ランダム方体複体における
パーシステントベッチ数の極限定理について

宮永　潤（Jun Miyanaga）*

共同研究者: 平岡　裕章 †

概要

ランダム方体複体とは, 基本方体と呼ばれる単位区間の有限直積を確率的に発生させて得られるモデルである．このモデルにおいて確率測度が定常性とエルゴード性を満たすとすると, システムサイズに対してベッチ数の大数の法則と中心極限定理が成立することが知られている．本研究では, これらの結果がベッチ数の拡張であるパーシステントベッチ数においても成立することを示した.

1　研究の背景

ランダムトポロジーとは, 幾何学的対象にランダムネスを入れることで位相的な性質に関する量を確率変数とみなし, その振る舞いを研究する分野である．本研究では, ランダム方体複体とよばれるモデルについて考える．このモデルについては 2 節と 3 節で詳しく述べるが, 方体集合 X の各基本方体 Q に対し $[0,1]$ 上へランダムに値 ω_Q を与え, 各 t に対してサブレベル集合 $X(t) := \{Q \in X : \omega_Q \leq t\}$ を考えることで得られる．特に, $\mathbb{Z}^d$ 上の格子点や辺は 0 次元と 1 次元の基本方体であるので, このモデルは古典的なボンドパーコレーションモデルの自然な高次元化になっている．このランダム方体複体の上では 2 節で述べるようにホモロジーを考えることができ, ベッチ数を確率変数とみなすことができる．このランダム方体複体におけるベッチ数については平岡–角田 [1] により, 確率測度が定常性とエルゴード性を満たすとき, 以下の極限定理が成立することが示されている．ここで, $X^n(t) := X(t) \cap \Lambda_n$ はランダム方体複体 $X(t)$ を長さ $2n$ の d 次元立方体 $\Lambda_n = [-n,n]^d$ に制限したものとする.

定理 1.1 (平岡–角田, 2016[1])**.** ランダム方体複体 $X^n(t)$ に対し, $\hat{\beta}_q := \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\beta_q(X^n(t))\right]}{|\Lambda_n|}$ と定める．このとき,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_q(X^n(t))}{|\Lambda_n|} = \hat{\beta}_q \ \text{ a.s.}$$

が成立する.

定理 1.2 (平岡–角田, 2016[1])**.** 確率測度 P が直積測度であるとする．このとき，ある定数 σ^2 が存在し，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|}\mathbb{E}\left[\left(\beta_q(X^n(t)) - \mathbb{E}\left[\beta_q(X^n(t))\right]\right)^2\right] = \sigma^2,$$

* 東北大学大学院理学研究科数学専攻 (〒 980-8578 仙台市青葉区荒巻字青葉 6 - 3, E-mail: jun.miyanaga.r1@dc.tohoku.ac.jp)

† 東北大学材料科学高等研究所 (〒980-8577 宮城県仙台市青葉区片平 2-1-1, E-mail: hiraoka@tohoku.ac.jp)

$$\frac{1}{|\Lambda_n|^{1/2}}\left(\beta_q(X^n(t)) - \mathbb{E}\left[\beta_q(X^n(t))\right]\right) \stackrel{\text{law}}{\Longrightarrow} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

が成立する．ここで, $\stackrel{\text{law}}{\Longrightarrow}$ は法則収束, $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ は平均 0, 分散 σ^2 の Gauss 分布である.

上記の 2 つの定理は, 定理 1.1 がベッチ数に対して大数の法則が成立することを, 定理 1.2 がベッチ数に対して中心極限定理が成立することを示している．本研究では, これらの結果をもとに 4 節で述べるパーシステントベッチ数への拡張を行った.

2　方体複体のホモロジー

まず, ランダムネスを入れる幾何学的対象である方体複体について簡単に説明する．詳細については [3] を参照されたい．単体複体が三角形の一般化である単体によって構成されるのと同様に, 方体複体は四角形の一般化である基本方体を用いて構成される．基本方体を定義するために, 以下の基本区間を定義する.

定義 2.1. 閉区間 $I \subset \mathbb{R}$ が以下の形式で書けるとき，I を基本区間 (elementary interval) という.

$$I = [l,l] \text{ or } I = [l,l+1],\ (l \in \mathbb{Z}).$$

このとき, 幅がない基本区間 $[l,l]$ は退化しているといい, 幅のある基本区間 $[l,l+1]$ は非退化であるという. 以後は記法を簡単にするために退化している基本区間に対して $[l] := [l,l]$ を用いるものとする.

