無限個の高次元周期再帰方程式の導出アルゴリズムについて

弓林　司 *(Tsukasa YUMIBAYASHI)
大妻女子大学社会情報学部

概要

n 周期再帰方程式とは任意の初期点が n 周期点となるような差分方程式である。本講演では周期再帰方程式の代数構造に注目した 1 つの基礎となる周期再帰方程式から無限個の周期再帰方程式を導出するアルゴリズムについて紹介する。

1 Introduction

n 周期再帰方程式[*1] F とは任意の初期点が n 周期点となるような差分方程式である [1][2]。

例 [1]:

- 2 周期再帰方程式:

$$X = \frac{a}{x}, \quad a \neq 0, \quad x, X, a \in \mathbb{C} \tag{1}$$

- 5 周期再帰方程式:

$$X = \frac{1+x}{y}, \quad Y = x, \quad x, y, X, Y \in \mathbb{C} \tag{2}$$

これらの周期性は以下のように “シンボリック” な計算によって確かめることができる：

- 2 周期再帰方程式:

$$x \to \frac{a}{x} \to \frac{a}{\frac{a}{x}} = x \tag{3}$$

- 5 周期再帰方程式:

$$\begin{aligned}(x, y) &\to \left(\frac{1+x}{y}, x\right) \to \left(\frac{1+x+y}{xy}, \frac{1+x}{y}\right) \to \\ &\to \left(\frac{1+y}{x}, \frac{1+x+y}{xy}\right) \to \left(y, \frac{1+y}{x}\right) \to (x, y)\end{aligned} \tag{4}$$

* E-mail: tsukasa.yumibayashi@otsuma.ac.jp

*1 広田, 矢作 [2] では単に再帰方程式（recurrence equation）と呼んでいたが、recurrence equation を単なる漸化式（recurrence relation）と誤解されることを避ける為、本公演では周期性を強調するこの呼び名を採用した。

シンボリックな計算とは、変数の代数構造以外、何も仮定していない計算のこととする[*2]。本公演では周期再帰方程式が持つこの構造に注目し新たな周期再帰方程式を導出するアルゴリズムについて紹介したい。

周期再帰方程式は十分な不変量[*3]を持ち、重要な可積分系のクラスを与えると信じられてきた[*4]。しかし、周期再帰方程式の例は最近まで [1][2][3][4] などで与えられた低い次元のものばかりで、しかも、数が多くなかった為か、或いは、職人芸的に発見され、その統一的構造が見えにくかった為か、ちゃんとした理由はわからないが、この方面の研究が大きく盛り上がることはなかった。そんな中で、[5] において不変周期点代数多様体（Invariant Variety of Periodic Points=IVPP）[6][7][8] を持つ高次元有理写像を用いて、（IVPP が明示的に与えられていれば原理的には無限個の）高次元周期再帰方程式を導出するアルゴリズムが発見された。n 周期 IVPP とは、不変量を持つ有理写像の不変量一定面（等位面）であり、かつ、その等位面全体が n 周期点となるようなもののことである。

本公演では、周期再帰方程式がシンボリックな計算による周期性を持つことを利用し、複素変数（$x \in \mathbb{C}$）を陽に実 2 変数の形式（$x + iy, x, y \in \mathbb{R}$）で書き直し、改めて実変数を複素変数と見なす（$x, y \in \mathbb{C}$）こと（倍化）により高次元周期再帰方程式を導出するアルゴリズムを紹介する。また、このアルゴリズムは繰り返し適用することが可能であり、これにより（原理的に）無限個の高次元周期再帰方程式が導出できることに注意する。特に、このアルゴリズムを IVPP を持つ有理写像に適用することで、本公演のアルゴリズムと [5] のアルゴリズムを組み合わせた、無限個の周期の高次元周期再帰方程式を導出するアルゴリズムが得られる [9]。

2 IVPP について

本節では不変周期点代数多様体 (IVPP)[6][7][8]、特異点閉じ込め（Singularity Confinement=SC）[*5] [10][11] を用いた IVPP の導出アルゴリズム [12]、IVPP を用いた周期再帰方程式の導出アルゴリズム [5] について簡単にレビューする。

