

体心立方格子上的最近接モデルに対するレース展開

上島芳倫 (KAMIJIMA Yoshinori)*†

1 導入

統計力学における課題の一つに相転移・臨界現象がある。これを解明するために、様々な確率モデルが考えられてきた。例えば、多孔質の物質における浸透現象はパーコレーションによって、強磁性・常磁性相転移は Ising 模型によって解析できる。パーコレーションでは格子上的各ボンドに対して開いている・閉じているという2つの状態を与え、開いたボンド同士を繋いでできる塊——クラスターを考える。Ising 模型でも格子上的各サイトに対してアップ・ダウンの2値をとるスピン変数を定義し、同じ値のスピンをつないでできる塊——クラスターを考える。それぞれのクラスターは開いている程度を表すパラメータ p 、もしくは温度 T によって大きさが変化する。特に、臨界点 p_c および T_c をまたぐと巨大なクラスターが生成され、このとき相転移が起きる。実際、巨大なクラスターが存在する場合、パーコレーションでは浸透しない状態から浸透する状態へと変化し、また Ising 模型では巨視的にも磁石としての性質を示すようになる。

以上のモデル他に、自己回避歩行も相転移を示す。これは高分子鎖の配置を表すモデルとして知られている。自己回避歩行では原点から伸びる経路の本数 c_n を考え、それ（を最近接点の個数の n 乗で割ったもの）に対する母関数 $\chi_p = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p^n / [\text{最近接点の個数}]^n$ を定義する。 p をパラメータとみなして、この母関数 χ_p が発散する点（収束半径）が臨界点 p_c である。これを臨界点と呼ぶ理由はパーコレーションや Ising 模型の相転移と対比するとわかる。実際、 p が小さいところでは長い経路からの寄与が小さいが、 p が大きくなると長い経路からも効いてくる。ゆえに、 p_c 付近では高分子鎖が巨大になっているとみなせる。以下では特に、自己回避歩行とパーコレーションの相転移・臨界現象について述べる。

ところで、自己回避歩行の χ_p （パーコレーションに対しては原点を含むクラスターの大きさの期待値に相当）は p_c の近傍で漸近的に¹⁾ $\chi_p \asymp (p_c - p)^{-\gamma}$ と振る舞うことが知られている。ここに現れた指数 γ を臨界指数という。モデルを考えている格子を取り換えれば、当然、臨界点 p_c は変わる。しかし、臨界指数 γ は格子のようなモデルの詳細によらず、空間次元や対称性といった少数の要素のみで決定されると信じられている。さらに、十分高次元においては臨界指数は簡単な値²⁾に退化することが知られている。その簡単な値を平均場臨界指数と呼び、対応するランダム・ウォークの臨界指数に一致する。また、平均場臨界指数への退化が起こるぎりぎりの次元を

* 北海道大学大学院理学院数学専攻博士課程

† kamijima@math.sci.hokudai.ac.jp

1) 記号 ' \asymp ' は上下から同じオーダーで押さえられることを意味する。すなわち、Landau の記号を用いれば、関数 $f(p)$ と $g(p)$ に対して、 $f \asymp g \iff \mathcal{O}(g(p)) \leq f(p) \leq \mathcal{O}(g(p))$ as $p \rightarrow p_c$.

