

区分的に連続な右辺を持つ常微分方程式について

京都大学大学院人間・環境学研究科共生人間学専攻

須田智晴 (Tomoharu SUDA)

概要

不連続なベクトル場により定義される常微分方程式は応用上重要であり、古くから研究されてきた。例えば、身近なところではブレーキの「鳴き」や地震のメカニズムはそのような形でモデル化できる。しかし、このような常微分方程式を数学的に定式化し、その解の概念を定めることはそれほど容易ではない。本稿では、区分的に連続なベクトル場を用いて定義される常微分方程式の基礎概念や応用例について概説した後、解の定義の方法に関する新たな結果を紹介する。

1 はじめに

連続なベクトル場により定義される常微分方程式の解について調べることは基本的であり、その性質についてはよく知られている。この条件下で初期値問題の解が存在することは言うまでもないだろう。また、例えば減衰振動の方程式はこのような例としてなじみ深いものである：

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

ここで、 β, k は非負の定数とする。これは変数 $v = \frac{dx}{dt}$ を導入すれば、次の形に書き直せて、確かに連続なベクトル場であらわされることが分かる。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -kx - \beta v \end{pmatrix}$$

ところで、この系では確かに摩擦が考慮されているが、それは空気抵抗といった粘性による摩擦であり、高校物理でよく知られた乾燥摩擦 (dry friction) ではない。もしこの効果を導入すると、どのような形の方程式になるだろうか。乾燥摩擦の最も簡単なモデルである Coulomb モデルは、次の形で与えられる [11]。

$$F(v) = -f_c \operatorname{sgn}(v).$$

ただし、 $\operatorname{sgn}(v)$ は v の符号であり^{*1}、 f_c は正の定数である。したがって、乾燥摩擦の効果も考慮に入れると、次の方程式を得る。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -kx - \beta v - f_c \operatorname{sgn}(v) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

図 1 は $k = 1, \beta = 0, f_c = 1$ における解の軌道の様子である。

^{*1} $v = 0$ での値の決め方は複数存在する。

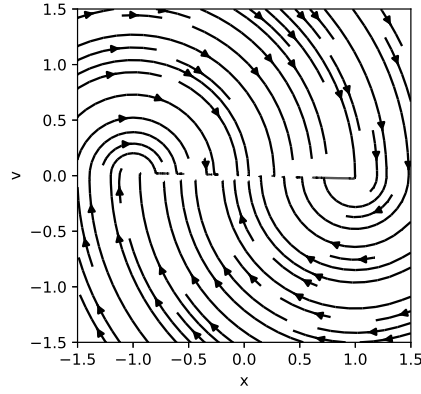


図1 $k = 1, \beta = 0, f_c = 1$ における方程式 (1) の解の軌道の様子.

ベクトル場の形からわかるように，乾燥摩擦を取り入れた問題は，連続なベクトル場に関する理論だけでは扱えない．また，連続な場合とは質的に異なる現象も生じている．図からわかるように， $v = 0$ 上の $-1 < x < 1$ の範囲では，ベクトル場の零点でないにもかかわらず，平衡点らしきものが生じている．また，この「平衡点」集合の両端での挙動はかなり奇妙である．

乾燥摩擦がかかわる現象は数多い．特に，ブレーキの「鳴き」や地震などは乾燥摩擦により生じる振動である [5, 4]．しばらく滑ったのち，摩擦の効果で動きが止まることを繰り返すため振動が生じる．こうしたスリップ・スティック (slip-stick) 現象には不連続性が本質的に効いている．

さて，方程式 (1) は，区分的に連続な右辺を持つ常微分方程式の一例である．このようなものに関しては，一部の場合を除いて，常微分方程式の解を連続な場合と同じ形で定義することはできない．そこで，解の定義を改めて考える必要がある．本稿では，区分的に連続な右辺を持つ常微分方程式の理論のうち，その解の定義に関する部分について概観する．まず，第2節では区分的に連続なベクトル場という概念を定義する．次に，第3節では解の定義を与える．そして，第4節では解の定義に用いられる，Filippov ベクトル場の特徴づけについて新しい結果を紹介する．

