Discriminantal arrangementとプリュッカー行列、グラスマン多様体の超曲面

山形 颯（YAMAGATA So）*
北海道大学大学院理学院数学専攻

概 要

$\mathbb{C}^k$ 上に n 枚の超平面を一般の位置に配置した arrangement を一つ固定し，その超平面の平行移動全体を考えると自然に $\mathbb{C}^n$ の中の超平面の配置を誘導する．この配置は discriminantal arrangement と呼ばれ 1989 年に Manin-Schectman らによって Braid arrangement の一般化として定義された．本講演では Discriminantal arrangement がある組み合わせ論的構造を持つような超平面の平行移動全体は，グラスマン多様体 $Gr(3, n)$ 内に超曲面としての特徴づけを与えることができることを紹介する．本研究は S.Sawada 氏，S.Settepanella 氏との共同研究の結果である．

1 導入

有限枚の超平面の集合 $\mathcal{A}$ のことを超平面配置，arrangement と呼ぶ．1989 年 Manin と Schctman は古典的な Braid arrangement の一般化を与えるような超平面の族を与え，discriminantal arrangement と呼び，その組み合わせ論的，位相的性質の研究を行った [12]．$\mathcal{A} = \{H_1^0, H_2^0, \dots, H_n^0\}$ を一般の位置に配置された $\mathbb{C}^k$ 上の n 枚の超平面の配置 (generic arrangement) とし，その平行移動全体は $\mathbb{C}^n$ と考えることができる．更に一般の位置にあるという条件を落とすような平行移動全体は $\mathbb{C}^n$ の中に超平面の配置を誘導し，これが discriminantal arrangement と呼ばれる配置であり $\mathcal{B}(n, k)$ と書かれる．$\mathcal{B}(n, k)$ は純ブレイド群の一般化であると捉えることができ，実際 $\mathcal{B}(n, 1)$ は純ブレイド群と一致する (例えば [14])．この arrangement は例えば [12], [1], [3] のように組み合わせ論を含む幅広い問題と関係がある．高次圏との関わりでは Zamolodchikov equation に関連した研究があり [7]，トーリック多様体上のバンドルのコホモロジーの消滅との関係では [15] のような研究がなされている．[12] では一般の位置に配置された超平面の平行移動全体のなす空間におけるザリスキー開集合 $\mathcal{Z}$ 上で combinatorics が一定であるような配置 (つまり combinatorics が n と k にのみ依存する配置) から誘導される $\mathcal{B}(n, k)$ に焦点を当てた研究が行われたものの，$\mathcal{Z}$ を明示的に記述はしていない．

1994 年に Falk は [5] において [13] の sect. 8, [14] や [9] で述べられていたことに対し，$\mathcal{A}$ がザリスキー開集合 $\mathcal{Z}$ 上で変化するとき，対応する discriminantal arrangement の combinatorics の型が異なるような $\mathcal{A}$ の具体例を挙げることで $\mathcal{B}(n, k)$ の combinatorics の型が $\mathcal{A} = \{H_1^0, H_2^0, \dots, H_n^0\}$ にも依存することを指摘した．1997 年に Bayer と Brandt は [3] で discriminantal arrangement がもとの配置に依存するとき，そのもとの配置を *very generic* そうでないときは *non very generic* として

*Email:so.yamagata.math@gmail.com. The author is supported by The Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology through Program for Leading Graduate School (Hokkaido University "Ambitious Leader's Program")

分類し，さらに *very generic* の場合の discriminantal arrangement の組み合わせ論的な記述に対する予想を与え，1999 年には Athanasiadeis が [1] で彼らの予想を解決した．現在のところ *non very generic* については完全な combinatorics の記述が得られていない．しかし 2016 年になり，Libgober と Settepanella は [11] においてその部分的な記述を与えることに成功した．そこで講演者らは彼らの研究 [11] で与えられた記述の代数幾何的な理解を進めた結果グラスマン多様体の超曲面として捉えるられれることが分かった [10]．ここでは combinatorics の記述に関する話題には入らず，超平面配置の基本的な定義から始め，グラスマン多様体の超曲面が得られるまでのストーリーを概観することにする．