2) 整数値や分数値という意味。一般に臨界指数は小数で表されるような複雑な値をとる。

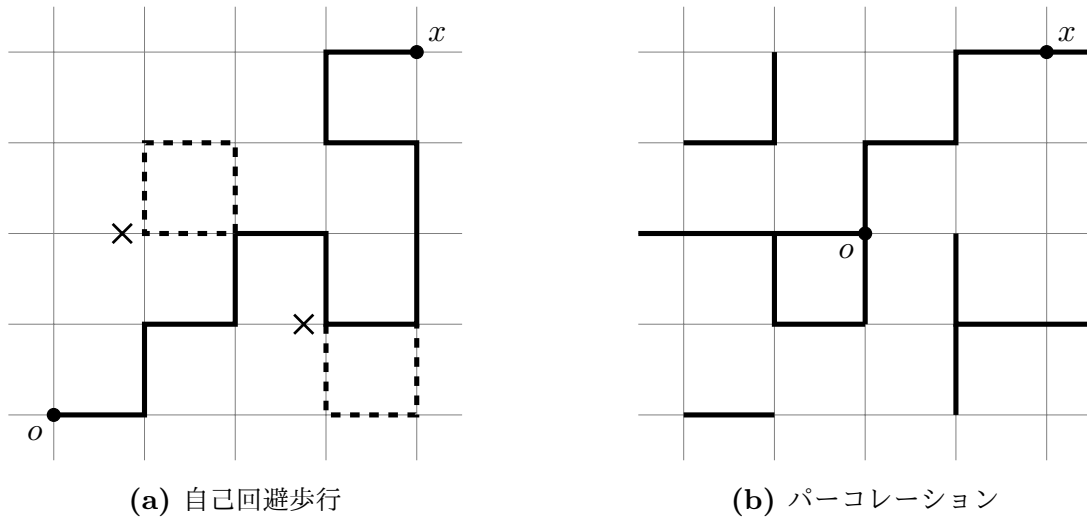


図 1: モデルの概念図. 自己回避歩行は自分自身と交わらないランダム・ウォークである. すなわち, 破線のようにループができることを禁止している. パーコレーションは各ボンドに対して独立な確率で開と閉の状態を与えるモデルである.

上部臨界次元 d_c という. 上部臨界次元は自己回避歩行で $d_c = 4$, パーコレーションで $d_c = 6$ と予想されている.

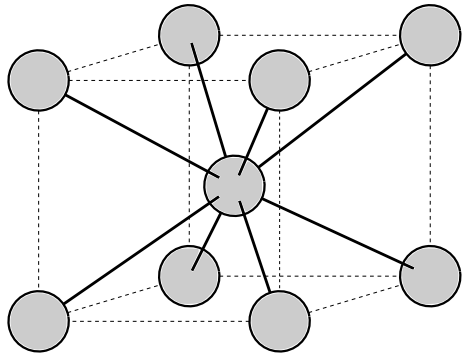
平均場臨界指数への退化は, 最近接自己回避歩行に対しては原と Slade が $d \geq 5$ で証明した [4, 5]. 一方で, 最近接パーコレーションに対しては Fitzner と van der Hofstad が $d \geq 11$ で証明した [1, 2]. これらの論文で使われた手法がレース展開³⁾である. 前者は上部臨界次元ギリギリのところまで証明されているが, 後者はそれより上であるため未解決である. それに加えて, 前者でも後者でも, その論文は非常に長いため (36 + 93 頁と 79 + 92 頁) 初学者が理解するのは容易ではなかった. そこで, 講演者らは体心立方格子上で解析を行った. 後で述べるように, 体心立方格子上ではランダム・ウォークの遷移確率が簡単になり, レース展開による解析の煩雑さを軽減する. その結果, 60 頁程度の長さに抑えつつ, 自己回避歩行に対しては $d \geq 6$ で, パーコレーションに対しては $d \geq 9$ で平均場臨界指数への退化を証明することができた [3]. 以下では体心立方格子と最近接モデルの数学的な定義を述べたあと, その証明の概要を紹介する.

2 モデルの定義

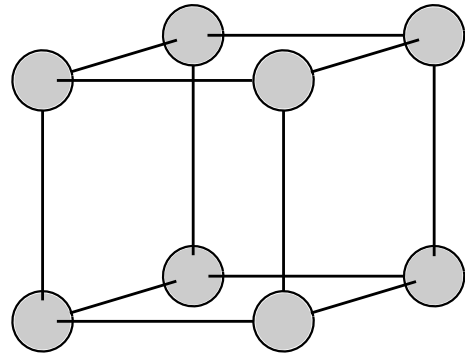
2.1 体心立方格子

d 次元体心立方格子 \mathbb{L}^d とは, 原点 $o = (0, \dots, 0)$ を含み, かつ最近接点の集合 $\{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d \mid \prod_{j=1}^d |x_j| = 1\}$ を平行移動することによって生成される集合 (図 2a) である. これは, 単純立方格子 \mathbb{Z}^d が最近接点の集合 $\{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d \mid \sum_{j=1}^d |x_j| = 1\}$ を平行移動することによって生成されること (図 2b) と対比するとわかりやすい. 単純立方格子の最近接点の数は $2d$ 個であるが, 体心立方格子の最近接点の数は 2^d 個となることに注意されたい. また, 点 $x, y \in \mathbb{L}^d$ が互いに隣接点, すなわち $\prod_{j=1}^d |x_j - y_j| = 1$ であることを $x \sim y$ で

³⁾ 特にパーコレーションの論文では non-backtracking lace expansion という, 通常のレース展開よりも複雑な展開方法を用いている.



(a) 体心立方格子 \mathbb{L}^d



(b) 単純立方格子 \mathbb{Z}^d

図 2: 格子の概念図. 実線は点同士が繋がっていることを表し, 点線は繋がっていないことを表す.

表す.

