Persistent Stiefel-Whintey homology classes for posets and categories

村井 涼 石橋 浩太
Ryo MURAI* Kota ISHIBASHI†

概要

Stiefel-Whitney ホモロジー類は Sullivan によって特異空間に対して定義された特性類であり，空間上の構成的関数関手からホモロジー関手への自然変換に一般化されることが知られている．本研究ではこの特性類を，有限ポセットと有限圏を対象に証明も含めて組合せ論的に再構成した．さらに，これをパーシステントホモロジーの文脈に一般化し，「パーシステントStiefel-Whitney ホモロジー類」を構成した．

1 はじめに

可微分多様体の重要な不変量として，特性類というコホモロジー類が可微分多様体の接束に対して定義されることが知られているが*1，接束が定まらない特異空間に対しても，その空間のあるホモロジー類として特性類を定義できることがある．このうちで最初のものが Sullivan が mod. 2 オイラー空間*2に対して定義した Stiefel-Whitney ホモロジー類である [6] *3．以下，これを単に「Stiefel-Whitney 類」と呼ぶ．

本研究では，この Stiefel-Whitney 類を有限ポセット（有限半順序集合）に対して定義した．また，特異空間の特性ホモロジー類は空間上のある関手からホモロジー関手への自然変換として捉えられることが知られているが (c.f. [5])，我々の理論でもポセット（の順序複体）上の「よい」構成的関数がなす関手 $\mathcal{F}^{eu}$ を構成することで，ポセット上の Stiefel-Whitney 類を $\mathcal{F}^{eu}$ からホモロジー関手 H_* への自然変換に一般化している．このように自然変換に一般化された Stiefel-Whitney 類を特に「Stiefel-Whitney 類変換」と呼ぶことにする．（第 2 節）

有限圏は一般に有限ポセットより複雑な構造を持つ対象であるが，ある仕方で有限ポセットを

---

* 北海道大学大学院理学院数学専攻修士課程 2 年（発表者）
† 株式会社ワークスアプリケーションズ

*1 例えば [4] を参照されたい．
*2 実代数的集合や実解析的集合がその例になっている．
*3 特異空間のホモロジーに値を取るこの種の特性類についての包括的なサーベイとしては [5] が挙げられる．日本語の文献としては，[10, 12, 9] がある．Stiefel-Whitney ホモロジー類については，[13] の最終章にも簡単な紹介がある．

対応させることにより，有限圏に対する Stiefel-Whitney 類変換を定義することができる．（第 3 節）[*4]

以上の応用として，近年位相的データ解析の基礎理論として活発な研究がなされているパーシステントホモロジー理論に適合する仕方で Stiefel-Whitney 類変換を一般化した．（第 4 節）

また，本稿ではその実装の詳細については触れないが，ポセットのホモロジー群及びオイラーポセットの Stiefel-Whitney 類を計算する，第二著者による C++ プログラム [2] がある．

以下，ポセットと圏は特に断らない限り有限のもののみを考える．ポセットや圏の定義及び単体複体のホモロジー論，パーシステントホモロジー理論についての知識は仮定した．単体複体のホモロジー論については [8] などのトポロジーの教科書を，パーシステントホモロジーについては [1, 7, 14] を参照されたい．

2　ポセット上の Stiefel-Whitney 類変換

2.1　ポセット上の構成的関数

ポセット P に対し，その非空な全順序部分集合すべてからなる集合は抽象単体複体の構造を持つ．これを順序複体 (order complex) と言い，$\Delta(P)$ で表す．$\Delta(P)$ の単体（すなわち P の全順序部分集合）σ に対し，その次元を $\dim\sigma := \#\sigma - 1$ と定義し，ポセット P の次元を $\dim P := \max\{\dim\sigma \mid \sigma \in \Delta(P)\}$ と定義する．ポセット P の重心細分 (barycentric subdivision) を $Sd(P) := (\Delta(P), \prec)$ で定める．ここで $\prec$ は単体間の面関係 (face relation)，すなわち P の全順序部分集合間の包含順序関係である．また，順序複体 $\Delta(P)$ の重心細分を $\Delta^2(P) := \Delta(Sd(P))$ で定義する．帰納的に，$\mathrm{Sd}^k(P)$ と $\Delta^k(P)$ が定義される．