2.1 IVPP

d 次元有理写像

$$F : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^d \tag{5}$$

[*2] 可換な四則演算しか使っていないという意味で。

[*3] n 周期再帰方程式は、その周期性 $x_1 \mapsto x_2 \mapsto \cdots \mapsto x_n = x_1$ より、$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ の対称多項式が不変量となる。

[*4] 例えば [3] が周期再帰方程式について詳しい。

[*5] SC はいわゆる連続系における "動く特異点を持たない" という Painlevé 性の離散系の対応物と考えられている。即ち、SC とは、ざっくばらんに言えば、例えば有理写像の分母の零点を初期点として写像を行えばナイーブには写像先は無限大となるが、うまく正規化することで、無限大を通過した点が初期点の情報を保ったまま有限の点へ返ってくる現象のことである。一時離散可積分性の為の判定テストとして期待されていた。

が p 個の不変量

$$\boldsymbol{r}:\mathbb{C}^d\to\mathbb{C}^p,\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}),\quad r(\boldsymbol{x})\in\mathbb{C}(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

を持つとする。このとき n 周期点集合

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^d\ \middle|\ (F^{(n)}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}=0)\ \wedge\ (F^{(m)}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}\neq 0,\ m\leq n)\right\} \tag{7}$$

が不変量のみの多項式の零点集合、即ち、代数多様体として与えられるとき

$$\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^d\ \middle|\ \boldsymbol{\gamma}^{(n)}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}))=0\right\},\quad \boldsymbol{\gamma^{(n)}}\circ\boldsymbol{r}:\mathbb{C}^d\to\mathbb{C}^{d-p} \tag{8}$$

これを IVPP という。IVPP の重要な性質は以下の IVPP 定理に集約されている：

F を d 次元有理写像で p 個不変量を持つとする。条件 $p\geq d/2$ を満たすならば n 周期 *IVPP* と *IVPP* を成さない m 周期周期点集合[*6] は $^\forall n,m\in\mathbb{Z}$ に対し *1* つの写像に同時に存在しない。

写像 (5) は選んだ初期点が含まれる等位面に制限される。逆に写像を等位面に制限した写像を構成することができる。従って、写像 (5) を n 周期 IVPP に制限した写像を構成すると、その写像は任意の初期点に対し n 周期点となる。即ち、写像を n 周期 IVPP へ制限して得られる写像は、n 周期再帰方程式となることがわかる。

2.2 SC を用いた IVPP の導出アルゴリズム

IVPP は更に重要な性質を持つ。それは特異点閉じ込め（SC）[10][11] を用いた IVPP の（帰納的）導出アルゴリズムの存在である [12]。このアルゴリズムと、前小節の結果を組み合わせると、このアルゴリズムは帰納的に（原理的に無限個）周期再帰方程式を与えることがわかる。本公演では簡単の為、以下の簡単な写像の場合を用いて、SC を用いた IVPP の導出アルゴリズムについて例示することにしよう。

- 2 次元 Möbius 写像 [13]:

  $$X=x\frac{1-y}{1-x},\quad Y=y\frac{1-x}{1-y},\quad x,y,X,Y\in\mathbb{C} \tag{9}$$

  及び、その 1 つの不変量

  $$r(x,y)=r(X,Y)=xy \tag{10}$$

  を考える。
- SC の為の初期点（ $\{\infty\}$ の原像）を不変量で径数付けた点を p_0 とする：

  $$p_0\in\{(1-x=0)\wedge(R=xy)\}\quad\Rightarrow\quad p_0=(1,R),\quad R\in\mathbb{C}. \tag{11}$$

[*6] 一般に等位面上の離散点集合を与える。

- 写像 (9) を初期点 (11) に対し繰り返し適用することで軌道を得る[*7] ：

$$\begin{aligned} p_0 = (1, R) \to (\infty, 0) \to (-1, -R) \to \\ \to \left(-\frac{1+R}{2}, -\frac{2R}{1+R}\right) \to \left(-\frac{1+3R}{3+R}, -\frac{R(3+R)}{1+3R}\right) \to \ldots \end{aligned} \tag{12}$$