2 区分的に連続なベクトル場

先ほど例に挙げた方程式 (1) を定義するベクトル場は $v = 0$ で不連続である．また， $v > 0$ ， $v < 0$ の各領域でベクトル場は連続である．しかし，このようなベクトル場については不連続点を持つとみなすよりも，ある集合を境にいくつかの連続なベクトル場がつなぎ合わされているとみなすほうが扱いやすい．そこで，次のように定義する．

定義 1 (区分的に連続なベクトル場)． $n \geq 2$ に対し， $u : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ を C^1 -関数とする． $\mathbb{R}^n$ 上で定義された，

$$\Sigma = \{(\tilde{\mathbf{x}}, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = u(\tilde{\mathbf{x}})\}$$

を不連続点集合 (discontinuity set) に持つ区分的に連続なベクトル場 (piecewise-continuous vector field) とは，ベクトル場の組 (X_1, X_2) であって， X_1 と X_2 がそれぞれ $G_1 := \{\mathbf{x} \mid u(\tilde{\mathbf{x}}) > x_n\}$ と

$G_2 := \{\mathbf{x} \mid u(\tilde{\mathbf{x}}) < x_n\}$ の閉包上で連続なものである．区分的に連続なベクトル場を (X_1, X_2, Σ) と書く．

Σ の $\mathbf{x}$ における法線ベクトルは

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) := \frac{-1}{\sqrt{1 + |\nabla u(\mathbf{x})|^2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}(\mathbf{x}), -1 \right)^T$$

と定義する．また， $X_{1N}(\mathbf{x}) := X_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$ ， $X_{2N}(\mathbf{x}) := X_2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$ と定義する． $\mathbb{R}^n$ 上で定義された， Σ を不連続点集合にもつ区分的に連続なベクトル場全体の集合を $C_*(\mathbb{R}^n, \Sigma)$ と表記する．

ここでは簡単のために不連続点集合が超曲面 1 つで与えられている場合のみを考える．より一般の場合にはさらなる議論が必要であり，適切に定義することはそれほど簡単ではない．例えば，2 次元平面の場合については [3] で論じられている．

3 解の定義

不連続点集合があるため，区分的に連続なベクトル場について，それにより定義される常微分方程式の解を，連続なベクトル場に対するそれと同じように定義することはできない．このことは，次の例を見れば納得できるだろう．

例 2.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & (y \geq 0) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & (y < 0) \end{cases} \quad (2)$$

ベクトル場が連続となる領域での解をつなぎ合わせれば「解」の軌道らしきものが得られる．こうして得られた軌道の様子を図 3 の左図に示す．

例 3.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & (y \geq 0) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & (y < 0) \end{cases} \quad (3)$$

例 2 と同様にして得た「解」の軌道の様子を図 3 の右図に示す． $y = 0$ に一度入った軌道は，ベクトル場の形から $y \neq 0$ となることができない．しかし，与えられたベクトル場の $y = 0$ での値はこのような挙動とは矛盾する．

そこで，区分的に連続なベクトル場についても解の概念を，例 3 のような場合でも矛盾がないように定めたい．この定義には何通りかの方法があるが^{*2}，もっともシンプルなのは微分包含式を用いて定義する方法である．まず，微分包含式は次のように定義される．