R を単位元を持つ可換環とする．ポセット P 上の R-構成的関数 (R-constructible function) とは，関数 $\alpha : \Delta(P) \to R$ のことであり，このような関数の集合を $\mathcal{F}(P;R)$ と書く（R が文脈から明らかなときは単に $\mathcal{F}(P)$ と書くこともある）．$\mathcal{F}(P;R)$ には，R の演算から自然に R-代数の構造が入る．$\sigma \in \Delta(P)$ に対し，$\mathbb{1}_\sigma$ を σ に対して 1 を，その他の単体に対しては 0 を対応させるような関数とすると，$\{\mathbb{1}_\sigma\}_{\sigma\in\Delta(P)}$ は $\mathcal{F}(P;R)$ の基底になる．すなわち，任意の構成的関数 α は，$m_\sigma \in R$ を用いて

$$\alpha = \sum_{\sigma\in\Delta(P)} m_\sigma \mathbb{1}_\sigma$$

と一意に書ける．また，$\Delta(P)$ の部分集合 $S \subset \Delta(P)$ に対して

$$\mathbb{1}_S := \sum_{\sigma\in S} \mathbb{1}_\sigma$$

と定める．

$f : P \to Q$ をポセット間の順序を保つ写像とする（このような写像を以下「ポセット間の射」と

[*4] 第 2 節及び第 3 節の内容は，基本的に第二著者による修士論文 [11] に基づいている．

呼ぶ）．f の押し出し (pushforward)$f_*: \mathcal{F}(P;R) \to \mathcal{F}(Q;R)$ を以下の線形拡張により定義する．

$$f_*(\mathbb{1}_\sigma) := (-1)^{\dim\sigma - \dim f(\sigma)} \mathbb{1}_{f(\sigma)}$$

$\mathbf{Posets_{fin}}$ を有限ポセットとポセット間の射がなす圏，$\mathbf{Mod}_R$ を R-加群と加群準同型がなす圏とすると，この対応により $\mathcal{F}(-;R) : \mathbf{Posets_{fin}} \to \mathbf{Mod}_R$ は共変関手となる．

2.2　ポセット上のオイラー標数積分

構成的関数に対してはそのオイラー標数積分 (Euler integral) が定義できる．与えられた部分集合 $S \subset \Delta(P)$ と $\alpha \in \mathcal{F}(P)$ に対して，α の S 上でのオイラー標数積分は以下で定義される：

$$\int_S \alpha := \sum_{\sigma \in S} (-1)^{\dim\sigma} \alpha(\sigma) \in R.$$

特に，$\mathbb{1}_{\Delta(P)} : \Delta(P) \to \mathbb{Z} \in \mathcal{F}(P;\mathbb{Z})$ に対しては以下が成り立つ．

$$\int_{\Delta(P)} \mathbb{1}_{\Delta(P)} = \sum_{\sigma \in \Delta(P)} (-1)^{\dim\sigma} = \chi(\Delta(P))$$

ここで，$\chi(\Delta(P))$ は抽象単体複体 $\Delta(P)$ のオイラー標数であり，その定義はまさに $\sum_{\sigma\in\Delta(P)} (-1)^{\dim\sigma}$ である．また，$\alpha \in \mathcal{F}(P;R)$ のオイラー標数積分は以下のようにも書けることが簡単にわかる．

$$\int_S \alpha = pt_*(\alpha \cdot \mathbb{1}_S) \in \mathcal{F}(pt;R) \cong R.$$

ここで，$pt : P \to pt$ はポセット P から一点ポセット pt への唯一の写像とする．

2.1 節で定義したポセット間の射 $f : P \to Q$ の押し出しは，オイラー標数積分を用いて以下のようにも書ける．

$$f_*(\alpha)(\sigma) = (-1)^{\dim\sigma} \int_{f^{-1}(\sigma)} \alpha \qquad (\sigma \in \Delta(Q))$$

