ 行列 $F_t^{B;t_0}$ を t における F **行列** *(F-matrix)* という．

1 節で述べたように，この行列を用いることで F 多項式を線形代数的な道具を用いて調べることができる．これを利用した例として F 行列の自己双対性と呼ばれる性質が存在する（これについては同じく本研究集会に参加する藤原祥吾氏の講演とテクニカルレポートを参照していただきたい）．しかし，F 多項式の定義を見ればわかるように，F 多項式から F 行列を定義する際には大幅な情報の削減が起こっている．もしこの F 行列が F 多項式にとって枝葉末節な情報であるならば，この行列やその性質を考える意味は薄いであろう．そこで私は，F 行列が F 多項式の「本質的な」情報であるか，という点について考えた．ここでいう F 多項式の「本質的な」情報とは，F 多項式を一意に決定できるだけの情報，という意味である．

予想 5.2. t, t' を $\mathbb{T}$ の頂点とする．このとき，

$$F_t^{B;t_0} = F_s^{B;t_0} \Rightarrow \{F_{1;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}), \ldots, F_{n;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})\} = \{F_{1;s}^{B;t_0}(\mathbf{y}), \ldots, F_{n;s}^{B;t_0}(\mathbf{y})\} \tag{5.1}$$

が成立する．

さらに予想 5.2 が成り立つクラスについてはより具体的に，次の問題を考える．

問題 5.3. 初期交換行列 B と F 行列が与えられたとき，そこから F 多項式を復元する公式あるいはアルゴリズムは存在するか．

これらが解決されることにより，団変数と係数は $\{B_t\}_{t\in\mathbb{T}}$，$\{C_t^{B;t_0}\}_{t\in\mathbb{T}}, \{G_t^{B;t_0}\}_{t\in\mathbb{T}}$，$\{F_t^{B;t_0}\}_{t\in\mathbb{T}}$ で表現されることになり，団代数において F 行列を考える重要性が保証されることになる．百合草寿哉氏との共同研究により，この予想と問題について点付曲面から誘導される団代数において解決した [GY18]．これを説明する．まず，点付曲面における F 行列の対応物を考える．

定義 5.4 ([QZ17, Definition 3.3])**.** 任意の $(\mathbf{S},\mathbf{M})$ の弧 δ と ϵ に対して， δ と ϵ の**交点数** *(intersection number)* を次のように定義する：δ と ϵ の道ホモトピーで交差数が最小の組を δ_0 と ϵ_0 とする．$\mathsf{Int}(\delta,\epsilon) = A + B + C$ が交点数である．ただし，

- A は δ_0 と ϵ_0 の $\mathbf{S}\setminus\mathbf{M}$ における交差数,
- B は δ_0 と ϵ_0 の共通の端点側の端におけるタグが一致しているものの個数,
- C は δ と ϵ が共役な弧の組ならば -1，それ以外の時 0

である．

交点数を用いて，タグ付弧とタグ付三角形分割との間に定まる交点ベクトル，タグ付三角形分割の間に定まる交点行列を定義する．

定義 5.5 ([GY18])**.** $(\mathbf{S},\mathbf{M})$ のタグ付弧 δ とタグ付三角形分割 T, $T' = \{\delta_1,\dots,\delta_n\}$ について，

$$\mathsf{Int}(\delta,T) := (\mathsf{Int}(\delta,t))_{t\in T} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}, \tag{5.2}$$
$$\mathsf{Int}(T',T) := \big(\mathsf{Int}(\delta_1,T)\cdots\mathsf{Int}(\delta_n,T)\big) \in M_n(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{5.3}$$

とする．$(\mathbf{S},\mathbf{M})$ の任意のタグ付弧 δ に対して，T との**交点ベクトル** *(intersection vector)* を $\mathsf{Int}(\delta,T)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ で，任意のタグ付三角形分割 T' に対して T との**交点行列** *(intersection matrix)* を $\mathsf{Int}(T',T)\in M_n(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ で定義する．