^{*2} ここで紹介する定義は Filippov による [6]．このほかに，Viktorovskii による定義は先駆的であるが，旧ソ連圏以外

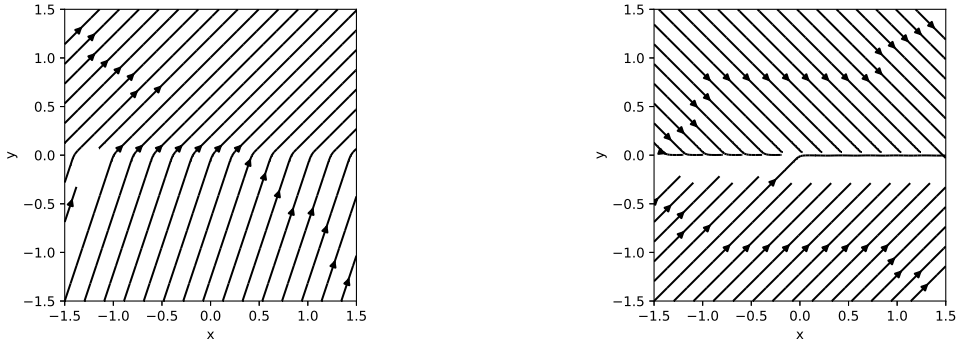


図2 左：方程式 (2) の軌道の様子．右：方程式 (3) の軌道の様子．

定義 4 (微分包含式 [1]). F を $\mathbb{R}^n$ 上で定義された集合値関数であって, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ において $F(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^n$ となるものとする. 次の形の方程式を, (自励的な) 微分包含式 (differential inclusion) という.

$$\dot{\mathbf{x}} \in F(\mathbf{x}). \quad (4)$$

これは常微分方程式の一般化であり, その解は次のように定義される.

定義 5 (微分包含式の解). 区間 $I = [a, b) \subset \mathbb{R}$ 上で定義された写像 $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ が微分包含式 (4) の解であるとは, $\mathbf{x}(t)$ は I 上で一様連続かつ, I 上のほとんどいたるところで微分包含式 (4) をみたす, すなわち

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in F(\mathbf{x}(t))$$

となることである.

一様連続性の仮定は $\dot{\mathbf{x}}(t)$ が意味を持つために必要である. 集合値関数について, その連続性は次のような形で述べられる. なお, 集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ に対し, その閉 ϵ -近傍を

$$M^\epsilon := \{\mathbf{x} \mid \inf_{\mathbf{y} \in M} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \epsilon\}$$

と定義している.

定義 6 (上半連続性). F を $\mathbb{R}^n$ 上で定義された集合値関数であって, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ において $F(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^n$ となるものとする. F が $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ で上半連続 (upper semi-continuous) であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$F(\{\mathbf{z}\}^\delta) := \bigcup_{\mathbf{y} \in \{\mathbf{z}\}^\delta} F(\mathbf{y}) \subset F(\mathbf{z})^\epsilon$$

となることである.

もし F が任意の $\mathbf{z} \in A \subset \mathbb{R}^n$ で上半連続ならば, F は A 上で上半連続という.

ではあまり知られていないようである [13]. より最近のものとしては, Guardia, Seara, Teixeira らによる定義もよく用いられる [8].

微分包含式の解の存在については次の定理が知られている。

定理 7. [[7], p.77] F を $\mathbb{R}^n$ 上で定義された集合値関数であって、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ において $F(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^n$ となるものとする。もし F が $\mathbb{R}^n$ 上で上半連続であり、任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ において $F(\mathbf{x})$ が空でない有界な閉凸集合であれば、任意の $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ に対し、微分包含式 (4) の $\mathbf{z}$ を初期値とする解が存在する。

そこで、微分包含式を用いて、区分的に連続なベクトル場が定める常微分方程式の解（以下、区分的に連続なベクトル場の解とも呼ぶ）を次のように定義できる。

定義 8 (区分的に連続なベクトル場の解 [6]). (X_1, X_2, Σ) を区分的に連続なベクトル場とする。各 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ において、集合 $F(\mathbf{x})$ を次のように定める。

1. もし $\mathbf{x} \in G_i$ ならば、 $F(\mathbf{x}) = \{X_i(\mathbf{x})\}$.
2. もし $\mathbf{x} \in \Sigma$ ならば、 $F(\mathbf{x}) = \{\alpha X_1(\mathbf{x}) + (1 - \alpha)X_2(\mathbf{x}) \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$.

