自明理想グラフと補可約グラフの彩色対称関数

辻栄　周平（Shuhei TSUJIE）*
北海道大学大学院理学研究院数学部門

概要

Stanley により，彩色対称関数は木に対する完全不変量であると予想されている．また，Gasharov により，爪自由なグラフの彩色対称関数は s-positive であると予想されている．本発表では，彩色対称関数は自明理想グラフに対する完全不変量であることと，爪自由な補可約グラフの彩色対称関数が e-positive（したがって s-positive）であるという結果について紹介する．

1　対称関数

$\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を可算無限個の不定元とする．形式的冪級数 $f \in \mathbb{Z}[[\boldsymbol{x}]]$ が**対称関数** (symmetric function) であるとは以下が成り立つときに言う．

(i) f の単項式の次数は有界である．
(ii) f は変数の置換に関して不変である．

たとえば，冪乗和関数 $p_k \coloneqq \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$ は対称関数である．対称関数がなす集合は $\mathbb{Z}[[\boldsymbol{x}]]$ の部分環をなし，これを Sym と表す．

$k \in \mathbb{N}$ に対し，**基本対称関数** e_k を

$$e_k \coloneqq \sum_{i_1<\cdots<i_k} x_{i_1}\cdots x_{i_k}$$

と定める．さらに，整数分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ に対し，$e_\lambda \coloneqq e_{\lambda_1}\cdots e_{\lambda_\ell}$ と定める．ただし，空分割 $\varnothing$ に対しては，$e_\varnothing \coloneqq 1$ とする．$\{e_\lambda\}_\lambda$ は Sym の $\mathbb{Z}$ 基底をなすことが知られている．対称関数 f が e**-positive** であるとは，f を $\{e_\lambda\}_\lambda$ の線形結合で表したとき，その係数がすべて非負であるときにいう．

整数分割 λ に対し，**Schur 関数** s_λ を

$$s_\lambda \coloneqq \det(e_{\lambda'_i-i+j})_{1\le i,j\le\lambda_1}$$

と定める．ただし，λ' は λ の双対である．$\{s_\lambda\}_\lambda$ も Sym の $\mathbb{Z}$ 基底をなす．対称関数 f が s**-positive** であるとは，f を $\{s_\lambda\}_\lambda$ の線形結合で表したとき，その係数がすべて非負であるときにいう．一般に，e-positive な対称関数は s-positive でもあることが知られている．

* e-mail: tsujie@math.sci.hokudai.ac.jp

対称関数のなす環 Sym は対称群の表現論と密接な関係がある．R_n を n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の既約指標が生成する $\mathbb{Z}$ 加群とする．直和 $R \coloneqq \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ には自然に次数付き代数の構造が入る．R と $\mathrm{Sym}_{\mathbb{C}} \coloneqq \mathrm{Sym} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ の間には次数付き代数としての同型が存在し，整数分割 λ に付随する既約指標と Schur 関数 s_λ が対応している．したがって，s-positive な対称関数は対称群の指標に対応している．詳しくは，[Mac95] を参照．

2 彩色対称関数

$G = (V_G, E_G), H = (V_H, E_H)$ を単純グラフとする．写像 $\kappa\colon V_G \to V_H$ が G から H への準同型であるとは，以下を満たすときにいう．

$$\{u, v\} \in E_G \Rightarrow \{\kappa(u), \kappa(v)\} \in E_H.$$

G から H への準同型がなす集合を $\mathrm{Hom}(G, H)$ と書く．特に，G から完全グラフ K_n への準同型がなす集合は

$$\mathrm{Hom}(G, K_n) = \{\, \kappa\colon V_G \to \{1, \ldots, n\} \mid \kappa(u) \neq \kappa(v) \text{ for } \forall \{u, v\} \in E_G \,\}$$

となっている．集合 $\{1, \ldots, n\}$ を色の集合と思うと，$\kappa \in \mathrm{Hom}(G, K_n)$ は G の隣り合っている頂点を異なる色で塗り分ける n 色での彩色である．