ここで, $d \in \mathbb{N}$ を一つ固定する．本研究を通じて，d は後述する方体集合が埋め込まれている空間の次元を表すものとする.

定義 2.2. Q が基本方体 (elementary cube) であるとは, Q が基本区間の d 個の直積で表されることである. すなわち, $I_i \subset \mathbb{R} (1 \le i \le d)$ を基本区間として

$$Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d.$$

このとき，基本方体 Q の i 番目の成分を $I_i(Q) := I_i$ で表すものとする.

定義 2.3. 基本方体 Q の次元を, Q の非退化な基本区間の個数で定める．すなわち，

$$\dim Q := \#\{1 \le i \le d\ : I_i(Q)\ \text{は非退化な基本区間}\ \}.$$

ここで, $\#$ は集合の要素の個数を表す.

例 2.4. 以下に示す図はそれぞれ左から, 0 次元, 1 次元, 2 次元の基本方体である．これより次元の定義が我々の直感に適したものになっていることが分かる.

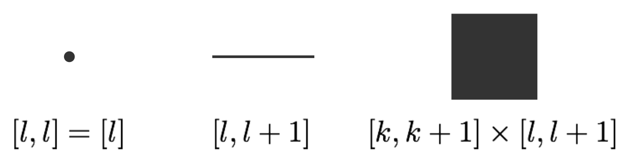

図 1　基本方体の例：左から 0 次元, 1 次元, 2 次元の基本方体

この基本方体を用いて, 方体集合を定義する．$X \subset \mathbb{R}^d$ が方体集合であるとは, X が基本方体の和として表すことができるときをいう.

定義 2.5. 方体集合 X に対し, X 内の全ての k 次元基本方体と整数係数による有限形式和からなる自由 $\mathbb{Z}$ 加群を, k 次方体鎖群とよび $C_k^d(X)$ と表す. すなわち,

$$C_k^d(X) := \{c = \sum \alpha_i Q_i : Q_i \in \mathcal{K}_k^d(X), \alpha_i \in \mathbb{Z}\}.$$

定義 2.6. 基本方体 $Q = I_1 \times \cdots \times I_d$ の非退化な基本区間を $I_{i_1}, \ldots, I_{i_k}$ とし, 各 $0 \leq j \leq 1$ の非退化な基本区間を $I_{i_j} = [l_j, l_j + 1]$ と表す. このとき,

$$\begin{aligned} Q_j^- &:= I_1 \times \cdots \times I_{i_{j-1}} \times [l_j] \times I_{i_{j+1}} \times \cdots \times I_d \\ Q_j^+ &:= I_1 \times \cdots \times I_{i_{j-1}} \times [l_j + 1] \times I_{i_{j+1}} \times \cdots \times I_d \end{aligned}$$

として ∂_k を,

$$\partial_k(Q) := \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} (Q_j^+ - Q_j^-)$$

と定める. この ∂_k を線形に拡張して得られる $\partial_k^X : C_k^d(X) \to C_{k-1}^d(X)$ を境界作用素と呼ぶ.

定義 2.7. 方体鎖群と境界作用素からなる系列, すなわち

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1}^d(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}^X} C_k^d(X) \xrightarrow{\partial_k^X} C_{k-1}^d(X) \longrightarrow \cdots$$

を方体鎖複体とよぶ.

定義 2.8. 方体鎖複体において,

$$\begin{aligned} Z_k(X) &:= \mathrm{Ker}\ \partial_k^X = \{c \in C_k^d(X) : \partial_k(c) = 0\} \\ B_k(X) &:= \mathrm{Im}\ \partial_{k+1}^X = \{c \in C_k^d(X) :\ ^{\exists} b \in C_{k+1}^d(X) \text{ s.t. } \partial_{k+1}(b) = c\} \end{aligned}$$

とおき, $Z_k(X)$ を k 次サイクル群, $B_k(X)$ を k 次バウンダリ群と呼び, それぞれの元を k 次サイクルと k 次バウンダリと呼ぶ.

注意 2.9. 境界作用素の定義から $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ なので, $B_k(X) \subset Z_k(X)$ が成り立つ.

