ディリクレ L 関数の導関数を含む非自明零点を渡る和について

井上 翔太 (Shōta INOUE)
名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻

1 導入

ゼータ関数は素数と深く関わっており, 特に零点と素数についてはリーマンの明示公式により明確な関係が存在することがわかっている. また, メビウス関数 $\mu(n)$ もエラトステネスの篩の原理をはじめとして素数を考える際に重要な関数であることが知られている. ここでメビウス関数とは

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad n = 1, \\ (-1)^k & \text{if} \quad n \text{ が相異なる } k \text{ 個の素数の積}, \\ 0 & \text{if} \quad n \text{ が平方因子をもつ} \end{cases}$$

で定義される数論的関数である. また, メビウス関数の和関数 $M(x) = \sum_{n \le x} \mu(n)$ についても素数に関するリーマンの明示公式と対応するような明示式と同様の明示公式

$$M(x) = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{|\mathrm{Im}\rho| < T_\nu} \frac{x^\rho}{\rho \zeta'(\rho)} - 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2\pi/x)^{2n}}{(2n)! n \zeta(2n+1)} \tag{1.1}$$

がリーマン予想と非自明零点の重複度が全て 1 位 [1] であるという仮定の下で示された. ただし, 上記の最初の和はリーマンゼータ関数の非自明な零点 ρ に関する和であり, $\nu \to \infty$ のとき $T_\nu \to \infty$ となるある数列に対する和である. さらに, Bartz によりリーマン予想の仮定を外しても, 数列 T_ν にある条件を加えることで式 (1.1) が成り立つことが示されている [1]. ここで, 式 (1.1) の零点の和に関する項に注目するとこの明示公式からメビウス関数を調べるためには $\zeta'(\rho)$ が重要であることがわかる. そのため, これに関しては多くの研究が行われている. 特に, この $\zeta'(\rho)$ 和についての評価の研究に関する一つの目標となる次の予想が Gonek [3] と Hejhal [4] により独立に提起された.

[1] リーマン予想が 2017 年 12 月時点で未解決問題であることは周知の事実であろう. また, リーマンゼータ関数の非自明零点が全て 1 位であるということも未解決な問題の一つであり 2017 年 12 月現在では未解決な問題である.

予想 1 (Gonek-Hejhal 予想)**.** リーマンゼータ関数の非自明零点の重複度が全て1位であると仮定する．このとき, $\lambda > -\frac{3}{2}$ に関して

$$J_\lambda(T) := \sum_{0<\gamma\le T} |\zeta'(\rho)|^{2\lambda} \asymp T(\log T)^{(\lambda+1)^2}.$$

この Gonek-Hejhal 予想の解決のためには零点分布に関する詳細な情報が必要である．そして, 現在知られている零点分布のいくつかの結果や数値計算と比較した際に, この評価は非常に鋭い不等式を予想していることがわかる．また, そのような強い不等式でるので応用もいくつかある．例えば, Ng は [8] で, この Gonek-Hejhal 予想下で $M(x)$ の非常によい評価を与えている．

今回の研究はこの零点での導関数の和がディリクレ L 関数ではどうなるのかというところに焦点を置く．以上の Gonek-Hejhal 予想のようなリーマンゼータ関数の話をディリクレ L 関数へと拡張することは一般の素数を等差数列中の素数の話へと拡張することを意味している．

2 結果

次の結果は Garav と Sankaranarayanan によりリーマンゼータ関数の場合に得られた結果をディリクレ L 関数に拡張した定理である．

定理 1. χ を法を q とする原始ディリクレ指標とする．今, $L(s,\chi)$ の全ての零点の重複度が *1* 位であると仮定する．このとき, $T > T_0(q) > 0$ に対して

$$\sum_{|\gamma|\le T_\nu} \frac{1}{L'(\rho,\chi)} = \frac{T_\nu}{\pi} + O\left(\exp\left(C(\log\log T)^2\right)\right)$$

をみたす $T_\nu \in [T/2, T]$ が存在する．ただし, $T_0(q)$ は q のみに依存する十分大きな定数であり, 和については $L(s,\chi)$ の $s = 0, \frac{1}{2}$ を除く零点 $\rho = \beta + i\gamma$ で $-3/4 < \beta < 1, |\gamma| \le T$ をみたす零点全体を走る和としている．特に, $T > T_0(q) > 0$ に関して

$$\sum_{0\le\gamma\le T} \frac{1}{|L'(\rho,\chi)|} \gg T \tag{2.1}$$

も成り立つ．

上記の結果は以下の Ramachandra と Sankaranarayanan の2人により示された $\zeta(s)$ に関する臨界領域内の水平線上での一様な下からの評価をディリクレ L 関数に拡張することで得ることができる．その拡張が以下の結果である．