上のように \mathbb{L}^d を定義することによって, 1 歩の変位に対する d 次元ランダム・ウォークの遷移確率が⁴⁾

$$D(x) := \frac{1}{2^d} \mathbb{1}_{\{x \sim o\}} = \prod_{j=1}^d \frac{1}{2} \delta_{|x_j|, 1}$$

と簡単な形になる. 最後の表式は独立な d 個の 1 次元ランダム・ウォークの遷移確率に関する積になっている. 1 次元ランダム・ウォークに対しては特に Stirling の公式⁵⁾を用いた評価ができる. すなわち, $2n$ 歩で原点に戻って来る確率は⁶⁾

$$D^{*2n}(o) = \underbrace{(D * \dots * D)}_{2n\text{-fold}}(o) = \left(\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} \right)^d$$

と表されて, Stirling の公式によって二項係数のところを評価すれば

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2} \right)^{2n} \right)^d \leq \left[\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \exp \left(\frac{1}{24n} - \frac{2}{12n+1} \right) \right]^d \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \right)^d \quad (1)$$

を得る. この不等式評価から, $D^{*2n}(o)$ は上から押さえられる.

さらに, ランダム・ウォークのループ ε_1 とバブル ε_2 とトライアングル ε_3 を

$$\varepsilon_j = \sum_{n=1}^{\infty} D^{*2n}(o) \times \begin{cases} 1 & [j = 1] \\ (2n - 1) & [j = 2] \\ (2n - 1)n & [j = 3] \end{cases}$$

で定義する. これらの上界は (1) を用いて計算できる. その具体的な数値計算の結果を表 1 に示す.

⁴⁾ $\delta_{\cdot, \cdot}$ は Kronecker デルタ, $\mathbb{1}_{\cdot}$ は指示関数. また ‘:=’ は右辺によって左辺を定義するという意味.

⁵⁾ $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{12n+1} \leq \log \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} \leq \frac{1}{12n}$.

⁶⁾ 関数 $f, g: \mathbb{L}^d \rightarrow \mathbb{R}$ の畳み込みを $(f * g)(x) = \sum_{y \in \mathbb{L}^d} f(y)g(x-y)$ で表す.

2.2 ランダム・ウォークの臨界現象

モデルの定義を述べる前に、ランダム・ウォークを例としてその臨界指数が如何なる値になるかを示す。体心立方格子 \mathbb{L}^d における n 歩のランダム・ウォークの経路を、順序づけられた集合 $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$ で定義する。ただし、各 $i = 0, 1, \dots, n$ に対して $\omega_i \in \mathbb{L}^d$ である。経路の歩数を $|\omega| = n$ と記す。原点 o から点 x に至る n 歩の経路全体を $\mathcal{W}_n(o, x) = \{\omega \mid \omega_0 = o, \omega_n = x\}$ で表す。原点 o から点 x に至る任意歩数の経路全体を $\mathcal{W}(o, x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{W}_n(o, x)$ で表す。

このとき、 $p \in [0, 1)$ と $x \in \mathbb{L}^d$ に対して、(単純) ランダム・ウォークの Green 関数を

$$S_p(x) := \sum_{\omega \in \mathcal{W}(o, x)} p^{|\omega|} \prod_{j=1}^{|\omega|} D(\omega_j - \omega_{j-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} (pD)^{*n}(x)$$

で定義する。総積の因子は経路 ω の変位が隣同士の点 ($\omega_j \sim \omega_{j-1}, \forall j$) であることを意味する。等号のところでは、ランダム・ウォークの経路は一步々々の遷移が独立であることを用いた。また、ランダム・ウォークの帯磁率を $\chi_p^{\text{RW}} := \sum_{x \in \mathbb{L}^d} S_p(x)$ で定義する。 p を 0 から大きくしていったとき、 χ_p^{RW} が発散する点 p_c として臨界点を定義する。臨界点の近傍における帯磁率の振る舞い $\chi_p^{\text{RW}} \asymp (p_c - p)^{-\gamma}$ を特徴づける指数 γ が臨界指数である。ところが、単調収束定理により極限を交換できて

$$\chi_p^{\text{RW}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^n = \frac{1}{1-p}$$

となるから、 $p_c = 1$ および $\gamma = 1$ とわかる。

2.3 自己回避歩行

自己回避歩行はランダム・ウォークに自分自身の経路と交わらないという条件を加えたモデルである。経路はランダム・ウォークのときと同様に定義する。そして、原点 o から点 x に至る n 歩の自己回避歩行の経路全体を $\Omega_n(o, x) = \{\omega \mid \omega_0 = o, \omega_n = x \ \& \ \omega_i \neq \omega_j \text{ if } i \neq j\}$ で表す。原点 o から点 x に至る任意歩数の自己回避歩行の経路全体を $\Omega(o, x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n(o, x)$ で表す。

