Discriminantal arrangement and Pappus' Theorem for quadrics in Grassmannian

澤田 すみれ（SAWADA Sumire）
北海道大学大学院理学院数学専攻

概要

Discriminantal arrangement は Braid arrangment の高次化として，Manin 及び Schechtman によって定義された．現在，射影空間の超平面配置を考えると，グラスマン多様体上の 2 次の超曲面とランク 2 の 3 重点を持つ Discriminantal arrangement に対応関係があることがわかっている．本稿では，この超平面配置に関するパップスの定理を紹介する．本研究は北海道大学の Simona Settepanella 氏，山形颯氏との共同研究である．

1 準備

1.1 Discriminantal arrangement

$\mathbb{C}^k$ 上の n 枚の超平面からなる超平面配置 $\{H_1, \cdots, H_n\}$ を考える．これが generic であるとは，任意の k 枚の超平面が一次独立であることをいう．

この超平面配置に関する空間 $\mathbb{S}(H_1, \cdots, H_n)$ を，H_i に平行（一致も含む）な超平面の組全体とする．つまり，

$$\mathbb{S}(H_1, \cdots, H_n) = \left\{ (H'_1, \cdots, H'_n) \,|\, H'_i \cap H_i = \emptyset \text{ or } H'_i = H_i \, (i = 1, \cdots, n) \right\} \quad .$$

このとき，$\mathbb{S}(H_1, \cdots, H_n)$ は $(H_1, \cdots, H_n)$ を原点と対応させることで $\mathbb{C}^n$ と同一視できる．さらに，$\mathbb{C}^k$ を $\mathbb{P}^k \setminus H_\infty$ であると考えると，H_i に対応する射影平面 $\mathbb{P}^{k-1}$ 上の超平面 $H_{\infty,i}$ は

$$H_{\infty,i} = \bar{H}_i \cap H_\infty$$

となる．ただし $\bar{H}_i$ は H_i の $\mathbb{P}^k$ での閉包である．

ここで，$L = \{i_1, \cdots, i_{k+1}\} \subset [n] := \{1, \cdots, n\}$ に対し，

$$D_L = \left\{ (H'_1, \cdots, H'_n) \in \mathbb{S}(H_1, \cdots, H_n) \,|\, \textstyle\bigcap_{i \in L} H_i \neq \emptyset \right\}$$

とすると，D_L は $\mathbb{S}(H_1, \cdots, H_n)$ の超平面となる．D_L たちが成す超平面配置を Discriminantal arrangement という．

D_L の法線ベクトル α_L は次のように与えられることが知られている．$L = \{i_1, \cdots, i_{k+1}\}$ を

$L = \{s_1 < \cdots < s_{k+1}\}$ と並び替えると

$$\alpha_L = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \det(\alpha_{s_1}, \ldots, \hat{\alpha_{s_i}}, \ldots, \alpha_{s_{k+1}}) e_{s_i},$$

ただし，$\alpha_i = (a_{i1}, \cdots, a_{ik})$ は H_i の法線ベクトル，$\{e_j\}_{1 \le j \le n}$ は $\mathbb{S}(H_1, \cdots, H_n) \simeq \mathbb{C}^n$ の標準基底とする．

例 1.1　$k = 1$ の場合，$L = \{i_1, i_2\}$ について

$$D_L = \left\{(H'_1, \cdots, H'_n) \in \mathbb{S}(H_1, \cdots, H_n) \,|\, H'_{i_1} = H'_{i_2}\right\}$$

となり，これは Braid arrangement を構成する．この意味で，Discriminantal arrangement は Braid arrangement の高次元化といえる．

1.2　グラスマン多様体 $Gr(3, \mathbb{C}^n)$

ここからは $k = 3$ の場合，つまり $\mathbb{C}^3$ 上の超平面配置について考える．

$Gr(3, \mathbb{C}^n)$ をグラスマン多様体とするとき，

$$\begin{aligned} \gamma : Gr(3, \mathbb{C}^n) &\to \mathbb{P}(\bigwedge^3 \mathbb{C}^n) \\ < v_1, v_2, v_3 > &\mapsto [v_1 \wedge v_2 \wedge v_3] \end{aligned}$$

をプリュッカー埋め込みという．このとき，$[x] \in \mathbb{P}(\bigwedge^3 \mathbb{C}^n)$ が $\gamma(Gr(3, \mathbb{C}^n))$ の元であることと写像 φ_x

$$\begin{aligned} \varphi_x : \mathbb{C}^n &\to \bigwedge^4 \mathbb{C}^n \\ v &\mapsto x \wedge v \end{aligned}$$