定義 2.10. k 次ホモロジー群 $H_k(X)$ を $Z_k(X)$ の $B_k(X)$ による剰余加群

$$H_k(X) := \frac{Z_k(X)}{B_k(X)}$$

で定める. このとき, 鎖群の係数として整数係数をとっていたので, 有限生成 $\mathbb{Z}$ 加群の構造定理より, 自由加群 $\mathbb{Z}^{\beta_k(X)}$ と捩れ加群 $\mathrm{Tor}_k(X)$ を用いて, k 次ホモロジー群 $H_k(X)$ は

$$H_k(X) \simeq \mathbb{Z}^{\beta_k(X)} \oplus \mathrm{Tor}_k(X)$$

と書ける. ここで $\oplus$ は直和を表す. このとき, ホモロジー群の $H_k(X)$ の階数である $\beta_k(X)$ を X の k 次ベッチ数と呼ぶ.

3 ランダム方体複体について

ランダム方体複体とは, 前の節で定義した方体複体に以下のような確率空間を考えることでランダムネスを入れたものである. まず, 各基本方体に区間 $[0,1]$ 内の値をランダムに与えることを考える. このとき, 標本空間は $\Omega = \{\omega \colon \mathcal{K}^d \to [0,1]\} = [0,1]^{\mathcal{K}^d}$ となる. また, $\mathcal{F}$ を柱状集合からなる σ 加法族とする. このとき, 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ に対し, 次の 2 条件を満たす確率測度 P を入れる.

1. 平行移動不変性　任意の $A \in \mathcal{F}, x \in \mathbb{Z}^d$ に対し, $P(\tau_x^{-1}A) = P(A)$ を満たす.
2. エルゴード性　$\tau_x^{-1}A = A$ ならば, $P(A) = 0$ または 1 である.

ここで, τ_x は $\tau_x\omega(Q) := \omega(-x+Q), \tau_x(A) = \{\tau_x\omega, \omega \in A\}$ であり, 平行移動を表す.

例 3.1. 上記の可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ に対し以下のような周辺分布からなる直積測度は平行移動不変性とエルゴード性を満たす.

$$\begin{cases} P(\omega_Q = 0) = 1 & Q \in \mathcal{K}_l^d, l < k \\ P(\omega_Q \leq t) = t & Q \in \mathcal{K}_k^d, 0 \leq t \leq 1 \\ P(\omega_Q = 1) = 1 & Q \in \mathcal{K}_l^d, k < l \end{cases}$$

このモデルは, l 次スケルトンに k 次の基本方体を確率的に発生させる. よって, パーコレーションモデルの高次元化を与える. 実際, $l = 0, k = 1$ のときは, ボンドパーコレーションモデルになる.

以上の準備をもとに, ランダム方体集合の定義を行う. このランダム方体集合についても方体集合のときと同様にして方体複体のホモロジーが定義でき, ベッチ数を確率変数とみなすことができる.

定義 3.2. 標本空間 Ω から標本 ω を一つ取る. $0 \leq t \leq 1$ に対し, ランダム方体集合 $X(t)$ を ω_Q の値が t 以下の基本方体を発生させたもの (サブレベル集合) として定義する. すなわち,

$$X(t) := \bigcup \{Q \in \mathcal{K}^d : \omega_Q \leq t\}.$$

ここで, ランダム方体集合 $X(t)$ を定める変数 t を時刻と呼ぶことにする. また, 方体複体と同様に, 以後特に混乱の恐れがない場合は, 単に $X(t)$ でランダム方体複体も表すものとする.

このとき, ランダム方体複体 $X(t)$ は時刻 t に対して方体が単調に増大するので, t に関する方体複体の単調増大列であるフィルトレーション $\mathbb{X} = \{X(t)\}_{0 \leq t \leq 1}$ を考えることができる.