このとき、 $p \geq 0$ と $x \in \mathbb{L}^d$ に対して、自己回避歩行の二点相関関数を

$$G_p(x) := \sum_{\omega \in \Omega(o, x)} p^{|\omega|} \prod_{j=1}^{|\omega|} D(\omega_j - \omega_{j-1})$$

で定義する。ランダム・ウォークのときと同様に、自己回避歩行の帯磁率と臨界点を

表 1: ランダム・ウォークのループ、バブル、トライアングルの上界。

d	3	4	5	6	7	8	9
ε_1	0.393216	0.118637	0.046826	0.020461	0.009406	0.004451	0.002144
ε_2	∞	∞	0.178332	0.044004	0.015302	0.006156	0.002678
ε_3	∞	∞	∞	∞	0.052689	0.012354	0.004148

$$\chi_p := \sum_{x \in \mathbb{L}^d} G_p(x), \quad p_c := \sup \{ p \geq 0 \mid \chi_p < \infty \} \quad (2)$$

と定義する. n 歩の自己回避歩行の本数を c_n で表せば, 帯磁率は

$$\chi_p = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \sum_{\omega \in \Omega_n(o,x)} \prod_{j=1}^n D(\omega_j - \omega_{j-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{2^{dn}} p^n$$

と書き替えられる. ゆえに, これを $c_n/2^{dn}$ に対する母関数とみなすこともでき, 臨界点は母関数の収束半径とも解釈できる. そのような収束半径は存在して, ランダム・ウォークの臨界点よりも大きくなることが知られている. これについての詳しい証明は文献 [8]などを参照されたい.

2.4 パーコレーション

点 $x, y \in \mathbb{L}^d$ を組にしたもの $\{x, y\}$ をボンドと呼ぶ. \mathbb{L}^d 上のボンド全体の集合を \mathcal{B} と書く. \mathbb{L}^d 上の各ボンドに対して, 開いている・閉じているという状態を独立に与えるモデルがパーコレーションである. すなわち, ボンド $\{u, v\} \in \mathcal{B}$ に対して互いに独立な Bernoulli 確率変数⁷⁾

$$\xi(\{u, v\}) = \begin{cases} 1 & \text{w.p. } pD(v-u), \\ 0 & \text{w.p. } 1-pD(v-u) \end{cases}$$

を与え, $\xi(\{u, v\})$ が 1 である場合を開いている, 0 である場合を閉じていると称する. 任意の数のボンドに対して ξ の結合分布を考える. その結合分布に対応する確率測度を \mathbb{P}_p とし, その確率測度で定まる期待値を \mathbb{E}_p と書く. また, $x \in \mathbb{L}^d$ から $y \in \mathbb{L}^d$ に至る自己回避歩行の経路 $\omega \in \Omega(x, y)$ が開経路であるとは, すべての $j \in \{0, 1, \dots, |\omega|\}$ に対して $\xi(\{\omega_{j-1}, \omega_j\}) = 1$ が成り立つことをいう. x から y に至る開経路が存在するとき, x と y は繋がっているといい, $x \longleftrightarrow y$ と記す.

このとき, $p \in [0, 2^d)$ と $x \in \mathbb{L}^d$ に対して, パーコレーションの二点相関関数を

$$G_p(x) := \mathbb{P}_p(o \longleftrightarrow x) = \mathbb{P}_p \left(\bigcup_{\omega \in \Omega(o,x)} \{ \omega \text{ は開経路} \} \right)$$

で定義する. 帯磁率と臨界点は (2) によって定義する. 原点 o から繋がっている点の全体を \mathcal{C}_o とし, そのサイズを $|\mathcal{C}_o|$ と表せば, 帯磁率は

$$\chi_p = \mathbb{E}_p \left[\sum_{x \in \mathbb{L}^d} \mathbb{1}_{\{o \longleftrightarrow x\}} \right] = \mathbb{E}_p [|\mathcal{C}_o|]$$

と書き替えられる. ゆえに, これを o を含むクラスターのサイズの期待値とみなすこともでき, 臨界点はそのクラスターが無限の大きさをもつような点とも解釈できる⁸⁾. パーコレーションでも臨界点の存在が保証されているが, 詳しくは文献 [6, 7]などを参照されたい.

⁷⁾ 'w.p.' は with probability の略.

⁸⁾ 厳密には「クラスターが無限の大きさになる確率が有限である」ことと「クラスターのサイズの期待値が無限大である」ことは異なる. しかしながら, 今回考えているような格子土ではそれらの臨界点が一致することが知られている.

