Generalized zeta function formulas for a simple graph with bounded degree

高坂太智 (Taichi KOUSAKA)*
九州大学大学院数理学府数理学専攻

2015 年に G. Chinta 氏, J. Jorgenson 氏 及び A. Karlsson 氏らによって有限とは限らない頂点推移グラフに対して, 伊原ゼータ函数が定義され, その伊原の公式が示された. 本講演では, より一般に, 頂点推移とは限らないグラフに対して, 彼らと同じアイデアを用いて伊原ゼータ函数及び Bartholdi ゼータ函数を定義し, その伊原の公式を紹介する.

序

古くからグラフの性質とグラフの不変量との関連について様々な研究がなされてきた. その中でもスペクトルグラフ理論と呼ばれる分野は, グラフの性質とグラフの一つの不変量であるラプラシアンのスペクトルとの関連に焦点を当てた分野である. 本講演では特に, グラフの性質とグラフのラプラシアンのスペクトルとの関連について, 整数論的な側面について調べることを主題とする.

有限グラフに対するゼータ函数

グラフ $X = (VX, EX)$ を連結単純グラフとし, グラフ X のラプラシアンを Δ_X と表す. 有限グラフ X に対して, グラフの性質の中でもグラフの閉測地線とグラフのラプラシアンのスペクトルとの関連について良く調べられている. その関連を表す一つの等式が, 本講演の主題である伊原の公式と呼ばれる公式である. 有限グラフ X に対する伊原ゼータ函数とは, 次で定義されるゼータ函数である:

$$Z_X(u) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{m} u^m\right).$$

ここで, N_m はグラフ X における長さ m の閉測地線の個数を表す. このタイプのゼータ函数はもともと 1966 年に伊原康隆氏により整数論の文脈において, セルバーグ型のゼータ函数として導入された (cf. [15]). その後, 有限グラフのおいても同様にゼータ函数が定義されると J. P. Serre 氏により示唆され, 砂田利一氏, 橋本喜一朗氏, H. Bass 氏らにより研究が進められた (cf. [2], [10], [11], [12], [13], [14], [16], [18], [19], [20]). 伊原ゼータ函数に対して, 次の公式が有名かつ重要な公式である ([21]):

$$Z_X(u)^{-1} = (1-u^2)^{-\chi(X)} \det\big(I - u(D_X - \Delta_X) + u^2(D_X - I)\big).$$

* t-kosaka@math.kyushu-u.ac.jp

ここで, X のオイラー標数を $\chi(X)$ と表し, valency operator と呼ばれる作用素を D_X と表した. 特に, X が $(q+1)$-正則グラフである場合, この公式は次のように表すことができる:

$$Z_X(u)^{-1} = (1-u^2)^{\frac{1}{2}n(q-1)} \prod_{\lambda \in \sigma(\Delta_X)} (1-(q+1-\lambda)u+qu^2)^{\mathrm{m}(\lambda)}.$$

ここで上において, 頂点集合の濃度を n, ラプラシアン Δ_X のスペクトルを $\sigma(\Delta_X)$, 固有値 λ の重複度を $\mathrm{m}(\lambda)$ と表した. この公式は本質的には伊原康隆氏により 1966 年に示された公式である ([15]). またこの公式はグラフの閉測地線とラプラシアンのスペクトルとの関連を明示的に表しており, ラプラシアンのスペクトルの整数論的な性質を表す一つの等式であると言える. このようなタイプの等式のことを本講演では, **伊原タイプの公式**と呼ぶ.

その後, 1999 年に L. Bartholdi 氏により次のようなゼータ函数が導入された ([1]):

$$Z_X(u,t) = \exp\left(\sum_{C \in \mathcal{C}} \frac{1}{\ell(C)} t^{\mathrm{cbc}(C)} u^{\ell(C)} \right).$$

ここで, X における閉路全体の集合を $\mathcal{C}$, 閉路 C の長さを $\ell(C)$, cyclic bump count を $\mathrm{cbc}(C)$ と表した. このゼータ函数は Bartholdi ゼータ函数と呼ばれている. Bartholdi ゼータ函数において, $t=0$ とすると伊原ゼータ函数となることから, これは伊原ゼータ函数の一つの一般化である. さらに, Bartholdi ゼータ函数に対して次の公式が知られている ([1]):

$$\begin{aligned} Z_X(u,t)^{-1} = &\left(1-(1-t)^2u^2\right)^{-\chi(X)} \\ &\times \det\left(I-u(D_X-\Delta_X)+(1-t)u^2(D_X-(1-t)I)\right). \end{aligned}$$

特に, X が $(q+1)$-正則グラフである場合, この公式は次のように表すことができる:

$$Z_X(u)^{-1} = (1-(1-t)^2u^2)^{\frac{1}{2}n(q-1)} \prod_{\lambda \in \sigma(\Delta_X)} (1-(q+1-\lambda)u+(q+t)(1-t)u^2)^{\mathrm{m}(\lambda)}.$$

この公式はグラフの閉路とラプラシアンのスペクトルとの関連を明示的に表しており, この公式もラプラシアンのスペクトルの整数論的な性質を表す一つの等式であると言える. このようなタイプの等式のことを本講演では, **Bartholdi タイプの公式**と呼ぶ.