について $\dim(\ker\ \varphi_x) = 3$ となることが同値である． もし $e_1, \ldots, e_n$ が $\mathbb{C}^n$ の基底であるならば，$e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge e_{i_3}$（$I = \{i_1, i_2, i_3\} \subset [n], i_1 < \cdots < i_3$）は $\bigwedge^3 \mathbb{C}^n$ の基底としてとれて，$x \in \bigwedge^3 \mathbb{C}^n$ は

$$x = \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I| = 3}} \beta_I e_I = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_3 \le n} \beta_{i_1 \ldots i_3} (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_3})$$

と一意にかける．ここで，斉次座標 β_I を $\mathbb{P}(\bigwedge^3 \mathbb{C}^n) = \mathbb{P}^{\binom{n}{3}-1}$ でのプリュッカー座標という． φ_x の表現行列を M_x と書くと，$\dim(\ker\ \varphi_x) = k$ の条件は M_x のすべての $(n-2) \times (n-2)$ 小行列式が 0 であることと同値．これらの関係式は $\{p_1, \ldots, p_2, q_0, \ldots, q_3\} \subset [n]$ に対し

$$\sum_{l=0}^{3} (-1)^l \beta_{p_1 \ldots p_2 q_l} \beta_{q_0 \ldots \hat{q_l} \ldots q_3} = 0 \tag{1}$$

と書き表せる．この関係式をプリュッカー関係式という．

1.3 Discriminantal arrangement と $Gr(3,\mathbb{C}^n)$ の関係

ここからは，$H_1,\cdots,H_n$ から 6 枚の超平面を選び，それらを改めて $H_1,\cdots,H_6$ と名づける．$\mathbb{C}^3$ 上の generic な超平面配置 $\mathcal{A}=\{H_1,\cdots,H_6\}$ と $\mathcal{A}_\infty=\{H_{\infty,1},\cdots,H_{\infty,6}\}$ について考える．

H_i の法線ベクトル $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3})$ について，i 行目を α_i とした行列 A

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{pmatrix}$$

を考える．$\mathcal{A}$ は generic なので，A の列ベクトルは $\mathbb{C}^6$ 上で一次独立．したがってこの 3 つの列ベクトルは，$\mathbb{C}^6$ の 3 次の部分空間の基底となる．つまり A は $Gr(3,\mathbb{C}^6)\subset Gr(3,\mathbb{C}^n)$ の元である．このようにして $\mathcal{A}$ は $Gr(3,\mathbb{C}^n)$ の点とみなせる．

ここで，Discriminantal arrangement との対応を考えるために，次のような超平面の添え字に関する部分集合 L_1,L_2,L_3 を考える．

記号 $L_1,L_2,L_3\subset[6]$ を $|L_i|=4$, $|L_i\cap L_j|=2$ $(i\neq j)$, $L_1\cap L_2\cap L_3=\emptyset$ を満たす集合とするとき，$\mathbb{T}=\{L_1,L_2,L_3\}$ を good 6-partition という．このとき L_1,L_2,L_3 は $L_1=\{i_1,i_2,i_3,i_4\},L_2=\{i_1,i_2,i_5,i_6\},L_3=\{i_3,i_4,i_5,i_6\}$ のように書ける．

ここからは，good 6-partition に対する Discriminantal arrangement の超平面 D_{L_1},D_{L_2},D_{L_3} を考える．

A. Libgober 氏と S. Settepanella 氏の結果から，$\bigcap_{t\in L_1\cap L_2}H_{\infty,t}$，$\bigcap_{t\in L_1\cap L_3}H_{\infty,t}$，$\bigcap_{t\in L_2\cap L_3}H_{\infty,t}$ が H_∞ 上で共線的であることと，$D_{L_1}\cap D_{L_2}\cap D_{L_3}$ の余次元が 2 であることの同値性がわかっている（Lemma 3.1 [3]）．α_{L_i} は D_{L_i} の法線ベクトルなので，$D_{L_1}\cap D_{L_2}\cap D_{L_3}$ の余次元が 2 であることは，$\begin{pmatrix}\alpha_{L_1}\\ \alpha_{L_2}\\ \alpha_{L_2}\end{pmatrix}$ の階数が 2 であることと同値．