3 主結果

自己回避歩行とパーコレーションのそれぞれの χ_p に対して臨界指数 γ が平均場臨界指数に退化することを証明したい. ところで, bubble/triangle condition

$$G_p^{*n}(o) = \int_{[-\pi, \pi]^d} \hat{G}_p(k)^n \frac{d^d k}{(2\pi)^d} < \infty, \quad n = \begin{cases} 2 & \text{[自己回避歩行]} \\ 3 & \text{[パーコレーション]} \end{cases} \quad (3)$$

が成り立ち, かつこの量が十分小さければ, 微分不等式による評価から $\gamma = 1$ となることが知られている [9]. ただし, $\hat{G}_p(k)$ は格子空間 \mathbb{L}^d 上の関数 $G_p(x)$ の Fourier 変換 $\hat{G}_p(k) = \sum_{x \in \mathbb{L}^d} G_p(x) e^{ik \cdot x}$ である. (3) から, γ が平均場の値に退化するための十分条件は次の主結果が成り立つことである. これは, $(1 - \hat{D}(k))^{-1} = \lim_{p \uparrow 1} \hat{S}_p(k) =: \hat{S}_1(k)$ と書き替えてみればわかるとおり, $\hat{G}_p(k)$ が $\hat{S}_1(k)$ で近似できることを意味する.

定理 1 (赤外評価). $\mathbb{L}^{d \geq 6}$ 上の自己回避歩行と $\mathbb{L}^{d \geq 9}$ 上のパーコレーションに対して, モデル依存の定数 $K \in (0, \infty)$ が存在して, $p \in [1, p_c)$ で一様に

$$\|(1 - \hat{D})\hat{G}_p\|_\infty := \sup_{k \in [-\pi, \pi]^d} (1 - \hat{D}(k)) |\hat{G}_p(k)| \leq K$$

と上から押さえられる.

多くの先行研究では赤外評価における p の初期値を 0 にとっている. 主結果ではそれを 1 にとった. また, 先行研究では $\hat{G}_p(k)$ と $\hat{S}_{\mu_p}(k)$ ($\mu_p = 1 - \chi_p^{-1}$ は $p \in [0, p_c)$ に対して $\mu_p \in [0, 1)$ の範囲を動くようにスケール変換したパラメータ) とを比べているが, 主結果では $\hat{G}_p(k)$ と $\hat{S}_1(k)$ とを比べた. これらの点が本研究の特色であり, 簡単化できた要因の一部でもある. 特に $p \in [0, 1)$ でも評価したい場合は次のようにすればよい. すなわち, $p_c > 1$ だから $\chi_1 < \infty$ である. これと χ_p の単調性を用いると, $p \in [0, 1)$ でも

$$\|(1 - \hat{D})\hat{G}_p\|_\infty \leq 2\chi_1 < \infty$$

と上から押さえられる.

定理 1 を証明するには以下に示す 3 つの命題を証明する. それらの主張を述べるために, まず, 3 つの関数 $\{g_i(p)\}_{i=1}^3$ を定義する. $g_1(p)$ と $g_2(p)$ は

$$g_1(p) := p, \quad g_2(p) := \|(1 - \hat{D})G_p(k)\|_\infty$$

とする. 特に $g_2(p)$ が上から押さえられれば定理の題意が示される. $k, l \in [-\pi, \pi]^d$ と波数空間上の関数 $\hat{f}(l)$ に対して, 離散ラプラシアンを 2 で割ったものを

$$\hat{\Delta}_k \hat{f}(l) := \frac{\hat{f}(l+k) + \hat{f}(l-k)}{2} - \hat{f}(l)$$

で定義する. 不等式 [9, Lemma 5.7] を用いると, ランダム・ウォークの Green 関数の Fourier 変換 $\hat{S}_p(k)$ に対しては

$$|\hat{\Delta}_k \hat{S}_1(l)| \leq \hat{S}_1(k)^{-1} \left(\frac{\hat{S}_1(l+k) + \hat{S}_1(l-k)}{2} \hat{S}_1(l) + 4\hat{S}_1(l+k)\hat{S}_1(l-k) \right) =: \hat{U}(k, l)$$