- 次に $(\infty, 0)$ を起点として、n 回写像の後、再度 $(\infty, 0)$ に戻る為の係数に関する条件を見出すと、これが n 周期 IVPP の条件と等価であることがわかる：

$$\begin{aligned} \gamma^{(2)}(R) &= none, \\ \gamma^{(3)}(R) &= 3 + R, \quad \text{so on.} \end{aligned} \tag{13}$$

- 最後に写像 (9) を n 周期 IVPP へ制限する。こうして得られた写像は n 周期再帰方程式となる：

$$X = \frac{x+3}{1-x}, \quad \text{so on.} \tag{14}$$

確認:

$$x \to \frac{x+3}{1-x} \to \frac{x-3}{1-x} \to x \tag{15}$$

3 アルゴリズム

本節では基礎方程式から高次元写像を導くためのアルゴリズムを与える。

F を d 次元 “複素” 写像 (5)

$$F : (x_1, \ldots, x_d) \mapsto (X_1, \ldots, X_d), \quad x_i, X_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \ldots, d$$

で p 個 “複素” 不変量 (6)

$$r_j := r_j(x_1, \ldots, x_d) = r_j(X_1, \ldots, X_d), \quad r_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \ldots, p$$

を持つものとする。

これら写像、及び、不変量は共に複素変数であるが、(5), (6) の表式ではそれが強調されていない。そこで複素変数を明示化する為に複素化写像

$$A_i^{(1)} : x_i \mapsto x_i + \sqrt{-1} x_{d+i}, \quad B_j^{(1)} : r_j \mapsto r_j + \sqrt{-1} r_{p+j}, \quad i = 1, \ldots, d, \quad j = 1, \ldots, p \tag{16}$$

を定義する。この写像を用いることで F の複素変数の明示化は

$$F[1] : (x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}, \ldots, x_{2d}) \mapsto (X_1, \ldots, X_d, X_{d+1}, \ldots, X_{2d}) \tag{17}$$

[*7] 初期点 p_0 の次の点は無限遠点となっているが、さらに次の点は有限点であり、かつ、初期点の情報を保持していることがわかる（詳細には立ち入らないが正規化の手続きが必要である）。

で与えられる。但し

$$X_i + \sqrt{-1}X_{d+i} = [F(A_1^{(1)}(x_1), \ldots, A_d^{(1)}(x_d))]_i, \quad i = 1, \ldots, d \tag{18}$$

i.e.

$$X_i = [F[1](x_1, \ldots, x_{2d})]_i = \Re([F(A_1^{(1)}(x_1), \ldots, A_d^{(1)}(x_d))]_i), \tag{19}$$

$$X_{d+i} = [F[1](x_1, \ldots, x_{2d})]_{d+i} = \Im([F(A_1^{(1)}(x_1), \ldots, A_d^{(1)}(x_d))]_i), \qquad i = 1, \ldots, d \tag{20}$$

と置いた。

通常、我々は (18) を、$2d$ 次元 "実" 写像で $2p$ 個 "実" 不変量を持つものと考える。しかし、実変数 $(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}, \ldots, x_{2d})$ を改めて複素変数と思うことで、$2d$ 次元複素写像、及び、$2p$ 個の複素不変量が得られる。

この操作は繰り返し用いることができることに注意する。従って、この操作を $^\forall k \in \mathbb{N}$ 回繰り返すことで、$2kd$ 次元複素写像、及び、$2kp$ 個の不変量を得ることができる：

$$X_i = \Re([F[k](A_1^{(k)}(x_1), \ldots, A_{kd}^{(k)}(x_{kd}))]_i), \tag{21}$$

$$X_{2kd+i} = \Im([F[k](A_1^{(k)}(x_1), \ldots, A_{kd}^{(k)}(x_{kd}))]_i), \quad i = 1, \ldots, 2kd \tag{22}$$

ここで、IVPP 定理の写像の次元と不変量の個数の関係の仮定 $p \geq d/2$ を思い出すと、この手続きを行ったとしても $2kp \geq 2kd/2$ となるだけで、仮定が不変に保たれていることがわかる。

4　例

本節では我々のアルゴリズムの使用例を与える。

4.1　2 周期再帰方程式

次の 2 周期再帰方程式 (1) を基礎方程式とする：

$$X = \frac{1}{x}$$

この写像の倍化変数 $x \mapsto x + \sqrt{-1}y$ に依る倍化写像は

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad Y = -\frac{y}{x^2 + y^2} \tag{23}$$