オイラー標数積分についてはフビニの公式が成り立つ．

命題 2.1　ポセット間の射 $f : P \to Q$ と $\alpha \in \mathcal{F}(P)$ に対し，以下が成り立つ．

$$\int_{\Delta(P)} \alpha = \int_{\Delta(Q)} f_*\alpha$$

2.3　ポセットの Stiefel-Whitney 類変換

2.3.1　ポセットのオイラー性

ポセット P 上の構成的関数に対する絡み作用素 (link operator) $\Lambda_R : \mathcal{F}(P;R) \to \mathcal{F}(P;R)$ を以下で定義する．

$$\Lambda_R(\mathbb{1}_\sigma) := (1 + (-1)^{\dim\sigma - 1})\mathbb{1}_\sigma + (-1)^{\dim\sigma-1}\mathbb{1}_{Bd(\sigma)}.$$

ここで $Bd(\sigma) := \{\, \tau \in \Delta(P) \mid \tau \prec \sigma,\ \ \tau \neq \sigma\}$ であり，σ の境界を意味する．Λ_R は $\mathcal{F}(-;R)$ 上の自然変換になっている．

定義 2.2 ポセット P が R-オイラーであるとは，$\Lambda_R(\mathbb{1}_{\Delta(P)}) = 0$ であることをいう．

註 2.3 $R = \mathbb{Z}_2$ と取ると，P が $\mathbb{Z}_2$-オイラーであることは，その順序複体 $\Delta(P)$ が $\mathbb{Z}_2$-オイラー空間であること，すなわち任意の $\sigma \in \Delta(P)$ に対して，

$$\chi(\mathrm{lk}_{\Delta(P)}(\sigma)) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}.2)$$

となることと同値．ここで，単体複体 K と $\tau \in K$ について，τ の K におけるリンクは，

$$\mathrm{lk}_K(\tau) := \{\rho \in K \mid \rho \cap \tau = \emptyset, \rho \cup \tau \in K\}$$

と定義される．

$\mathbb{Z}_2$-オイラー性については以下の同値な条件がある．

補題 2.4 ポセット P についての以下の 3 つの条件は同値である．

(a) $\mathbb{Z}_2$-オイラーである．

(b) $\Delta(\mathrm{Sd}(P))$ の各 $q-1$ 単体 τ に対して $\tau \prec \sigma$ なる q 単体 $\sigma \in \Delta(\mathrm{Sd}(P))$ の数が偶数である．

(c) P の任意の頂点 v と任意の頂点のペア v_1, v_2 について以下が成立する：

$P_{<v} := \{w \in P \mid v > w\}$ の空でない全順序部分集合が偶数個である．

$P_{>v} := \{w \in P \mid v < w\}$ の空でない全順序部分集合が偶数個である．

$P_{v_1 v_2} := \{w \in P \mid v_1 < w < v_2\}$ の空でない全順序部分集合が偶数個である．

$\mathbb{Z}_2$-オイラーポセットは「Stiefel-Whitney 類が定義できるポセット」として我々の理論の中で重要な意味を持つ．Stiefel-Whitney 類を自然変換に拡張するために，[3] における algebraic constructible function と似た構成により，「オイラー構成的関数」がなす関手 $\mathcal{F}^{eu}$ を導入する．

定義 2.5 T を R-オイラーポセット，$\phi_T : T \to P$ をポセット間の射とし，$\{(\phi_T)_* \mathbb{1}_{\Delta(T)}\}_{\phi_T}$ たちで生成される $\mathcal{F}(P;R)$ の部分群を $\mathcal{F}^{eu}(P;R)$ と書く． $\mathcal{F}^{eu}(P;R)$ の元を P の R-オイラー構成的関数と呼ぶ．

$\alpha \in \mathcal{F}^{eu}(P)$ に対して $f_*\alpha \in \mathcal{F}^{eu}(Q)$ が成り立つので，$\mathcal{F}^{eu}$ は $\mathcal{F}$ の部分関手になる．

2.3.2 Stiefel-Whitney 類変換

R を係数に持つポセット P のホモロジーは，

$$H_*(P;R) := H_*(\Delta(P);R).$$

として定義される．ポセット間の射 $f : P \to Q$ は単体写像 $\Delta(P) \to \Delta(Q)$ を自然に誘導するから，$f_* : H_*(P;R) \to H_*(Q;R)$ が定義でき，この対応によって $H_* : \mathbf{Posets_{fin}} \to \mathbf{Mod}_R$ という共変関手が得られる．