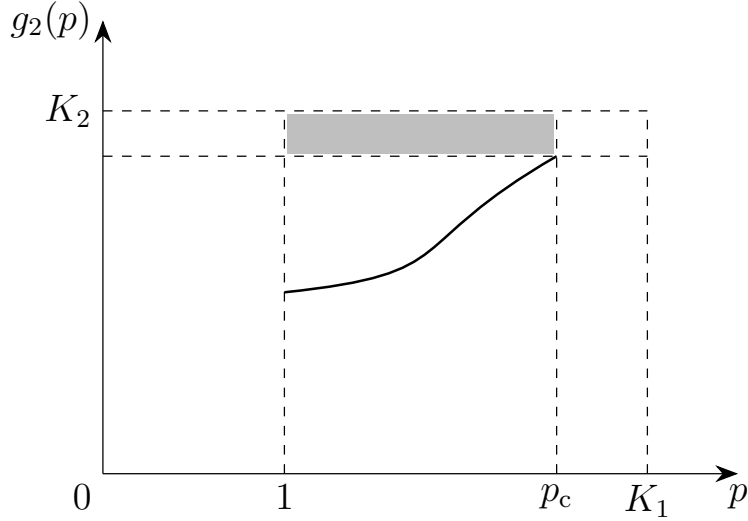


図 3: 定理 1 の証明の概念図. $g_2(p) \leq K_2$ を仮定したとき $g_2(p) < K_2$ となっている. 初期値 $g_2(1)$ は K_1 より下にあり, かつ $g_2(p)$ は連続だから, $g_2(p)$ が越えられない禁止帯ができる. また, $g_1(p)$ でも同様の方法を適用することによって $p_c < K_1$ がわかる.

と評価できる. $g_3(p)$ は

$$g_3(p) := \sup_{k, l \in [-\pi, \pi]^d} \frac{1}{\hat{U}(k, l)} \times \begin{cases} |\hat{\Delta}_k \hat{G}_p(l)| & \text{[自己回避歩行]} \\ |\hat{\Delta}_k (\hat{G}_p(l) p \hat{D}(l))| & \text{[パーコレーション]} \end{cases}$$

とする. ここで, $\hat{U}(0, l) = 0$ であるため, $k = 0$ の近傍では上限を $|k| \rightarrow 0$ での上限として意味づける. つぎに, 3つの命題について述べ, それによって定理 1 を証明する.

命題 1 (連続性). 関数の組 $\{g_i(p)\}_{i=1}^3$ はそれぞれ $p \in [1, p_c)$ 上で連続である.

命題 2 (初期条件). 自己回避歩行では $\mathbb{L}^{d \geq 6}$ において, パーコレーションでは $\mathbb{L}^{d \geq 8}$ において, $\forall i = 1, 2, 3, \exists K_i < \infty$ (モデル依存の定数) s.t. $g_i(1) < K_i$.

命題 3 (Bootstrapping argument). 自己回避歩行では $\mathbb{L}^{d \geq 6}$ において, パーコレーションでは $\mathbb{L}^{d \geq 9}$ において, $\forall p \in (1, p_c), \forall i = 1, 2, 3, \exists K_i < \infty$ s.t. $g_i(p) \leq K_i \implies g_i(p) < K_i$ が成り立つ. ただし, $\{K_i\}_{i=1}^3$ は命題 2 と同じ定数である.

定理 1 の証明. まず, $g_2(p)$ に対してはその連続性と初期値が $g_2(1) < K_2$ であることから, $\forall p \in [1, p_c \wedge K_1), g_2(p) < K_2$ が成り立つ⁹⁾. なぜなら, もし $g_2(p) > K_2$ なる p があったとすれば, $g_2(p)$ が連続であったことに反するからである. 同様に, $g_1(p)$ に対しても, $\forall p \in [1, p_c), g_1(p) = p < K_1$ が成り立つ. これは $p_c < K_1$ を意味する. したがって, $\forall p \in [1, p_c), g_2(p) < K_2$ である (図 3). \square

上の 3つの命題の中でも, 特に命題 2 と命題 3 の証明でレース展開を用いる. そこで, 以下ではレース展開の主張と, それを如何に使うか命題を証明するかの概略を示す. 連続性の証明は文献 [3] に譲る.

⁹⁾ ここで, $a \wedge b = \min\{a, b\}$.