となる。

4.2　5 周期再帰方程式

次の 5 周期再帰方程式 (2) を基礎方程式とする：

$$X = \frac{1+x}{y}, \quad Y = x$$

この写像の倍化変数 $x \mapsto x + \sqrt{-1}u, y \mapsto y + \sqrt{-1}v$ に依る倍化写像は

$$\begin{aligned} X &= \frac{y(1+x)+uv}{y^2+v^2}, \\ U &= \frac{-v(1+x)+yu}{y^2+v^2}, \\ Y &= x, \\ V &= u \end{aligned} \tag{24}$$

となる。実際に (24) を シンボリックに写像すると

$$\begin{aligned} (x,u,y,v) \to & \left(\frac{y(1+x)+uv}{y^2+v^2}, \frac{-v(1+x)+yu}{y^2+v^2}, x, u \right) \to \\ \to & \left(\frac{xy(1+x+y)+xv^2+yu^2-uv}{(x^2+u^2)(y^2+v^2)}, -\frac{xv(1+x)+yu(1+y)+uv(u+v)}{(x^2+u^2)(y^2+v^2)}, \right. \\ & \left. \frac{y(1+x)+uv}{y^2+v^2}, \frac{-v(1+x)+yu}{y^2+v^2} \right) \to \\ \to & \left(\frac{x(1+y)+uv}{x^2+u^2}, -\frac{u(1+y)-xv}{x^2+u^2}, \right. \\ & \left. \frac{xy(1+x+y)+xv^2+yu^2-uv}{(x^2+u^2)(y^2+v^2)}, \frac{xv(1+x)+yu(1+y)+uv(u+y)}{(x^2+u^2)(y^2+v^2)} \right) \to \\ \to & \left(y, v, \frac{x(1+y)+uv}{x^2+u^2}, -\frac{u(1+y)-xv}{x^2+u^2} \right) \to (x,u,y,v) \end{aligned} \tag{25}$$

を得る。即ち (24) が 5 周期再帰方程式となることが確かめられた。

4.3　2 次元 Möbius 写像

次の 2 次元 Möbius 写像 (9) を基礎方程式とする：

$$X = x\frac{1-y}{1-x}, \quad Y = y\frac{1-x}{1-y}$$

この写像は次の不変量 (10) を持っていた：

$$r(x,y) = xy$$

[13] で (8) の一般の IVPP を与える公式が与えられている：

$$\gamma^{(n)}(r) = r + \tan^2\left(\frac{\pi m}{n}\right), \quad m = 1, 2 \ldots, n-1, \quad n = 3, 4, \ldots \tag{26}$$

その幾つかを具体的に書くと

$$\begin{aligned} \gamma^{(2)}(r) &= none, \\ \gamma^{(3)}(r) &= 3 + r, \\ \gamma^{(4)}(r) &= 1 + r, \quad \text{so on.} \end{aligned}$$

となる。

この写像の倍化変数 $x \mapsto x + \sqrt{-1}u, y \mapsto y + \sqrt{-1}v$ に依る倍化写像

$$\begin{aligned} X &= \frac{x(1-x)(1-y) - u^2(1-y) + uv}{(1-x)^2 + u^2}, \\ U &= \frac{-xv(1-x) + u(1-y+uv)}{(1-x)^2 + u^2}, \\ Y &= \frac{y(1-y)(1-x) - v^2(1-x) + uv}{(1-y)^2 + v^2}, \\ V &= \frac{-yu(1-y) + v(1-x+uv)}{(1-y)^2 + v^2} \end{aligned} \tag{27}$$