以下，$R=\mathbb{Z}_2$ の設定のもとで考える．P を $\mathbb{Z}_2$-オイラーポセットとする．

$$s_q(P) := \sum_{\dim\sigma=q} \sigma \quad \in C_q(\Delta^2(P);\mathbb{Z}_2)$$

という $\Delta^2(P)$ ($\Delta(P)$ の重心細分) 上の鎖を考えると, 補題 2.4 の (b) からこれがサイクルである, すなわち $\partial s_q(P)=0$ であることがわかる．したがって，サイクル $s_q(P)$ が代表する $H_q(\Delta^2(P);\mathbb{Z}_2)$ の元があり，これを Stiefel-Whitney 類という．

定義 2.6 $\mathbb{Z}_2$-オイラーポセットに対する q 次 Stiefel-Whitney 類を以下で定義する．

$$w_q(P) := [s_q(P)] \in H_*(P;\mathbb{Z}_2).$$

$w_*(P)=\sum_q w_q(P) \in H_*(P;\mathbb{Z}_2)$ を全 Stiefel-Whitney 類と呼ぶ.

$\mathbb{Z}_2$-オイラーポセットの Stiefel-Whitney 類は，以下の「Stiefel-Whitney 類変換」に一般化できる．

定理 2.7 ポセット P に対し，$\phi_{T_i}: T_i \to P$ を $\mathbb{Z}_2$-オイラーポセット T_i から P への射，n_iを $\mathbb{Z}_2$ の元として，

$$w_q : \mathcal{F}^{eu}(P;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_q(P;\mathbb{Z}_2),\ \ \sum_i n_i(\phi_{T_i})_*(\mathbb{1}_{\Delta(T_i)}) \mapsto \sum_i n_i(\phi_{T_i})_*(w_*(T_i)),$$

と定めると，これは well-defined な $\mathbb{Z}_2$-準同型写像になっており，しかも P について自然である．すなわち，w_q は自然変換 $\mathcal{F}^{eu}(-;\mathbb{Z}_2) \Rightarrow H_q(-;\mathbb{Z}_2)$ を定める．

証明はトポロジー的な議論を経由せず，組合せ論的に straightforward にできる．定義から，$\mathbb{Z}_2$-オイラーポセット P に対して $w_q(\mathbb{1}_{\Delta(P)})=w_q(P)$ となるので，確かにこれは Stiefel-Whitney 類の一般化になっている．また，$\mathbb{Z}_2$-オイラーポセット P と，$\alpha \in \mathcal{F}(P;\mathbb{Z}_2)$ に対し，$w_0(\alpha)=\int_{\Delta(P)}\alpha$ が成り立つ．したがって，Stiefel-Whitney 類変換はオイラー標数積分の一般化と見ることができる．

3 有限圏上の Stiefel-Whitney 類変換

有限圏 $\mathbb{A}$ に対し，有限ポセット $E(\mathbb{A})$ を対応させることができ，$E(\mathbb{A})$ 上の Stiefel-Whitney 類を $\mathbb{A}$ の Stiefel-Whitney 類と定義する．以下，$E(\mathbb{A})$ の構成について説明する[*5]．

$[n]$ を $\{0 \le 1 \le \cdots \le n\}$ という順序集合を圏とみなしたものとする．有限圏 $\mathbb{A}$ に対し，

$$\Delta(\mathbb{A}) := \{\ \sigma : [n] \to \mathbb{A} \mid n \in \mathbb{N},\ \sigma \text{は対象について単射な関手}\ \}$$

とする．$\sigma, \sigma' \in \Delta(\mathbb{A})$ について以下のように半順序が定義できる．

$$\sigma \le \sigma' :\Leftrightarrow \text{ある単射な順序を保つ写像 } \phi : [n] \to [n'] \text{ について} \sigma = \sigma' \circ \phi \text{ が成り立つ}.$$

[*5] なお，$|\Delta(E(\mathbb{A}))|$ と $|N(\mathbb{A})|$（$\mathbb{A}$ の分類空間）は．ホモトピー同値にはならないことに注意．