より一般のグラフに対するゼータ函数

この節では, グラフ $X=(VX,EX)$ を高々可算個の頂点を持ち, 頂点次数が有界であるグラフとし, 前節と同様に X のラプラシアンを Δ_X と表す. 近年このような有限とは限らないグラフに対して, 様々なゼータ函数が考案されている (cf. [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [17]). その中でも [3] において, G. Chinta 氏, J. Jorgenson 氏, A. Karlsson 氏らは頂点推移である $(q+1)$-正則グラフ X 及び頂点 x_0 に対して, 次のようなゼータ函数を導入した:

$$Z_X(u,x_0) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m(x_0)}{m} u^m \right).$$

ここで, 頂点 x_0 を始点とする長さが m の閉測地線の個数を $N_m(x_0)$ と表した. 本講演では, これも伊原ゼータ函数という. 上において, グラフ X は頂点推移, すなわち, グラフ X の自己同型群

$\mathrm{Aut}(X)$ が頂点集合 VX に推移的に作用することから, $Z_X(u,x_0)$ は x_0 に依存しない. [3] において, G. Chinta 氏, J. Jorgenson 氏 及び A. Karlsson 氏らはこのゼータ函数に対して, 次の公式を証明した:

$$Z_X(u,x_0)^{-1}=(1-u^2)^{\frac{q-1}{2}}\exp\left(\int_{\sigma(\Delta_X)}\log(1-\big((q+1)-\lambda\big)u+qu^2)d\mu_{x_0,x_0}(\lambda)\right).$$

ここで, ラプラシアン Δ_X のスペクトル測度を E と表したとき,

$$d\mu_{x_0,x_0}(\lambda):=d\langle E(\lambda)\delta_{x_0},\delta_{x_0}\rangle$$

と表した. この公式は頂点 x_0 を始点とする閉測地線とラプラシアンのスペクトルとの関連を表しており, この公式も伊原タイプの公式であるということができる.

本講演では, 高々可算個の頂点を持ち, 頂点次数が有界である単純グラフに対して, [3] と同じアイデアを用いて伊原ゼータ函数を定義し, その伊原タイプの公式を紹介する. また, そのゼータ函数に対して, L. Bartholdi 氏と同じアイデアを用いてゼータ函数を一般化し, その Bartholdi タイプの公式も紹介する. 特に, 有限グラフの場合には, これらの公式から, 本稿で紹介した公式を導くことができる. その意味で本講演で紹介する公式はこれまで紹介した公式の一般化にもなっている.

参考文献

[1] L. Bartholdi, Counting paths in graphs, Enseign. Math. 45(1999)83–131.

[2] H. Bass, The Ihara-Selberg zeta function of a tree lattice, International. J. Math. 3 (1992), 717–797.

[3] G. Chinta, J. Jorgenson and A. Karlsson, Heat kernels on regular graphs and generalized Ihara zeta function formulas, Monatsh. Math., 178 (2015), 171–190.

[4] B. Clair and S. Mokhtari-Sharghi, Zeta functions of discrete groups acting on trees, J. Algebra 237 (2001), No. 2, 561–620.

[5] B. Clair, Zeta functions of graphs with $\mathbb{Z}$ actions, J. Combin. Theory Ser. B 99 (2009), No. 1, 48–61.

[6] A. Deitmar, Ihara zeta functions of infinite weighted graphs, SIAM J. Discrete Math., 29(4) (2015), 2100–2116.

[7] R. I. Grigorchuk and A. Żuk, The Ihara zeta function of infinite graphs, the KNS spectral measure and integrable maps, Random walks and geometry, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, pp. 141–180.

[8] D. Guido, T. Isola and M. L. Lapidus, Ihara zeta functions for periodic simple graphs, $C^\star$-algebras and elliptic theory *II*, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2008, pp. 103–121.

[9] D. Guido, T. Isola and M. L. Lapidus, Ihara's zeta function for periodic graphs and its approximation in amenable case, J. Funct. Anal. 255 (2008), No. 6, 1339–1361.

[10] K. Hashimoto and A. Hori, Selberg-Ihara's zeta function for p-adic groups, Automorphic forms and geometry of arithmetic varieties, Adv. Stud. Pure Math., vol. 15, Academic Press, Boston, MA, 1989, pp. 171–210.

[11] K. Hashimoto, Zeta functions of finite graphs and representations of p-adic groups, Automorphic forms and geometry of arithmetic varieties, Adv. Stu. Pure Math., vol. 15, Academic Press, Boston, MA, 1989, pp. 211–280.

[12] K. Hashimoto, On zeta and L-functions of finite graphs, Internet. J. Math. 1 (1990), no. 4, 381–396.

[13] K. Hashimoto, Artin type L-functions and the density theorem for prime cycles on finite graphs, Internet. J. Math. 3 (1992), no. 6, 809–826.

[14] K. Hashimoto, Artin L-functions of finite graphs and their applications, Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku 840 (1993), 70–81. Algebraic combinatorics (Kyoto, 1992).

[15] Y. Ihara, On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic field, J. Math. Soc. Japan 18 (1966), 219–235.

[16] M. Kotani and T. Sunada, Zeta functions of finite graphs, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 7 (2000), 7–25.

[17] O. Scheja, On zeta functions of arithmetically defined graphs, Finite Fields Appl. 5 (1999), No. 3, 314–343.

[18] J. P. Serre, Trees, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[19] T. Sunada, L-Functions in geometry and some applications, Curvature and topology of Riemannian manifolds (Katata, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1201, Springer, Berlin, 1986, pp. 266–284.

[20] T. Sunada, Fundamental groups and Laplacians, Geometry and analysis on manifolds (Katata/Kyoto, 1987), Lecture Notes in Math., vol. 1339, Springer, Berlin, 1988, pp. 248–277.

[21] A. Terras, Zeta functions of graphs. A stroll through the garden, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 128. Cambridge University Press, Cambridge, 2011.