Definition 2.1. 有限単純グラフ G に対して，

$$\chi(G, n) = \#\,\mathrm{Hom}(G, K_n) \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

を満たす多項式 $\chi(G, t) \in \mathbb{Z}[t]$ が存在する．これを G の**彩色多項式** (chromatic polynomial) という．

Stanley [Sta95] は彩色多項式の対称関数による一般化を導入した．

Definition 2.2. 有限単純グラフ G に対し，

$$X(G, \boldsymbol{x}) \coloneqq \sum_{\kappa \in \mathrm{Hom}(G, K_{\mathbb{N}})} \prod_{v \in V_G} x_{\kappa(v)} \in \mathrm{Sym}$$

を G の**彩色対称関数**（chromatic symmetric function）という．ただし，$K_{\mathbb{N}}$ は $\mathbb{N}$ を頂点集合とする完全グラフである．

$\mathbf{1}^n \coloneqq (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0 \ldots)$ に対し，

$$X(G, \mathbf{1}^n) = \sum_{\kappa \in \mathrm{Hom}(G, K_n)} 1 = \#\,\mathrm{Hom}(G, K_n) = \chi(G, n)$$

となるので，彩色対称関数は彩色多項式よりも強い不変量である．

2.1 木に関する予想

木（tree）とは閉路を持たない連結グラフのことである．頂点数が n である木の彩色多項式は $t(t-1)^{n-1}$ となるので，彩色多項式は頂点数が同じである木を全く区別できない．Stanley はより強い不変量である彩色対称関数であれば，木を完全に区別できると予想している．

Conjecture 2.3 (Stanley [Sta95])**.** T_1, T_2 を木とする．もし，$X(T_1, \boldsymbol{x}) = X(T_2, \boldsymbol{x})$ であれば，T_1 と T_2 は同型である．

この予想は，23 頂点以下だと正しいことが Li-Yang Tan により計算機を用いて確認されているようである．また，いくつかの部分クラスに対しては予想が正しいということが証明されている（[MMW08]）．

グラフの代わりに半順序集合を用いて類似の問題を考えることもできる．[HT17] により，根付き木（rooted tree）に対し，Conjecture 2.3 の類似が成立することが証明されている．

2.2 e-positivity に関する予想

半順序集合 P の**比較不可能グラフ**（incomparability graph）$\mathrm{inc}(P)$ とは，頂点集合を P とするグラフで，$u, v \in P$ が隣接していることと u, v が比較不可能であることが同値になっているグラフのことである．$i, j \in \mathbb{N}$ に対し，半順序集合 P が $(i+j)$ **自由**（$(i+j)$-free）であるとは，P が i 個の元からなる全順序集合と j 個の元からなる全順序集合の非交和を誘導部分半順序集合として持たないときにいう．

Conjecture 2.4 (Stanley-Stembridge [SS93, Sta95])**.** P を $(3+1)$ 自由半順序集合とする．このとき，$X(\mathrm{inc}(P), \boldsymbol{x})$ は e-positive である．

この予想が正しいことを示すためには，より狭いクラスで成り立っていることを証明すればよいことが分かっている．

Theorem 2.5 (Guay-Paquet [GP13])**.** *任意の $(3+1)$ 自由かつ $(2+2)$ 自由な半順序集合 P に対して，$X(\mathrm{inc}(P), \boldsymbol{x})$ が e-positive であるならば，Conjecture 2.4 は正しい．*

Guay-Paquet は探索範囲をより狭めることで，Conjecture 2.4 が 20 元以下では正しいことを計算機を用いて示した．

また，Conjecture 2.4 よりも弱い結果が示されている．

Theorem 2.6 (Gasharov [Gas96])**.** *P を (3+1) 自由半順序集合とする．このとき，$X(\mathrm{inc}(P), \boldsymbol{x})$ は s-positive である．*