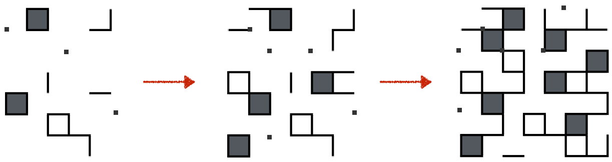

図 2　ランダム方体複体のフィルトレーション

4　パーシステントベッチ数について

先に示したようにランダム方体複体は時刻 t に関してフィルトレーションを定める事ができる．パーシステントベッチ数とは, そのようなフィルトレーションに対して定められるものであり, 穴の存続性についての情報をもっている．

定義 4.1. $\mathbb{X}$ をランダム方体複体のフィルトレーションとする．このとき, $0 \le r \le s \le 1$ に対し, q 次パーシステントベッチ数 $\beta_q^{r,s}(\mathbb{X})$ を時刻 r における q 次サイクル群 $Z_q(X(r))$ の, 時刻 s での q 次バウンダリ群との共通部分 $Z_q(X(r)) \cap B_q(X(s))$ による剰余加群の階数 (rank) として定義する．すなわち,

$$\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}) := \mathrm{rank}\ \frac{Z_q(X(r))}{Z_q(X(r)) \cap B_q(X(s))}.$$

特に, r と s が一致するとき, その値を $t(= r = s)$ とおくと $\mathrm{rank}\ \dfrac{Z_q(X(t))}{Z_q(X(t)) \cap B_q(X(t))} = \mathrm{rank}\ \dfrac{Z_q(X(t))}{B_q(X(t))}$ より時刻 t でのランダム方体複体のベッチ数になる事が分かる．よって, パーシステントベッチ数はベッチ数の拡張になっている．また, q 次ベッチ数 $\beta_q(X(t))$ が時刻 t における q 次元の穴の個数を表していたのに対し, パーシステントベッチ数 $\beta_q^{r,s}(\mathbb{X})$ は時刻 r から時刻 s まで存続する q 次元の穴の個数を意味する．

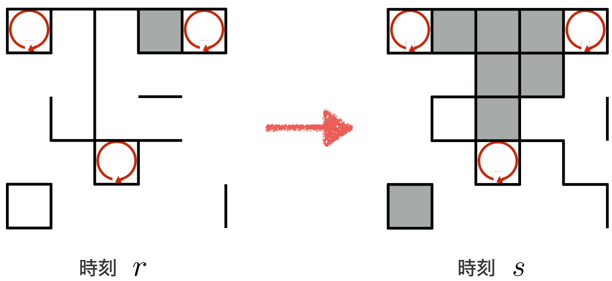

図 3　上の図のようなフィルトレーション $\mathbb{X}$ に対して時刻 r から時刻 s まで存続する穴は丸の書かれている部分である．よって, この図におけるパーシステントベッチ数の値は $\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}) = 3$ である．

5　主結果

5.1　パーシステントベッチ数に対する大数の法則

このランダム方体複体におけるパーシステントベッチ数について, 包含関係のある 2 つのランダム方体複体のフィルトレーションに対し, 次の結果が得られた．ここでフィルトレーションに包含関係があるとは, 各時刻におけるランダム方体複体に対して, 包含関係が成立していることである．

命題 5.1. ランダム方体複体のフィルトレーション $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ に対し, 包含関係 $\mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$ があるとする．すなわち, 各 $t \in [0, 1]$ に対し $X(t) \subset Y(t)$ が成り立つとする．このとき,

$$\left|\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}) - \beta_q^{r,s}(\mathbb{Y})\right| \le \#\mathcal{K}(Y(s)) - \#\mathcal{K}(X(s)) + \#\mathcal{K}(Y(r)) - \#\mathcal{K}(X(r))$$

が成立する．つまり, パーシステントベッチ数の差の絶対値は時刻 r と時刻 s でのランダム方体複体に含まれる基本方体の差で上から評価できる．

命題 5.1 を用いることで, ランダム方体複体のパーシステントベッチ数について以下の大数の法則が成立するということを証明した.

定理 5.2. ランダム方体複体 $X(t)$ を Λ_n に制限したときのフィルトレーション $\mathbb{X}^n := \{X(t) \cap \Lambda_n\}_{0 \le t \le 1}$ に対し $\hat{\beta}_q^{r,s} := \lim_{n \to \infty} \frac{\mathbb{E}\left[\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}^n)\right]}{|\Lambda_n|}$ が存在し,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}^n)}{|\Lambda_n|} = \hat{\beta}_q^{r,s} \ \text{ a.s.}$$

が成立する.

更に, 定理 5.2 における $\hat{\beta}_q^{r,s}$ が正の値になる条件として, 次の結果が得られた.