区間 $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ 上で定義された写像 $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ が区分的に連続なベクトル場 (X_1, X_2, Σ) の解であるとは、こうして構成した集合値関数 F により定義される微分包含式の解となることである。

もし X_1, X_2 が Σ 上で連続であった場合、 $F(\mathbf{x}) = \{X(\mathbf{x})\}$ という形になるため、上の定義は通常の常微分方程式の場合に一致する。定理 7 を用いて、この定義の下で区分的に連続なベクトル場の解が存在することも保証される。

特に、点 $\mathbf{x} \in \Sigma$ において $X_{1N}(\mathbf{x})X_{2N}(\mathbf{x}) \leq 0$ となる場合、上で構成した $F(\mathbf{x})$ は Σ に接するベクトルを含む。具体的には、

$$X_0(\mathbf{x}) = \frac{X_{2N}(\mathbf{x})}{X_{2N}(\mathbf{x}) - X_{1N}(\mathbf{x})} X_1(\mathbf{x}) + \frac{X_{1N}(\mathbf{x})}{X_{1N}(\mathbf{x}) - X_{2N}(\mathbf{x})} X_2(\mathbf{x}) \quad (5)$$

であり、 Σ の部分集合

$$R_s(X_1, X_2, \Sigma) := \{\mathbf{x} \in \Sigma \mid X_{1N}(\mathbf{x})X_{2N}(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ and } X_{1N}(\mathbf{x}) \neq X_{2N}(\mathbf{x})\}$$

において X_0 はベクトル場を定義する。これは $X_0(\mathbf{x}) \in F(\mathbf{x})$ をみたし、しかも Σ に接する。したがって、 X_0 についての通常の意味での解は、上で定義した意味でも解になっているのみならず、 Σ 近傍におけるベクトル場の様子から要請される挙動を示す。このようにして得られるベクトル場 X_0 を **Filippov** ベクトル場と呼ぶ。区分的に連続なベクトル場の解を、通常のベクトル場の解と Filippov ベクトル場の解をつなぎ合わせたものとして定義している文献も多い。

4 Filippov ベクトル場の特徴づけ

微分包含式を用いて、区分的に連続なベクトル場の解を定義することはできた。ただ、このように定義することはどの程度自然なのだろうか。特に、凸性の仮定は人為的にも思える。実際、通常のベクトル場の解と R_s におけるベクトル場の解をつなぎ合わせて、区分的に連続なベクトル場の解を定義する際に、Filippov ベクトル場以外を用いた研究も存在する [9]。

しかし、実はいくつかの自然な仮定から Filippov ベクトル場の表式 (5) を得ることができる [12]。以下では簡単のため、 $\Sigma = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n = 0\}$ という場合についてこのことを説明しよう。よ

り一般的な場合も同様の結果は成り立つ。

まず、 R_s におけるベクトル場の与え方は、各点における X_1, X_2 の値のみに依存しているものとする。このとき、こうしたベクトル場は $D := \{(\mathbf{p}, q, \mathbf{r}, s) \in \mathbb{R}^{2n} \mid qs \leq 0 \text{ and } q \neq s\}$ から $\mathbb{R}^{n-1}$ への写像 α で表現できる。

こうしたベクトル場の決め方は、座標変換と矛盾のないようにするべきである。そこで、正則行列 A について、 $T_A(\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n = 0\}) \subset \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n = 0\}$ ならば $A(\alpha(\mathbf{p}, q, \mathbf{r}, s), 0)^T = \alpha(A(\mathbf{p}, q)^T, A(\mathbf{r}, s)^T)$ をみたす、という条件を課す。ただし、 $T_A(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ である。さらに α の微分可能性も仮定すると、上述の座標変換に関する条件から、 $\alpha(\mathbf{p}, q, \mathbf{r}, s) = A(q, s)\mathbf{p} + B(q, s)\mathbf{r}$ という形になることが示せる。ここで、 A, B は q と s について 0-同次な行列値関数である。また、簡単な計算により $(\mathbf{p}, q)$ と $(\mathbf{r}, s)$ が一次従属ならば $\alpha(\mathbf{p}, q, \mathbf{r}, s) = \mathbf{0}$ となることも示せる。

さて、区分的に連続なベクトル場 (X_1, X_2, Σ) が Σ 上で連続になるとき、そこでのベクトル場の与え方は自明である。この場合との整合性を要求することは自然であろう。そこで、次の条件を課す。任意の $\mathbf{p}$ と数列 $\{q_m\}, \{s_m\}$ で、 $q_m s_m \leq 0$ かつ $q_m \neq s_m$ 、さらに $\lim_{m \rightarrow \infty} q_m = 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = 0$ となるものについて、 $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_\Sigma(\mathbf{p}, q_m, \mathbf{p}, s_m) = \mathbf{p}$ が成り立つものとする。