$\sigma \in \Delta(\mathbb{A})$ に対し，$\mathrm{End}(\sigma) := \prod_{i=0}^{n} \mathrm{End}(\sigma(i))$（ここで $\mathrm{End}(\sigma(i))$ は $\sigma(i)$ 上の自己射がなすモノイド）とする．$\sigma \leq \sigma'$ のとき $\rho_\sigma^{\sigma'} : \mathrm{End}(\sigma) \to \mathrm{End}(\sigma')$ を，$g = (g_i)_i \in \mathrm{End}(\sigma)$ に対し，

$$\pi_j(\rho_\sigma^{\sigma'}(g)) = \begin{cases} g_i \ (j \in \phi([n]) \\ id_{\sigma'(j)} \ (j \notin \phi([n])) \end{cases}$$

となるようなモノイド準同型として定義する．（ここで π_j は j 番目の射影）この対応により，関手 $\mathrm{End} : \Delta\mathbb{A} \to \mathbf{Monoids}$ が定義される．$E(\mathbb{A})$ は関手 End の category of elements として定義される: すなわち，$E(\mathbb{A})$ は，対象が $(\sigma, g)(\sigma \in \Delta\mathbb{A}, g \in \mathrm{End}(\sigma))$ であり，射（順序）$(\sigma, g) \leq (\sigma', g')$ が「$\sigma \leq \sigma'$ かつ $\rho_\sigma^{\sigma'}(g) = g'$」として定義されるようなポセットになる．特に，$\mathbb{A}$ がポセットのとき $E(\mathbb{A})$ は順序複体 $\Delta(\mathbb{A})$ の face poset$(\Delta(\mathbb{A}), \prec)$ に他ならない．

$f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ を有限圏の間の対象について単射な関手とする．このとき，ポセット間の射 $E(f) : E(\mathbb{A}) \to E(\mathbb{B})$ が以下のように定義される．

$$E(f)(\sigma, g) := (f \circ \sigma, (f(g_i))_i)$$

この対応により，E は有限圏を対象，その間の対象について単射な関手を射とする圏 $\mathbf{Cat}_{\mathbf{fin}}^{\mathbf{inj}}$ から $\mathbf{Posets_{fin}}$ への関手となる．

それゆえ，$\mathbb{A}$ 上の Stiefel-Whitney 類変換を以下の図式の E と w_* の合成 w_{*E} として定義することができる．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Cat}_{\mathbf{fin}}^{\mathbf{inj}} \arrow[r, "E"] & \mathbf{Posets_{fin}} \arrow[r, bend left, "\mathcal{F}^{eu}(-;\mathbb{Z}_2)", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right, "H_*(-;\mathbb{Z}_2)"', ""{name=D, above}] & \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}_2} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "w_*"] \end{tikzcd}$$

4 パーシステント Stiefel-Whitney 類変換

$\mathbf{SeqPosets_{fin}}$ を $\mathbb{K} : K_0 \xrightarrow{f_0} K_1 \xrightarrow{f_1} \cdots$ というポセットの列がなす圏とする．ここで，射 $\varphi = (\varphi_n)_n : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ は，ポセットの射 $\varphi_n : K_n \to L_n$ の組であって，以下を可換にするものとして定義する:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & K_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] & K_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & L_n \arrow[r, "g_n"] & L_{n+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

$\Xi : \mathbf{Posets_{fin}} \to \mathbf{Mod}_R$ を共変関手とする．このとき，共変関手 $P\Xi : \mathbf{SeqPosets_{fin}} \to \mathbf{Mod}_{R[x]}$ が以下のように定義される：$\mathbb{K}$ に対し，$R[x]$-加群 $P\Xi(\mathbb{K}) := \bigoplus_n \Xi(K_n)$ を対応させる．ここで，$R[x]$-作用は $\alpha \in \Xi(K_n)$ に対して $x.\alpha := f_{n*}\alpha \in \Xi(K_{n+1})$ により定義される．射 $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ に対しては，$R[x]$-準同型 $\varphi_* : P\Xi(\mathbb{K}) \to P\Xi(\mathbb{L})$ を $\varphi_*(\alpha) := \varphi_{n*}(\alpha) \quad (\alpha \in \Xi(K_n))$ により定義する．