定理 2. $\alpha \ge 20$ である定数とし, $T \ge T_0(\alpha) > 0, Q \ge 1$ とする．ただし, $T_0(\alpha)$ は α にのみ依存する十分大きな定数とする．このとき,

$$\min_{T\le t\le(\nu_\alpha(Q)+1)T} \max_{\substack{\frac{1}{2}\le\sigma\le 2 \\ \chi\in S(Q)}} |L(\sigma+it,\chi)|^{-1} \le \exp(C(\alpha)(\log\log(QT))^2) \tag{2.2}$$

が成り立つ．ただし, $S(Q)$ は法が Q 以下の原始ディリクレ指標全体の集合とし, $C(\alpha) > 0$ は α のみに依存する定数で,

$$\nu_\alpha(Q) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad Q \le (\log(T))^{\alpha/4}, \\ Q^2 & \text{if} \quad Q > (\log(T))^{\alpha/4} \end{cases}$$

である．

この定理 2 の証明は省略する．方針だけを少し述べると, Montgomery による実部が 1/2 付近の零点密度定理 [7] を用いて零点が近くにないような領域上でディリクレ L 関数の対数微分を複素解析を用いて評価をすることで証明できる．

この定理は指標についても一様な評価していることも注意しておきたい．指標について一様に (2.2) のような評価 T^ε-オーダーをもつ水平線を取ると, そこで指標について和や積を取っても T^ε-オーダーを持つことがわかり, 複素解析を行う上ではよい評価を得ることができる．例えば, 等差数列へと応用するためには指標の和を考えたいのだが, 指標に依存して (2.2) のような評価ができる場所が変わってしまうと都合が悪い．しかし, 指標について一様に評価をすることでそのような状況は回避できる．また, ディリクレ L 関数の積を考えることでアーベル拡大な代数体のデデキントゼータ関数を表すことも知られており, そちらへの応用も指標について一様に評価しているから可能となる．それが次の系である．

系 1. $\alpha \ge 20$ である定数とし, $T \ge T_0(\alpha) > 0$ とする．また, $K/\mathbb{Q}$ をアーベル拡大で K_m を $K \subset K_m$ をみたす最小の円分体とする．このとき,

$$\min_{T \le t \le (\nu_\alpha(m)+1)T} \max_{\frac{1}{2} \le \sigma \le 2} |\zeta_K(\sigma + it)|^{-1} \le \exp(mC(\alpha)(\log\log(mT))^2)$$

が成り立つ．

また, このことから次のデデキントゼータ関数の導関数の零点での和についての評価も得ることができる．

定理 3. K を代数体で $\mathbb{Q}$ 上アーベル拡大なものとする．今, $\zeta_K(s)$ の全ての非自明零点の重複度が *1* 位であると仮定する．このとき, $T > T_0(K) > 0$ に対して

$$\sum_{|\gamma| \le T_\nu} \frac{1}{\zeta_K'(\rho)} = \frac{T_\nu}{\pi} + O\left(\exp\left(C(\log\log T)^2\right)\right)$$

をみたす $T_\nu \in [T/2, T]$ が存在する．ただし, $T_0(K)$ は K のみに依存する十分大きな定数であり, 和については $\zeta_K(s)$ の零点 $\rho = \beta + i\gamma$ で $-3/4 < \beta < 1, |\gamma| \le T$ をみたす零点全体を走る和としている．特に, $T \ge T_0(m) > 0$ に関して

$$\sum_{|\gamma| \le T_\nu} \frac{1}{|\zeta_K'(\rho)|} \gg T \tag{2.3}$$

も成り立つ．

評価 (2.1) と (2.3) は Gonek-Hejhal 予想の $\lambda = -1/2$ の場合に関する下からの評価を求めた結果である．これはリーマンゼータ関数の場合の結果 [2] と同等の結果である．Gonek-Hejhal 予想によるとリーマンゼータ関数の場合の真なる評価は T ではなく $T(\log T)^{1/4}$ まで評価できることが望ましい．しかし, これはリーマンゼータ関数の場合でも未だにこの評価までは到達しておらず, それはリーマン予想を仮定しても現在できていない．また, Gonek-Hejhal 予想のディリクレ L 関数やデデキントゼータ関数での類似が成り立つか, という問題はは代数体のメビウス関数や等差数列上でのメビウス関数を考えた際への応用があることから重要な問題となる．しかし, それに関して言及している文献は筆者の知るところでは無く, 今回の結果はその類似への拡張のきっかけの一つとなればと期待して行った研究である．

注意 1. 系 1 はアーベル拡大に制限した下からの評価に対する結果である．この結果を一般の代数体へ拡張することは難しいように思う．その理由としてはディリクレ L 関数に関する定理 2 の証明は零点密度定理が非常に重要な役割を果たす．そして $\mathbb{Q}$ 上のアーベル拡大体 K はディリクレ L 関数の零点密度定理により充分な零点密度の結果を得ることができそこから証明することも可能である．しかし, 一般の代数体に関する零点密度定理はほとんど何も知られていない．唯一とも言える参考文献としては Heath-Brown による [5] であるがこの結果は臨界線上 $\sigma = 1/2$ 付近では非常に悪い評価しか得られていないものとなっている．