以上に述べた条件を仮定すれば、次の補題により Filippov ベクトル場の表式 (5) を得ることができる。

補題 9. $\alpha(\mathbf{p}, q, \mathbf{r}, s)$ を $D := \{(\mathbf{p}, q, \mathbf{r}, s) \in \mathbb{R}^{2n} \mid qs \leq 0 \text{ and } q \neq s\}$ から $\mathbb{R}^{n-1}$ へのベクトル値関数で、次の条件を満たすものとする。

1. $\alpha(\mathbf{p}, q, \mathbf{r}, s) = A(q, s)\mathbf{p} + B(q, s)\mathbf{r}$. ただし、 A と B は q と s について 0-同次な行列値関数である。
2. $(\mathbf{p}, q)$ と $(\mathbf{r}, s)$ が一次従属ならば $\alpha(\mathbf{p}, q, \mathbf{r}, s) = \mathbf{0}$.
3. 任意の $\mathbf{p}$ と数列 $\{q_m\}, \{s_m\}$ で、 $q_m s_m \leq 0$ かつ $q_m \neq s_m$ 、さらに $\lim_{m \rightarrow \infty} q_m = 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = 0$ となるものについて、 $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_\Sigma(\mathbf{p}, q_m, \mathbf{p}, s_m) = \mathbf{p}$ が成り立つ。

このとき、 α は次の形である。

$$\alpha(\mathbf{p}, q, \mathbf{r}, s) = \frac{s}{s-q}\mathbf{p} + \frac{q}{q-s}\mathbf{r}.$$

5 おわりに

本稿では、区分的に連続なベクトル場の概念を定義し、それによって定められる常微分方程式の解を定義した。また、その定義の自然さについても検討した。ただし、ここに述べたのは最も簡単な場合の、解の定義に関する話だけである。より一般の場合について、十分な厳密さをもってこれらの概念を定義することは、はるかに難しい。また、スリップスティックなどの不連続性に起因する現象を調べることは応用上重要であり、数学的にも興味深いが本稿ではあまり触れられなかった。興味のある方は、[2, 10]などを参照するとよいだろう。

参考文献

- [1] J. P. Aubin and A. Cellina. Differential inclusions: set-valued maps and viability theory. 1984.
- [2] M. Bernardo, C. Budd, A. R. Champneys, and P. Kowalczyk. *Piecewise-smooth dynamical systems: theory and applications*, volume 163. Springer Science & Business Media, 2008.
- [3] M. E. Broucke, C. Pugh, and S. N. Simic. Structural stability of piecewise smooth systems. *Comput. Appl. Math*, 20(1-2):51–89, 2001.
- [4] R. Burridge and L. Knopoff. Model and theoretical seismicity. *Bulletin of the seismological society of america*, 57(3):341–371, 1967.
- [5] P. Duffour. *Noise generation in vehicle brakes*. PhD thesis, University of Cambridge, 2003.
- [6] A. F. Filippov. *Differential equations with discontinuous right-hand side*, volume 42 of *AMS Translations Series 2*, pages 199–231. 1964.
- [7] A. F. Filippov. *Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems*, volume 18. Springer Science & Business Media, 1988.
- [8] M. Guardia, T. M. Seara, M. A. Teixeira, et al. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. *J. Differential Equations*, 250(4):1967–2023, 2011.
- [9] M. R. Jeffrey. Hidden dynamics in models of discontinuity and switching. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 273:34–45, 2014.
- [10] O. Makarenkov and J. S. W. Lamb. Dynamics and bifurcations of nonsmooth systems: A survey. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 241(22):1826–1844, 2012.
- [11] H. Olsson, K. J. Åström, C. C. De Wit, M. Gäfvert, and P. Lischinsky. Friction models and friction compensation. *Eur. J. Control*, 4(3):176–195, 1998.
- [12] T. Suda. How natural is the definition of the Filippov vector field? (*in preparation*).
- [13] E. E. Viktorovskii. On a generalization of the concept of integral curves for a discontinuous field of directions. *Mat. Sb. (N.S.)*, 34(76):213–248, 1954. (In Russian).