実は，ここで定義した交点行列が団パターンにおける F 行列となっている．

定理 5.6 ([Yur18, Theorem 1.8])**.** $(\mathbf{S},\mathbf{M})$ とそのタグ付三角形分割 T をにおける任意のタグ付き弧 δ について，定理 3.7 を通して対応する団変数から得られる $\mathbf{f}$ ベクトルを $\mathbf{f}_\delta$ とする．このとき，$\mathbf{f}_\delta = \mathsf{Int}(\delta,T)$ が成立する． 特に，タグ付三角形分割 T' に対応する団から得られる F 行列を $F_{T'}$ とすると，$F_{T'} = \mathsf{Int}(T',T)$ が成立する．

さらに，交点行列については次の性質がわかっている：

定理 5.7 ([GY18])**.** $(\mathbf{S},\mathbf{M})$ と T を 4 点球面における例外的三角形分割でないような点付曲面とタグ付三角形分割とする． T' と T'' を $(\mathbf{S},\mathbf{M})$ のタグ付三角形分割とする．このとき，$\mathsf{Int}(T',T) = \mathsf{Int}(T'',T)$ ならば $T' = T''$ である．

ただし，4 点球面における例外的三角形分割とは次にあげる図 4 に示されるような三角形分割のこ

とである．

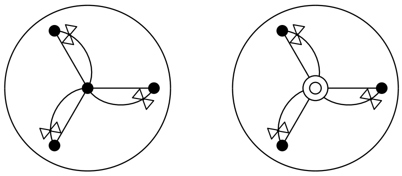

図 4　例外的三角形分割

（ただし，右図中央の穴はここに入る弧の端が全てノッチタグを持っていることを示す）

これを団パターンの性質に言い換えることで次の性質が導かれる．これが本講演の主題となる定理である．

定理 5.8 ([GY18])**．** 点付曲面 $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ と T を 4 点球面における例外的三角形分割でないような点付曲面とタグ付三角形分割とする．この点付曲面とタグ付三角形分割からから誘導される団パターン $t \mapsto \{\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ について，次が成り立つ：t, t' を $\mathbb{T}$ の頂点とする．このとき，

$$F_t^{B;t_0} = F_s^{B;t_0} \Rightarrow \{x_{1;t}, \ldots, x_{n;t}\} = \{x_{1;s}, \ldots, x_{n;s}\} \tag{5.4}$$

特に，

$$\{F_{1;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}), \ldots, F_{n;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})\} = \{F_{1;s}^{B;t_0}(\mathbf{y}), \ldots, F_{n;s}^{B;t_0}(\mathbf{y})\} \tag{5.5}$$

となる．

紙数の都合上詳細は省くが，F 行列から F 多項式を復元する公式については [MSW13, Yur18] により導入された $(\mathbf{S}, \mathbf{M})$ 上の弧からその弧に対応する団変数の表示を求める**団展開公式** *(cluster expansion formula)* を経由して求めることができることがわかっている．

参考文献

[FG18] S. Fujiwara and Y. Gyoda, *Duality between front and rear mutations in cluster algebras*, 2018. preprint, arXiv:1808.02156 [math.RA].

[FST08] S. Fomin, M. Shapiro, and D. Thurston, *Cluster algebras and triangulated surfaces. part i: Cluster complexes*, Acta Math. **201** (2008), 83–146.

[FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster Algebra I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529.

[FZ07] ———, *Cluster Algebra IV: Coefficients*, Comp. Math. **143** (2007), 112–164.

[GY18] Y. Gyoda and T. Yurikusa, *Tagged triangulations from intersection numbers*, 2018. in preparation.

[MSW13] G. Musiker, R. Schiffler, and L. Williams, *Positivity for cluster algebras from surfaces*, Compos. Math. **149** (2013), no. 2, 217–263.

[NZ12] T. Nakanishi and A. Zelevinsky, *On tropical dualities in cluster algebras*, Contemp. Math. **565** (2012), 217–226.

[QZ17] Y. Qiu and Y. Zhou, *Cluster categories for marked surfaces: Punctured case*, Compos. Math. **153** (2017), no. 9, 1779–1819.

[Yur18] T. Yurikusa, *Combinatorial cluster expansion formulas from triangulated surfaces*, 2018. arXiv:1808.01567 [math.CO].