4 レース展開

ランダム・ウォークの Green 関数 $S_p(x)$ に対しては再生方程式 $S_p(x) = \delta_{o,x} + (pD * S_p)(x)$ が成り立つことが知られている．自己回避歩行とパーコレーションの二点相関関数 $G_p(x)$ に対してもある条件下で同様に再生方程式が成り立つ．それを与えるものがレース展開である．

命題 4 (レース展開). $p < p_c$ と $N \in \mathbb{Z}_+ := \{0\} \cup \mathbb{N}$ に対して, モデルに依存する \mathbb{L}^d 上の関数 $\{\pi_p^{(n)}\}_{n=0}^N$ (自己回避歩行では $\pi_p^{(0)} \equiv 0$) が存在して以下を満たす．すなわち, $\Pi_p^{(N)}(x) := \sum_{n=0}^N (-1)^n \pi_p^{(n)}(x)$ とおいたとき,

$$I_p^{(N)}(x) := \delta_{o,x} + \begin{cases} 0 & \text{[自己回避歩行]} \\ \Pi_p^{(N)}(x) & \text{[パーコレーション]} \end{cases}$$

$$J_p^{(N)}(x) := pD(x) + \begin{cases} \Pi_p^{(N)}(x) & \text{[自己回避歩行]} \\ (\Pi_p^{(N)} * pD)(x) & \text{[パーコレーション]} \end{cases}$$

に対して

$$G_p(x) = I_p^{(N)}(x) + (J_p^{(N)} * G_p)(x) + (-1)^{N+1} R_p^{(N+1)}(x) \quad (4)$$

が成り立つ．ここで, 剰余項 $R_p^{(N)}$ は

$$0 \leq R_p^{(N)}(x) \leq (\pi_p^{(N)} * G_p)(x) \quad (5)$$

と評価できる．

この命題における $\Pi_p^{(N)}(x)$ はある種の図式 (ダイアグラム) を用いて, 自己回避歩行の場合

$$\Pi_p^{(N)}(x) = - \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \\ x=o \end{array} + o \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} x - \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} x + \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} x - \dots \quad (6)$$

と描かれ, パーコレーションの場合

$$\Pi_p^{(N)}(x) = o \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} x - o \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} x + o \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} x - \dots \quad (7)$$

と描かれる．それぞれの図式の意味を大雑把にいうと, 各線の一本々は G_p を表している．交わっている点以外では互いに排除し合うという相互作用が働いており, 相互作用は複雑な形の指示関数として表される．またラベルの付いていない頂点ではすべての点について足し合わせることを意味する．具体的には, 例えば自己回避歩行の $\pi_p^{(2)}(x)$ は正確な表式で

$$\pi_p^{(2)}(x) = (1 - \delta_{o,x}) \sum_{\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)} \in \Omega(o,x)} \prod_{i=1}^3 \left(p^{|\omega^{(i)}|} \prod_{j=1}^{|\omega^{(i)}|} D(\omega_j^{(i)} - \omega_{j-1}^{(i)}) \right) \\ \times \prod_{i \neq j} \mathbb{1}_{\{\omega^{(i)} \cap \omega^{(j)} = \{o,x\}\}}$$

と書ける．これに含まれる指示関数を上からすべて 1 で評価すれば， $\pi_p^{(2)}(x) \leq (1 - \delta_{0,x}) G_p(x)^3$ となるので，3本の線からできていることがわかる．

さて，命題 2 と命題 3 は次の手順に従って証明できる．

1. 再生方程式 (4) の両辺に Fourier 変換を施す．その上で，交代級数 $\hat{\Pi}_p(k) := \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\Pi}_p^{(N)}(k)$ が絶対収束すると仮定して，形式的に $\hat{G}_p(k)$ を評価する．
2. $\hat{G}_p(k)$ の評価を用いて $\{g_i(p)\}_{i=1}^3$ を評価する．その上界にはレース展開係数に対する Fourier 変換の 0 モード $\hat{\Pi}_p(0)$ および 0 モードと k モードとの差 $\hat{\Pi}_p(0) - \hat{\Pi}_p(k)$ が現れる．
3. $\hat{\Pi}_p(0)$ と $\hat{\Pi}_p(0) - \hat{\Pi}_p(k)$ を評価する．その際，自己回避歩行では劣加法性を，パーコレーションでは BK 不等式を用いて図式 (6), (7) を基本ダイアグラム（ループ，バブル，トライアングルなどと呼ばれる）に分解する．
4. 命題 2 では自明な不等式 $G_1(x) \leq S_1(x)$ を，命題 3 では bootstrapping argument の仮定 $\hat{G}_p(k) \leq K_2 \hat{S}_1(k)$ などを用いて，基本ダイアグラムをランダム・ウォークの量 ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) で評価する．ここで， $g_2(p)$ と $g_3(p)$ はそれぞれ対応するランダム・ウォークの量との比で定義されていたことに注意されたい．
5. 表 1 の数値と $\{K_i\}_{i=1}^3$ に適当な数値（これは初期条件を満たすようにとる）を代入したものをを用いて， $\{g_i(p)\}_{i=1}^3$ の上界の具体的な数値を求める．そして，選んだ $\{K_i\}_{i=1}^3$ で実際に $\forall p \in [1, p_c), \forall i = 1, 2, 3, g_i(p) < K_i$ が成り立つことを確かめる．
6. 最後に，選んだ $\{K_i\}_{i=1}^3$ に対して，手順 1 で仮定した収束性が成り立つことを確認する．