完全二部グラフ $K_{1,3}$ を**爪**（claw）と呼ぶ．爪を誘導部分グラフとして持たないグラフを**爪自由**（claw-free）という．$(3+1)$ 自由半順序集合の比較不可能グラフは爪自由となる．Gasharov は以下を予想している．

Conjecture 2.7 (Gasharov)**.** G を爪自由なグラフとする．このとき，$X(G, \boldsymbol{x})$ は s-positive である．

3　自明理想グラフと補可約グラフ

グラフ G, H に対し，$G \sqcup H$ で G と H の非交和（disjoint union），つまり，G と H を単に並べてできるグラフを表す．$G + H$ で G と H の結び（join），つまり，G と H を並べ，さらに G の頂点と H の頂点をすべて辺で結んでできるグラフを表す．$\overline{G}$ で G の補グラフ（complement graph）を表す．いくつかのグラフのクラスはこれらの演算を用いて生成されるクラスとして定義される．以下の条件を考える．

(1) $K_1 \in \mathcal{C}$.
(2) $G \in \mathcal{C} \Rightarrow G \sqcup K_1 \in \mathcal{C}$.
(3) $G \in \mathcal{C} \Rightarrow G + K_1 \in \mathcal{C}$.
(4) $G, H \in \mathcal{C} \Rightarrow G \sqcup H \in \mathcal{C}$.
(5) $G, H \in \mathcal{C} \Rightarrow G + H \in \mathcal{C}$.
(6) $G \in \mathcal{C} \Rightarrow \overline{G} \in \mathcal{C}$.

グラフ G が条件 (1)(2)(3) を用いて生成されるとき，G を**閾値グラフ**（threshold graph）という．条件 (1)(3)(4) を用いて生成されるとき，G を**自明理想グラフ**（trivially perfect graph）という．条件 (1)(4)(6) を用いて生成されるとき，G を**補可約グラフ**（complement-reducible graph, cograph）という．これは，条件 (1)(4)(5) で生成されることと同値である．これら 3 つのクラスの間には

$$\{\text{閾値グラフ}\} \subseteq \{\text{自明理想グラフ}\} \subseteq \{\text{補可約グラフ}\}$$

という包含関係がある．

4　主結果

[HT17] で用いられた方法と類似の方法を用いて以下を示した．

Theorem 4.1. G, H を自明理想グラフとする．このとき，$X(G, \boldsymbol{x}) = X(H, \boldsymbol{x})$ であれば，G と H は同型である．

Proposition 4.2. 補可約グラフのクラスでは，同型でないが彩色対称関数が一致するグラフが存在する．

また，e-positivity に関して以下を示した．

Theorem 4.3. 爪自由な補可約グラフの彩色対称関数は *e-positive* である（したがって *s-positive* でもある）．

参考文献

[Gas96] Vesselin Gasharov, *Incomparability graphs of (3 + 1)-free posets are s-positive*, Discrete Mathematics **157** (1996), no. 1, 193–197.

[GP13] Mathieu Guay-Paquet, *A modular relation for the chromatic symmetric functions of (3+1)-free posets*, arXiv:1306.2400 (2013), arXiv: 1306.2400.

[HT17] Takahiro Hasebe and Shuhei Tsujie, *Order quasisymmetric functions distinguish rooted trees*, Journal of Algebraic Combinatorics **46** (2017), no. 3-4, 499–515.

[Mac95] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd ed., Oxford mathematical monographs, Clarendon Press ; Oxford University Press, Oxford : New York, 1995.

[MMW08] Jeremy L. Martin, Matthew Morin, and Jennifer D. Wagner, *On distinguishing trees by their chromatic symmetric functions*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **115** (2008), no. 2, 237–253.

[SS93] Richard P Stanley and John R Stembridge, *On immanants of Jacobi-Trudi matrices and permutations with restricted position*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **62** (1993), no. 2, 261–279.

[Sta95] R. P. Stanley, *A Symmetric Function Generalization of the Chromatic Polynomial of a Graph*, Advances in Mathematics **111** (1995), no. 1, 166–194.