最隣接相互作用する量子スピン系について

冨永隼人（Hayato TOMINAGA）
北海道大学大学院理学院数学専攻

1 導入

素粒子はスピンまたはスピン角運動量と呼ばれる角運動量の一種を持っていて，スピンは量子力学に特有のものである．スピンは磁性の起源であり，磁石のような磁性が関係する様々な現象の原因になっている．

磁石が示すいくつかの性質の中で，強磁性と反強磁性がある．強磁性は，物質全体として巨視的にみると磁化を持つ物質が示す磁性のことをいい，反強磁性は，巨視的には磁化を持たない物質が示す磁性のことをいう．

Heisenberg 模型は，格子上の隣り合う 2 つのスピンの間に相互作用が働く系を記述する基本的な模型である．量子系の反強磁性 Heisenberg 模型において，相転移が起きることは厳密に証明されている [1]．[1] は鏡映正値性という方法を用いて，長距離秩序と呼ばれる秩序が存在することを証明することで相転移が起きることを証明している．また，[1] と同様の方法で反強磁性 Heisenberg 模型において長距離秩序が存在することが証明されている [2]．しかし，強磁性 Heisenberg 模型において，相転移が起きるかどうか分かっていない．では強磁性 Heisenberg 模型の一部の相互作用を反強磁性的相互作用に置き換えた模型ではどのようなことが起きているだろうか？この変形した模型において長距離秩序と呼ばれる秩序が低温で存在する十分条件を [1] と同様の方法で求めることができたので，本講演ではこれを紹介する．

ν 次元超立方格子 $\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{Z}^\nu | 0 \leq \alpha_i \leq L_i - 1, L_i \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, \nu\}$ の各格子点に大きさが S のスピンがあるような系を考える．ただし，$S = 1/2, 1, 3/2, \ldots$ である．サイト $\alpha \in \Lambda$ のスピンを $S_\alpha = (S_\alpha^{(1)}, S_\alpha^{(2)}, S_\alpha^{(3)})$ とおくと，$S_\alpha^{(j)}$ は $S_\alpha^{(j)} \in \mathcal{A}_\alpha := \mathcal{B}(\mathcal{H}_\alpha)$ $(\mathcal{H}_\alpha = \mathbb{C}^{2S+1})$ であり，自己共役である．

自己共役作用素 $S_\alpha^{(j)} \in \mathcal{A}_\alpha$ $(\alpha \in \Lambda, j = 1, 2, 3)$ は次の条件を満たす．

$$\begin{cases} [S_\alpha^{(1)}, S_\alpha^{(2)}] = iS_\alpha^{(3)}, \\ [S_\alpha^{(2)}, S_\alpha^{(3)}] = iS_\alpha^{(1)}, \\ [S_\alpha^{(3)}, S_\alpha^{(1)}] = iS_\alpha^{(2)}, \\ S_\alpha^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} (S_\alpha^{(j)})^2 = S(S+1). \end{cases}$$

この $(S_\alpha^{(1)}, S_\alpha^{(2)}, S_\alpha^{(3)})$ をスピン S のスピン作用素という．

強磁性 Heisenberg 模型の一部の相互作用を反強磁性的相互作用に置き換えた模型を記述するハミルトニアンを次のように定義する．

定義 1.1. $n \in \mathbb{N}, r > 0, \nu \geq n+1$ とし，H_Λ を

$$H_\Lambda = -\sum_{\alpha \in \Lambda} \left(\sum_{m=n+1}^{\nu} S_\alpha \cdot S_{\alpha+\delta_m} - r \sum_{m=1}^{n} S_\alpha \cdot S_{\alpha+\delta_m} \right)$$

と定義する．ただし， δ_m は $(\delta_m)_i = \delta_{im}$ を満たすとし， Λ の境界条件は周期的境界条件とする．

[3] のように，H_Λ が記述する模型において，長距離秩序が存在するような r の範囲を求める．Λ に対して，$\mathcal{H}_\Lambda = \otimes_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{H}_\alpha$ とおき，$\mathcal{A}_\Lambda = \mathcal{B}(\mathcal{H}_\Lambda)$ とおく．

定義 1.2. $A \in \mathcal{A}_\Lambda, \beta > 0$ として，分配関数を

$$Z_\Lambda = \mathrm{Tr}\left[e^{-\beta H_\Lambda}\right]$$

と定義し，期待値を

$$\langle A \rangle_\Lambda = Z_\Lambda^{-1} \mathrm{Tr}\left[A e^{-\beta H_\Lambda}\right]$$

と定義する．

定義 1.3.

$$\liminf_{|\Lambda| \to \infty} \left\langle \left(|\Lambda|^{-1} \sum_{\alpha \in \Lambda} (-1)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} S_\alpha^{(3)} \right)^2 \right\rangle_\Lambda \neq 0$$

が成り立つとき，長距離秩序が存在するという．

いくつかの仮定を付け加えると，長距離秩序が存在することは

$$\liminf_{|x| \to \infty} \liminf_{|\Lambda| \to \infty} \left\langle (-1)^{x_1 + \cdots + x_n} S_0^{(3)} S_x^{(3)} \right\rangle_\Lambda \neq 0$$

と同値になる．

2 主結果

定理 2.1. $n \geq 3, \nu, r, S$ が

$$\frac{2}{3} S(S+1)^2 > G(n) \left(r^{-1} S(\nu - n) + nS + \frac{1}{2} \right)$$

をみたすとき長距離秩序が存在する．

この定理から次の系が従う．

系 2.2. $n \geq 3$, $S \geq 1$ とする．r, ν が

$$r > \frac{2}{3}(\nu - 3)$$

をみたすとき長距離秩序が存在する．

定理 2.1 を証明するために，次の 2 つの命題を使う．

命題 2.3. L_i は偶数とし，$p \in \Lambda^*$ に対して，

$$\tilde{S}_p = |\Lambda|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\alpha \in \Lambda} (-1)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} e^{-ip\alpha} S_\alpha$$

とおく．このとき

$$(\tilde{S}_{-p}^{(j)}, \tilde{S}_p^{(j)}) \leq \frac{1}{2r\beta E_p}$$

が成り立つ．ここで，$E_p = \sum_{m=1}^n (1 - \cos p_m)$ であり，$(\cdot, \cdot)$ は Duhamel two-point function である．

命題 2.4.

$$\sum_{j=1}^3 \left\langle \left[\tilde{S}_p^{(j)}, \left[\beta H_\Lambda, \tilde{S}_{-p}^{(j)} \right] \right] \right\rangle_\Lambda \leq 4 F_p S^2 \beta + 4 r E_p' S(S + (2n)^{-1}) \beta$$

が成り立つ．ただし，

$$E'_p = \sum_{m=1}^{n} (1 + \cos p_m)$$

$$F_p = \sum_{m=n+1}^{\nu} (1 - \cos p_m)$$

である．

命題 2.3 と命題 2.4 は [1] と同様の手法で証明することができる．この 2 つの不等式を使うことで長距離秩序が存在するための十分条件を得ることができる．

参考文献

[1] F. J. Dyson, E. H. Lieb, B. Simon, J. Stat. Phys. 18, 335-383, 1978

[2] E. J. Neves, J. F. Perez, Phys. Lett. 114A, 331-333, 1986

[3] T. Kennedy, E. H. Lieb, B. S. Shastry, J. Stat. Phys. 53, 1019-1030, 1988