命題 5.3. 長さ $2K$ で原点中心の d 次元立方体に含まれる方体集合を $\mathcal{L}_{0,K}$ とおく. また, $\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}_{0,K}$ を含む任意の有限な方体集合とする. $\mathcal{L}$ に対し $\mathcal{L}$ 内のフィルトレーションを $\mathbb{X}_{\mathcal{L}}$ と表し, $\mathcal{L}$ から $\mathcal{L}_{0,K}$ を除いた上でのフィルトレーションを $\mathbb{X}_{\mathcal{L}}^{0,K}$ とする. ここで $\Omega_q(0, K, r, s)$ を $\mathcal{L}_{0,K}$ を含む任意の $\mathcal{L}$ に対し, $\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}_{\mathcal{L}}) \ge 1 + \beta_q^{r,s}(\mathbb{X}_{\mathcal{L}}^{0,K})$ が成り立つ事象とする. このとき, ある正の整数 K が存在し, $P(\Omega_q(0, K, r, s)) > 0$ ならば, $\hat{\beta}_q^{r,s} > 0$ である.

5.2　パーシステントベッチ数に対する中心極限定理

ここで, ランダム方体複体モデルを次のように再構成する. まず, 基本方体で全ての基本区間の最小値が 0 になるものを $\mathcal{N}^d := \{N \in \mathcal{K}^d : \min I_i(N) = 0, 0 \le^\forall i \le d\}$ で表す. ここで, 各 $0 \le k \le d, k \in \mathbb{N}$ において $\binom{d}{k}$ 個の異なる k 次基本方体があるので, $\mathcal{N}^d$ に含まれる基本方体の個数は $\#\mathcal{N}^d = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} = (1+1)^d = 2^d$ となる.

このとき, d 次元正方格子 $x \in \mathbb{Z}^d$ と $N \in \mathcal{N}^d$ により, 基本方体 $Q = x + N$ が一意に定まる. この $\mathcal{N}^d$ を用いて, $\omega_{x,N} := \omega_{x+N} = \omega_Q$ として, $\left\{\omega_Q : Q \in \mathcal{K}^d\right\}$ を $\left\{\omega_x = \left(\omega_{x,N} : N \in \mathcal{N}^d\right) : x \in \mathbb{Z}^d\right\}$ と書き直すことができる.

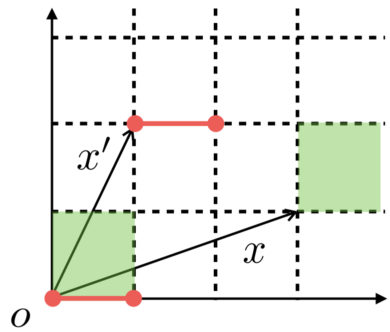

図 4　ランダム方体複体モデルの言い換え

この $\omega_{x,N}$ を用いることで, ランダム方体集合 $X(t)$ は, 以下のように書き直すことができる.

$$X(t) := \bigcup \left\{x + N : \omega_{x,N} \le t, x \in \mathbb{Z}^d, N \in \mathcal{N}^d\right\}$$

ここで, ω_0 の独立なコピーを $\left(\omega^*_{0,N} : N \in \mathcal{N}^d\right)$ とする. このとき ω_x に対して, ω^*_x を

$$\omega^*_x := \begin{cases} (\omega^*_{0,N} : N \in \mathcal{N}^d) & x = 0 \\ (\omega_{x,N} : N \in \mathcal{N}^d) & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定めると, $X(t)$ と同様にして $X^*(t)$ が定まる. ここで, $\mathcal{B} := \left\{B \subset \mathbb{Z}^d : B = (x + \Lambda_n) \cap \mathbb{Z}^d\right\}$ とする. また, $\preceq$ を辞書型順序とし原点 O に対し $x \preceq O$ なる格子点で添字付けられた ω_x によって生成される σ 加法族を $\mathcal{F}_o := \sigma\left(\{\omega_x : x \preceq O\}\right)$ で表す. 更に $\{H(\omega_x; B)\}_{B\in\mathcal{B}}$ を B で添字付けられた実数値確率変数 H の族とし, $(D_oH)(B) := H(\omega; B) - H(\omega^*; B)$ で, B における $x = 0$ での違いによる確率変数 H の値の差を表す. このとき, 次に紹介する Penrose の定理 [2] が成立する.