ここで，Ξ として関手 $\mathcal{F}^{eu}$ と H_* を $R=\mathbb{Z}_2$ のもとで考える．このとき，自然変換

$$Pw_* : P\mathcal{F}^{eu}(\mathbb{K};\mathbb{Z}_2) \to PH_*(\mathbb{K};\mathbb{Z}_2)$$

が $Pw_*(\alpha_n) := w_*(\alpha_n)(\alpha_n \in \mathcal{F}^{eu}(K_n))$ により定義される．

$\mathbb{Z}_2[x]$-加群 $PH_*(\mathbb{K})$ の生成元を $\mathrm{Bar}(PH(\mathbb{K})) = \{b_0, b_1, \cdots\}$ と書くことにする．K_j が $\mathbb{Z}_2$-オイラーであるとき，K_j の Stiefel-Whitney 類は $\mathrm{Bar}(PH(\mathbb{K}))$ により以下のように表せられる．

$$SW(K_j) := Pw_*(\mathbb{1}_{K_j}) = \gamma_{0j}.b_0 + \gamma_{1j}.b_1 + \cdots \quad (\gamma_{ij} \in \mathbb{Z}_2[x])$$

パーシステントホモロジーの理論では各々の生成元はホモロジーの生き死にの時刻を表す「バーコード」という表示を持つ*6．この表示のもとで，$SW(K_j)$ を $\mathbb{Z}_2[x]$ の元により色付けされたバーコードと解釈することができる（次節の例を参照）．

$SW(\mathbb{K})$ を集合 $\{SW(K_j)\}_{j\geq 0}$ とすると，次の定理が成り立つ．

定理 4.1 $\varphi := \{\varphi_n : K_n \to L_n\}$ を $\mathbb{Z}_2$-オイラーポセットの列 $\mathbb{K}$ と $\mathbb{L}$ の間の射とする． 任意の $n \in \mathbb{N}$ と $\sigma \in \Delta L_n$ に対し，$\#\varphi_{n*}^{-1}(\sigma)$ が奇数であるとすると，φ_* は $SW(\mathbb{K})$ を $SW(\mathbb{L})$ に移し，しかもこれは全射である．

4.1 例：実射影平面の配置

パーシステント Stiefel-Whitney 類の例を導入するため，$\mathbb{R}P^3$ 内での実射影平面の配置の系列を考える．これは，新たな実射影平面 L_j をそれより古い実射影平面の配置 $\bigcup_{i<j} L_j$ に加えていくことにより得られる．これらの空間は三角形分割可能なので face poset を取ることで，ポセットとして表示できる．

まず，$w_*(\mathbb{R}P^2)$ は，Stiefel-Whitney コホモロジー類

$$w^*(T\mathbb{R}P^2) = (1+a)^3 = 1 + a + a^2 \in H^*(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2[a]/(a^3)$$

のポアンカレ双対になっていることに注意する．ここで，$a = w^1(\gamma^*_{\mathbb{P}^2})$ は divisor class である（[4] を参照）．それゆえ，$w_k(\mathbb{R}P^2)$ $(k=0,1,2)$ は 0 でない．

L_i $(i=0,1,2)$ を $\mathbb{R}P^3$ 内で横断的に交わる実射影平面とする．$X_0 := L_0$，$X_1 := L_0 \cup L_1$，$X_2 := L_0 \cup L_1 \cup L_2$，$X_3 := \mathbb{R}P^3$ と置き，包含写像による以下の列を考える．

$$\mathbb{X}: \quad X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3.$$

ここで，$f^{i,j} := f_{j-1} \circ \cdots \circ f_i : K_i \to K_j$ と定義し，Stiefel-Whitney 類 $w_*(X_k)(0 \leq k \leq 3)$ の $f_*^{k,3}$ による像を考える：

$$\boldsymbol{a}_k := (f_*^{k,3} w_0(X_k), f_*^{k,3} w_1(X_k), f_*^{k,3} w_2(X_k), f_*^{k,3} w_3(X_k))^T \in H_*(\mathbb{R}P^3) = (\mathbb{Z}_2)^4.$$

---

*6 [1, 7] を参照.