3 定理 1 の証明

この節では定理 1 の証明を述べる．定理 1 の証明は定理 2 を用いることで割と簡単に示すことができる．

定理 *1* の証明. χ を法が q の原始ディリクレ指標とする．今, 定理 2 を $\alpha = 20$ として適用する．このとき, $T > T_0(q) > \exp\left(q^{1/5}\right)$ として, $T_\nu \in [T, 2T]$ で $1/2 \leq \sigma \leq 2$ に関して一様に

$$|L(\sigma + iT_\nu, \chi)|^{-1} \leq \exp(C(\log\log T)^2) \tag{3.1}$$

が成り立つものが取れる．

また, ディリクレ L 関数の関数等式により, $|L(s,\chi)| \asymp (qt)^{1/2-\sigma}|L(1-s,\chi)|$ が成り立つことから $-1 \leq \sigma \leq 2$ でも一様に不等式 (3.1) は成り立つ．今, 留数定理により

$$\sum_{|\gamma|<T_\nu} \frac{1}{L'(\rho,\chi)} = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{2-iT_\nu}^{2+iT_\nu} + \int_{2+iT_\nu}^{-3/4+iT_\nu} + \int_{-3/4+iT_\nu}^{-3/4-iT_\nu} + \int_{-3/4-iT_\nu}^{2-iT_\nu}\right)\frac{ds}{L(s,\chi)} + O_q(1)$$

が成り立つ．ただし, $s = 0, \frac{1}{2}$ で $L(s,\chi)$ が零点を持つ場合, それは $O_q(1)$ に吸収される．ここで,

$$\left|\int_{-3/4\pm iT_\nu}^{2\pm iT_\nu} \frac{ds}{L(s,\chi)}\right| \ll \exp(C(\log\log T)^2)$$

であり, $|L(-3/4+it,\chi)|^{-1} \ll (|t|+1)^{-5/4}$ なので,

$$\left|\int_{-3/4-iT_\nu}^{-3/4+iT_\nu} \frac{ds}{L(s,\chi)}\right| \ll 1$$

が成り立つ. そして,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{2-iT_\nu}^{2+iT_\nu} \frac{ds}{L(s,\chi)} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T_\nu}^{T_\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n^{2+it}}dt = \frac{T_\nu}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n^2}\int_{-T_\nu}^{T_\nu} n^{-it}dt \\ &= \frac{T_\nu}{\pi} + O\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\log n}\right) = \frac{T_\nu}{\pi} + O(1)\end{aligned}$$

となる. 従って,

$$\sum_{|\gamma|<T_\nu}\frac{1}{L'(\rho,\chi)} = \frac{T_\nu}{\pi} + O\left(\exp\left(C(\log\log T)^2\right)\right)$$

が成り立つ. 特に,

$$\sum_{|\gamma|\le 2T}\frac{1}{|L'(\rho,\chi)|} \ge \sum_{|\gamma|<T_\nu}\frac{1}{|L'(\rho,\chi)|} \ge \left|\sum_{|\gamma|<T_\nu}\frac{1}{L'(\rho,\chi)}\right| \gg T$$

となる. 従って, 定理 1 が導かれる. □

参考文献

[1] K. M. Bartz, On some complex explicit formulae connected with the Möbius function.II, *Acta Arith.* **LVII** (1991), 295–305.

[2] M. Z. Garaev and A. Sankaranarayanan, The sum involving derivative of $\zeta(s)$ over simple zeros, *J. Number Theory* **117** (2006), 122–130.

[3] S. M. Gonek, On negative moments of the Riemann zeta-function, *Mathematika.* **36** (1989), 71–88.

[4] D. Hejhal, On the distribution of log $\left|\zeta'(\frac{1}{2}+it)\right|$, *Number theory, trace formula and discrete groups* (ed. K. E. Aubert, E. Bombieri and D. Goldfeld, Academic Press, San Diego, 1989) 343–370.

[5] D. R. Heath-Brown, On the density of the zeros of the Dedekind Zeta-function, *Acta Arith.* **33** (1977), 169–181.

[6] A. E. Ingham, On two conjectures in the theory of numbers, *Amer. J. Math.* **64** (1942), 313–319.

[7] H. L. Montgomery, Zeros of L-Functions, *Invent. Math.* **8** (1969), 346–354.

[8] N. Ng, The distribution of the summatory function of the Möbius function, *Proc. London Math. Soc.* (3) **89** (2004), 361–389.

[9] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Second Edition, Edited and with a preface by D. R. Heath–Brown, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.