定理 5.4 (Penrose, 2001[2])**.** 実数値確率変数の族 $\{H(\omega; B), B \in \mathcal{B}\}$ が次の 3 条件を満たすとする.

1. 並進不変性
   $H(\tau_x\omega; x + B) = H(\omega; B)$ が任意の $x \in \mathbb{Z}^d, \omega \in \Omega, B \in \mathcal{B}$ で成立する.
2. 安定性
   ある確率変数 $D_H(\infty)$ が存在して, 正方格子の列 $\{A_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}$ が $\liminf A_n = \mathbb{Z}^d$ を満たすならば, $(D_oH)(A_n) \underset{n\to\infty}{\to} D_H(\infty)$ in Prob が成立する. ここで in Prob は確率収束を表す.
3. モーメント有界条件
   ある定数 $\gamma > 2$ が存在して, $\sup_{B\in\mathcal{B}} \mathbb{E}[|(D_oH)(B)|^\gamma] < \infty$ が成立する.

このとき, 正方格子の列 $\{A_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}$ が $\liminf A_n = \mathbb{Z}^d$ を満たすならば,

$$\frac{1}{|\Lambda_n|}\mathbb{E}\left[\left(H(\omega; A_n) - \mathbb{E}\left[H(\omega; A_n)\right]\right)^2\right] \to \sigma^2$$

$$\frac{1}{|\Lambda_n|^{1/2}}\mathbb{E}\left[H(\omega; A_n) - \mathbb{E}\left[H\left(\omega; A_n\right)\right]\right] \xRightarrow{\text{law}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

が成立する. ここで, $\sigma^2 = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[D_H(\infty)|\mathcal{F}_o\right]\right]$, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ は平均 0, 分散 σ^2 のガウス分布であり, $\xRightarrow{\text{law}}$ は法則収束を表す.

Penrose の定理の条件のうち, 並進不変性はパーシステントベッチ数の定義から, 有界モーメント条件は命題 5.1 と $\mathcal{N}^d$ の要素の個数から簡単に証明ができる. 安定性については次の命題を示すことで証明した.

命題 5.5. ランダム方体複体のフィルトレーション $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ について, 任意の $0 \le t \le 1$ に対しその対称差 $X(t) \triangle Y(t)$ が有界集合であるとする. このとき, ある整数 θ_∞ が存在して, $\liminf A_n = \mathbb{Z}^d$ を満たす任意の正方格子の列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して, ある $n^\infty \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \ge n^\infty$ を満たす任意の n について

$$\beta^{r,s}_q(\mathbb{X}(A_n)) - \beta^{r,s}_q(\mathbb{Y}(A_n)) = \theta_\infty$$

が成立する. ここで, $\mathbb{X}(A_n), \mathbb{Y}(A_n)$ はそれぞれフィルトレーション $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ を A_n に制限したものである.

この結果より確率 1 で $(D_oH)(A_n)$ の θ_∞ への収束が示されるので, 特に確率収束が従うことが分かる. よって, Penrose の定理 [2] の適用条件をパーシステントベッチ数がみたすので, パーシステントベッチ数に対しても次の中心極限定理が成立する.

定理 5.6. 整数 q $(0 \leq q < d)$ と $0 \leq r \leq s \leq 1$ を固定する．また, 確率測度 P が Ω 上の直積測度であるとする．このとき，ある定数 σ^2 が存在し，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_n|}\mathbb{E}\left[\left(\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}^n) - \mathbb{E}\left[\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}^n)\right]\right)^2\right] = \sigma^2,$$

$$\frac{1}{|\Lambda_n|^{1/2}}\left(\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}^n) - \mathbb{E}\left[\beta_q^{r,s}(\mathbb{X}^n)\right]\right) \overset{\text{law}}{\Longrightarrow} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

が成立する．ここで, $\overset{\text{law}}{\Longrightarrow}$ は法則収束, $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ は平均 0, 分散 σ^2 の Gauss 分布である．

参考文献

[1] Hiraoka, Y., Tsunoda, K.: Limit Theorems on Random Cubical Homology. arXiv:1612.08485 (2016).

[2] Penrose, M. D.: A Central Limit Theorem with Applications to Percolation, Epidemics and Boolean Model. Ann. Probab. **29**, 1515–1546 (2001).

[3] Kaczynski, T., Mishaikow, K., Mrozek, M.: Computational Homology. Springer-Verlag, New York (2004).