また，X_k の generic な線形切断のオイラー標数の列を考える：

$$\boldsymbol{b}_k := (\chi(X_k), \chi(X_k \cap H), \chi(X_k \cap \ell), \chi(X_k \cap \{p\})^T \in (\mathbb{Z}_2)^4,$$

ここで H は generic な平面，ℓ は generic な直線，p は X_2 の外にある $\mathbb{R}P^3$ の点である．$\boldsymbol{a}_k$,$\boldsymbol{b}_k$ は以下のように計算される．

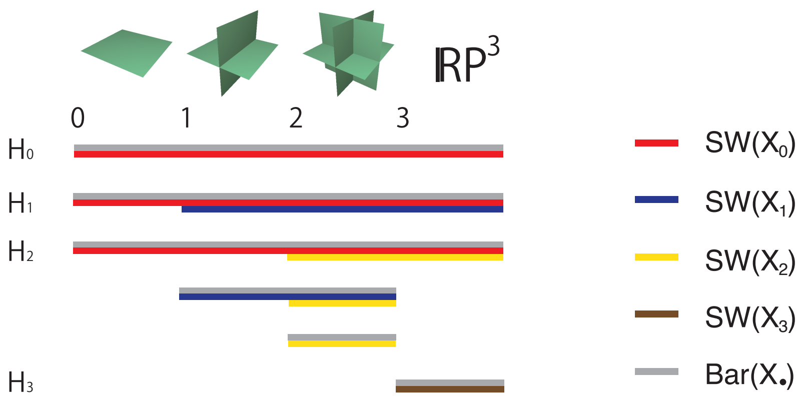
$$[\boldsymbol{a}_0\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{b}_0\ \boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

これらは同じ情報を持つ，すなわち $\boldsymbol{a}_k = P\boldsymbol{b}_k$ なる $\mathbb{Z}_2$ 成分の正則行列 P があることが知られている．

$SW(\mathbb{X})$ はこれら 4 つのベクトルにホモロジー類の persistency の情報を付加したものと考えることができる．

$$H_0(X_k) = H_1(X_k) = \mathbb{Z}_2\ (k = 0, 1, 2, 3), \quad H_2(X_3) = H_3(X_3) = \mathbb{Z}_2,$$
$$H_2(X_0) = \mathbb{Z}_2, \quad H_2(X_1) = (\mathbb{Z}_2)^2, \quad H_2(X_2) = (\mathbb{Z}_2)^3.$$

であることに注意すると，$SW(\mathbb{X})$ は以下のような色つきのバーコードと理解できる．



参考文献

[1] Robert Ghrist. Barcodes: The persistent topology of data. Technical report, 2007.

[2] Kouta Ishibashi. posetHom. `https://github.com/Kouta-Ishibashi/posetHom`, 2016.

[3] Clint McCrory and Adam Parusiski. Algebraically constructible functions. *Annales Scientifiques de l' École Normale Suprieure*, 30(4):527 – 552, 1997.

[4] J.W. Milnor and J.D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1974.

[5] Jörg Schürmann and Shoji Yokura. A survey of characteristic classes of singular spaces. In *Singularity Theory*, pages 865–952.

[6] D. Sullivan. Combinatorial invariants of analytic spaces. In C.T.C. Wall, editor, *Proceedings of Liverpool Singularities — Symposium I*, pages 165–177, Berlin, Heidelberg, 1971. Springer Berlin Heidelberg.

[7] Afra Zomorodian and Gunnar Carlsson. Computing persistent homology. *Discrete & Computational Geometry*, 33(2):249–274, Feb 2005.

[8] 田村 一郎. **トポロジー**. 岩波書店, 1972.

[9] 大本 亨. 特異点の数え上げと同変 Chern 類. **数学**, 61(1):21–39, jan 2009.

[10] 與倉 昭治. モチヴィック特性類の話題から. **数学**, 68(2):151–176, 2016.

[11] 石橋 浩太. 有限圏上のオイラー標数積分とホイットニー特性類. 修士論文, 北海道大学, 2016.

[12] 諏訪 立雄. 特異多様体の特性類. **数学**, 52(4):376–393, 2000.

[13] 佐藤 肇. **位相幾何**. 岩波書店, 2006.

[14] 平岡 裕章. **タンパク質構造とトポロジー: パーシステントホモロジー群入門**. 共立出版, 2013.