さらに，S. Settepanella 氏と山形氏との共同研究により，$\mathbb{T}=\{\{i_1,i_2,i_3,i_4\},\{i_1,i_2,i_5,i_6\},\{i_3,i_4,i_5,i_6\}\}$ を超平面の添え字に関する good 6-partition とすると（$i_j=\sigma(j)$, $\sigma\in\mathbf{S_6}$），$\begin{pmatrix}\alpha_{L_1}\\ \alpha_{L_2}\\ \alpha_{L_2}\end{pmatrix}$ の階数が 2 であることと，$\mathcal{A}$ が $Gr(3,\mathbb{C}^6)\subset Gr(3,\mathbb{C}^n)$ の二次曲面

$$\beta_{i_1i_3i_4}\beta_{i_2i_5i_6}-\beta_{i_2i_3i_4}\beta_{i_1i_5i_6}=0$$

の点であることが等しいことを示した．（cf. [4]）

つまり，この二次曲面と，$\mathbb{P}^2$ 上の $\mathcal{A}_\infty$ の 2 つの超平面の共通部分が共線的であることが対応していることがわかる．

2 パップスの定理

射影平面における古典的な定理の一つに，パップスの定理がある．

定理 2.1（Pappus） 射影平面上の 2 つの直線 l_1，l_2 を考える．l_1，l_2 上の 3 点 A, B, C，A', B', C' に対し，X, Y, Z をそれぞれ $AB' \cap A'B$，$AC' \cap A'C$，$BC' \cap B'C$ とすると，3 点 X, Y, Z を通るような直線 l_3 が存在する．

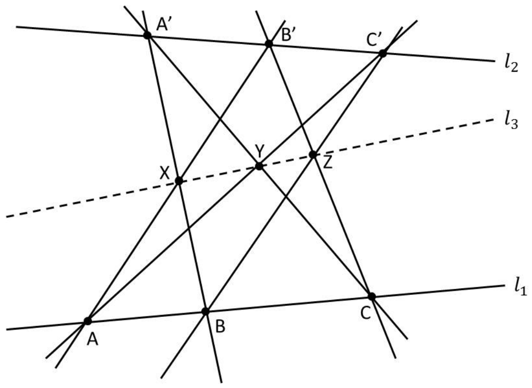

図 1 パップスの定理

今，$\mathbb{C}^3$ 上の n 枚の generic な超平面配置から 6 枚の超平面を選び，それらを $\mathcal{A} = \{H_1, \cdots, H_6\}$ とし，$\mathcal{A}_\infty = \{H_{\infty,1}, \cdots, H_{\infty,6}\}$ とかくこととする．$Gr(3, \mathbb{C}^n)$ 上の 2 次曲面についてこの定理を考えると，$\mathbb{P}^2$ の直線 AB', $A'B$, BC', $B'C$, AC', $A'C$ は $\mathcal{A}_\infty$ の超平面 $H_{\infty,1}, \cdots, H_{\infty,6}$ に対応し，l_1, l_2, l_3 はそれぞれ $\mathcal{A}_\infty$ の 2 つの超平面の共通部分が共線的であることに対応していることがわかる．

このことから，good 6-partition $\mathbb{T} = \{L_1, L_2, L_3\}$, $L_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $L_2 = \{1, 2, 5, 6\}$, $L_3 = \{3, 4, 5, 6\}$ に対し，$\mathcal{A}$ が $Gr(3, \mathbb{C}^6)$ 上の 2 次曲面

$$Q_1 : \beta_{134}\beta_{256} - \beta_{234}\beta_{156} = 0. \tag{2}$$

の点であるとすると，これは $\bigcap_{i \in L_1 \cap L_2} H_{\infty,i}$, $\bigcap_{i \in L_1 \cap L_3} H_{\infty,i}$, $\bigcap_{i \in L_2 \cap L_3} H_{\infty,i}$ が共線的であることに対応する．

同様にして，good 6-partition $\mathbb{T}_2 = \{L'_1, L'_2, L'_3\}$, $L'_1 = \{4, 6, 2, 5\}$, $L'_2 = \{4, 6, 1, 3\}$, $L'_3 = \{2, 5, 1, 3\}$ と $\mathbb{T}_3 = \{L''_1, L''_2, L''_3\}$, $L''_1 = \{2, 4, 1, 6\}$, $L''_2 = \{2, 4, 3, 5\}$, $L''_3 = \{1, 6, 3, 5\}$ について，3 点 $\bigcap_{i \in L'_1 \cap L'_2} H_{\infty,i}$, $\bigcap_{i \in L'_1 \cap L'_3} H_{\infty,i}$, $\bigcap_{i \in L'_2 \cap L'_3} H_{\infty,i}$ と $\bigcap_{i \in L''_1 \cap L''_2} H_{\infty,i}$, $\bigcap_{i \in L''_1 \cap L''_3} H_{\infty,i}$, $\bigcap_{i \in L''_2 \cap L''_3} H_{\infty,i}$ の共線性と $\mathcal{A}$ が