及び、不変量は

$$r(x,u,y,v) = xy - uv, \quad s(x,u,y,v) = xv + yu \tag{28}$$

となる。

ここで (27) の IVPP から周期再帰方程式を得る為に SC を用いた IVPP の導出を行おう：

1. SC の為の初期点（$\{\infty\}$ の原像）を不変量で係数付けた点を p_0 とする：

$$\begin{aligned} p_0 \;&= \{(D_1^{(1)}(x,u,y,v) = 0) \wedge (D_1^{(2)}(x,u,y,v) = 0) \\ &\qquad \wedge (r(x,u,y,v) = R) \wedge (s(x,u,y,v) = S)\} \\ \Rightarrow p_0 &= \Bigg(\frac{1}{4}(R \pm \sqrt{-1}S), -\frac{1}{4}(-S \pm (R-1)), \\ &\qquad \frac{\pm(R^2 - 3R - S^2) + \sqrt{-1}S}{\pm(1+R) + \sqrt{-1}S}, \frac{\pm 3S + \sqrt{-1}(R^2 - R + S^2)}{2(\pm(1+R) + \sqrt{-1}S)}\Bigg) \end{aligned} \tag{29}$$

2. 写像を初期点に対し繰り返し適用することで軌道を得る（簡単の為 x 成分のみ書き下すことにする）

$$\begin{aligned} p_0 &\to \infty \to \infty \to \frac{1}{4}(-R - 3 \pm \sqrt{-1}S) \to -\frac{\mp(R^2 + 10R + 5 + S^2) + 4\sqrt{-1}S}{4(\mp(R+3) + \sqrt{-1}S)} \\ &\to \frac{R(R^2 + 21R + 35) + S^2(15+R) \mp \sqrt{-1}S(R^2 + 6R + 9 + S^2)}{8(\pm(R+3) + \sqrt{-1}S)(\mp(R+1) + \sqrt{-1}S)} \to \ldots. \end{aligned} \tag{30}$$

3. ∞ を起点として n 回写像の後、再度 ∞ に戻る為の係数に関する条件として n 周期 IVPP の条件を与える：

$$(\mp(R+3)+\sqrt{-1}S=0)\wedge(\mp(R+1)+\sqrt{-1}S=0), \quad \text{so on}, \tag{31}$$

4.3.1 注意

こうして得られた IVPP の条件 (31) は従来のアルゴリズムの構造からすれば 3 周期 IVPP の条件となるはずである。しかし実際は周期 12 を持つことがわかっている。このことは虚部 S を 0 にとれば倍化する前の写像 (9) のときの 3、及び、4 周期 IVPP の条件の共通部分を定義していることからも知ることができる。しかしこの現象の詳細な構造についてはまだよくわかっていない。こうして一見自明に見える我々のアルゴリズムであったが非自明な構造を持つことがわかった。

参考文献

[1] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics* (Addison-Wesley), 1994.

[2] R. Hirota and H. Yahagi, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **71**, 2867, 2002.

[3] 広田良吾, 高橋大輔, "差分と超離散", 共立出版, 2003.

[4] A. Cima, A. Gasull, and V. Manõsa, *J. Difference Equations and Appl.*, **12**, 697716, 2006.

[5] S. Saito and N. Saitoh, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**, 12775-12787, 2007.

[6] S. Saito and N. Saitoh, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **76** No.2 p.024006, 2007.

[7] S. Saito and N. Saitoh *J. Math. Phys*, **51** 063501, 2010.

[8] S. Saito and N. Saitoh, *"Invariant varieties of periodic points"* in Mathematical Physics Research Developments, 2008 Nova Science Publishers, Inc., Capt.3 pp 85-139, 2008.

[9] T. Yumibayashi, *J. Difference Equations and Appl.*, **23**, 10811092, 2017.

[10] B. Grammaticos, A. Ramani, and V. Papageorgiou, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 1825.
B. Grammaticos, A. Ramani, K. M. Tamizhmani, T. Tamizhmani, and A. S. Carstea, *Advances in Difference Equations*, Volume 2008, Article ID 317520
A. Ramani, B. Grammaticos, J.Satsuma, *Phys. Lett.* A 169 (1992) 323-328.

[11] S. Lafortune and A. Goriely, *J. Math. Phys.* **45**, 1191-1208 (2004).

[12] T. Yumibayashi, S. Saito, Y. Wakimoto, *Phys. Lett. A.*, **378**, 480-483, 2014.

[13] S. Saito, N. Saitoh, H. Harada, T. Yumibayashi and Y. Wakimoto, AIP Advances, AIP ID: 003306ADV, 2013.