ここでは手順 1, 2 についてもう少し詳しく記す．

いま， $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{\pi}_p^{(n)}(0)$ が十分小さくなるとして，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\pi}_p^{(n)}(0) = 0, \quad \hat{I}_p(k) := \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{I}_p^{(N)}(k) > 0$$

とみなす．この第 1 式によって，剰余項 (5) の Fourier 変換の 0 モードは

$$0 \leq \hat{R}_p^{(N)}(0) = \sum_{x \in \mathbb{L}^d} R_p^{(N)}(x) \leq \hat{\pi}_p^{(N)}(0) \chi_p \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

と収束する． $\hat{J}_p(k) := \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{J}_p^{(N)}(k)$ とおく．このとき，(4) の両辺の Fourier 変換をとって $k = 0$ を代入すると

$$\chi_p = \hat{G}_p(0) = \hat{I}_p(0) + \hat{J}_p(0) \chi_p = \hat{I}_p(0) \times \begin{cases} (1 - p - \hat{\Pi}_p(0))^{-1} & \text{[自己回避歩行]} \\ (1 - p - p \hat{\Pi}_p(0))^{-1} & \text{[パーコレーション]} \end{cases} \quad (8)$$

となる．3 番目の等号では等式を χ_p について解いた．最後の表式で p について解き， $\chi_p \geq 0$ と $\hat{I}_p(0) > 0$ を思い出せば，

$$g_1(p) \leq \begin{cases} 1 - \hat{\Pi}_p(0) & \text{[自己回避歩行]} \\ (1 + \hat{\Pi}_p(0))^{-1} & \text{[パーコレーション]} \end{cases}$$

を得る。また、(8) の途中式から

$$\hat{G}_p(k) = \frac{\hat{I}_p(k)}{1 - \hat{J}_p(k)} = \frac{\hat{I}_p(k)}{\hat{J}_p(0) - \hat{J}_p(k) + \hat{I}_p(0)/\chi_p} \leq \frac{\hat{I}_p(k)}{\hat{J}_p(0) - \hat{J}_p(k)}$$

となる。2 番目の等号では $1 = \hat{J}_p(0) + \hat{I}_p(0)/\chi_p$ を用いた。この上界を $\hat{S}_1(k) = (1 - \hat{D}(k))^{-1}$ で割ることによって、

$$g_2(p) \leq \begin{cases} \sup_{k \in [-\pi, \pi]^d} \left(1 + \frac{\hat{\Pi}_p(0) - \hat{\Pi}_p(k)}{1 - \hat{D}(k)} \right)^{-1} & \text{[自己回避歩行]} \\ \sup_{k \in [-\pi, \pi]^d} \left(1 + \frac{1}{\hat{I}_p(k)} \frac{\hat{\Pi}_p(0) - \hat{\Pi}_p(k)}{1 - \hat{D}(k)} \right)^{-1} & \text{[パーコレーション]} \end{cases}$$

を得る。また、 $g_3(p)$ については [9, Lemma 5.7] を援用して評価する。

参考文献

- [1] R. Fitzner and R. van der Hofstad. Generalized approach to the non-backtracking lace expansion. *Probab. Theory Related Fields*, (2016).
- [2] R. Fitzner and R. van der Hofstad. Mean-field behavior for nearest-neighbor percolation in $d > 10$. *Electron. J. Probab.*, Vol. **22**, no. 43, (2017).
- [3] S. Handa, Y. Kamijima and A. Sakai. A survey on the lace expansion for the nearest-neighbor models on the BCC lattice. Preprint (2017). arXiv:1712.05573.
- [4] T. Hara and G. Slade. Self-avoiding walk in five or more dimensions. I. The critical behaviour. *Commun. Math. Phys.*, Vol. **147**, pp. 101–136, (1992).
- [5] T. Hara and G. Slade. The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions. *Rev. Math. Phys.*, Vol. **4**, pp. 235–327, (1992).
- [6] 樋口保成『新版 パーコレーション』(遊星社, 2011 年)
- [7] G. Grimmett. *Percolation*. 2nd ed., Springer, (1999).
- [8] N. Madras and G. Slade. *The Self-Avoiding Walk*. Birkhäuser, Boston, (1993).
- [9] G. Slade. *The Lace Expansion and its Applications*. Springer, (2004). Lecture Note in Mathematics 1879.