$$Q_2 : \beta_{425}\beta_{613} - \beta_{625}\beta_{413} = 0, \tag{3}$$

$$Q_3 : \beta_{216}\beta_{435} - \beta_{416}\beta_{235} = 0 \tag{4}$$

の点であることがそれぞれ対応している．

これらの記法を用いると，次の定理がしたがう．

定理 2.2 $\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_6\}$ を $\mathbb{C}^3$ 上の generic な超平面配置とする．$\mathcal{A}$ が Q_1, Q_2, Q_3 のいずれか 2 つに含まれれば，$\mathcal{A}$ は残りの 1 つにも含まれている．

言い換えると，以下が成り立つ．

$$Q_{i_1} \cap Q_{i_2} = \bigcap_{i=1}^{3} Q_i, \quad \{i_1, i_2\} \subset [3]$$

前章 1.3 より，この 2 次曲面は超平面の共通部分の共線性に対応する (図 2)．

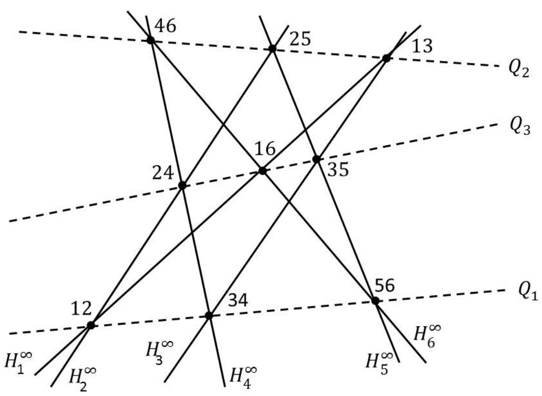

図 2 (ij は $H_{\infty,i} \cap H_{\infty,j}$ を表す)

この 3 つの共線は，すべて異なる超平面の共通部分を含んでいることが必要十分である．そこで，2 つの good 6-partition $\mathbb{T} = \{K_1, K_2, K_3\}$, $\mathbb{T}' = \{K_1', K_2', K_3'\}$ に対し，

$$K_i \cap K_j \neq K_{i'}' \cap K_{j'}' \quad (1 \leq i < j \leq 3, 1 \leq i' < j' \leq 3)$$

となるとき，$\mathbb{T}$ と $\mathbb{T}'$ は disjoint であると呼び，good 6-partition $\mathbb{T}$ により定まる 2 次曲面を $Q_{\mathbb{T}}$ とかくと，次の定理が得られる．

定理 2.3 (パップスの定理) $\mathcal{A} = \{H_1, \cdots, H_6\}$ を $\mathbb{C}^3$ 上の generic な超平面配置とする．disjoint な good 6-partition $\mathbb{T}$, $\mathbb{T}'$ に対し，$\mathcal{A}$ が $Q_{\mathbb{T}}$, $Q_{\mathbb{T}'}$ の点ならば，$\mathcal{A} \in Q_{\mathbb{T}''}$ となる good 6-partition $\mathbb{T}''$ が唯一つ存在する．

この定理は，2 次曲面の方程式 (2), (3), (4) とプリュッカー関係式 (1) を用いて示される．

参考文献

[1] C. A. Athanasiadis. The Largest Intersection Lattice of a Discriminantal Arrangement, Beiträge Algebra Geom., 40 (1999), no. 2, 283–289.

[2] Joe Harris, Algebraic Geometry: A First Course, Springer-Verlag

[3] A. Libgober and S. Settepanella, Strata of discriminantal arrangements, arXiv:1601.06475

[4] S. Sawada, S. Settepanella and S. Yamagata, Discriminantal arrangement, 3×3minors of Plücker matrix and hypersurfaces in Grassmannian $Gr(3, n)$, Comptes Rendus Mathematique Volume 355, Issue 11(2017), pp.1111-1200

[5] Yu. I. Manin and V. V. Schechtman, Arrangements of Hyperplanes, Higher Braid Groups and Higher Bruhat Orders, Advanced Studies in Pure Mathematics 17, 1989 Algebraic Number Theory in honor K. Iwasawa, pp. 289-308.

[6] P.Orlik,H.Terao, Arrangements of hyperplanes, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]." 300, Springer-Verlag, Berlin, (1992).