2 準備

2.1 超平面配置とは

$\mathbb{F}$ を体とする．ベクトル空間 $V \simeq \mathbb{F}^k$ において有限枚のアフィン超平面の集まり $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ を超平面配置 (arrangement of hyperplanes) という．体 $\mathbb{F}$ としては断りがなければ $\mathbb{C}$ を用いることにする．ここで一旦超平面の定義を確認しよう．線形超平面とは V の $(k-1)$-次元部分空間 H のことで，$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{F}^k$ を固定した 0 でないベクトルとしたとき，H は次の形を持つ．

$$H = \{v \in V | \ \alpha \cdot v = 0\},$$

ここで "$\cdot$" は次のようなドット積で定義されている：

$$\alpha \cdot v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_k) = \sum_{1 \le i \le k} \alpha_i \cdot v_i.$$

アフィン超平面は線形超平面の平行移動として定義出来る．即ちアフィン超平面は

$$J = \{v \in V | \ \alpha \cdot v = a, \ a \in \mathbb{C}\}$$

で定義される．

もし $V \simeq \mathbb{C}^{k+1}$ として，k-次元射影空間 $\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ を考えるときは射影超平面が定義出来る．即ち，$V \simeq \mathbb{C}^{k+1}$ かつ H を k-次元線形部分空間とするとき，射影超平面は

$$\bar{H} = \{P = [U] \in \mathbb{P}(V) | \ U \subset H\}$$

と書ける．この平行移動はアフィン超平面の射影的閉包とも呼ばれる．

$\mathcal{A}$ とかくと超平面配置を表すものとする．$\mathcal{A}$ の部分集合 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ は $\mathcal{A}$ の部分配置という．いま $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ をベクトル空間 V または射影空間 $\mathbb{P}(V)$ 上の超平面配置とする．このとき，$\mathcal{A}$ の次元を V または $\mathbb{P}(V)$ の次元で定義することにする．

$\mathcal{A}$ が generic arrangement であるとは，任意の $1 \le p \le n$ に対し，以下を満たすことである．

$$\{H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_p}\} \subset \mathcal{A}, p \le k \Rightarrow \dim(H_{i_1} \cap H_{i_2}, \cap \ldots, H_{i_p}) = k - p,$$

$$\{H_{i_1}, H_{i_2}, \ldots, H_{i_p}\} \subset \mathcal{A}, p > k \Rightarrow H_{i_1} \cap H_{i_2}, \cap \ldots, H_{i_p} = \emptyset.$$

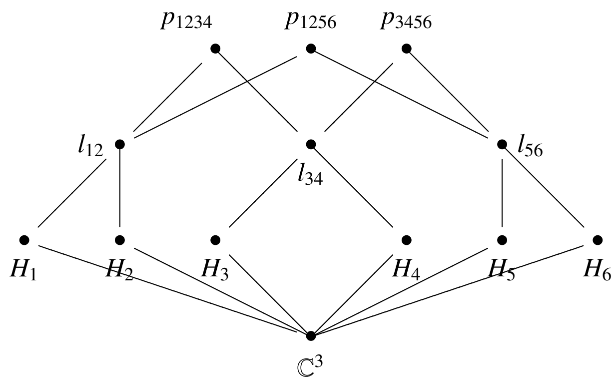

図 1: Intersection semilattice of $\mathcal{L}(\mathcal{A})$

さて超平面配置の組み合わせ論的構造，性質を調べる上では交叉半順序集合 (intersection poset) と呼ばれる半順序集合が用いられる．これは超平面のすべての共通部分を集合の元，順序は逆包含関係によって定義される半順序集合である．即ち．交叉半順序集合とは

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\bigcap_{H\in\mathcal{B}} H \neq \emptyset |\ \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\},$$

$$x < y \iff x \supset y$$

として定まる半順序集合である．順序の入れ方に関しては $x < y \iff x \subset y$ でもって定義しても同値であるが，慣例に従い以上のように定義することに注意する．Combinatorics というときは常にこの交叉半順序集合のことをさすこととする．

さて，一般に超平面配置の交叉半順序集合は特に semilattice の構造を持ち，さらに，超平面配置が中心的，即ちすべての超平面の共通部分が空でないような配置の時，交叉半順序集合は特に lattice の構造を持つ．

交叉半順序集合の例として $\mathbb{C}^3$ の generic arrangement$\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \ldots, H_6\}$ を考えると，図 1 のようにハッセ図を用いた表現ができる．ただし，$l_{ij} = H_i \cap H_j$ は直線，$p_{ijkl} = l_{ij} \cap l_{kl}$ は点をそれぞれ表している．

2.2 Discriminantal arrangement の定義

$\mathcal{A} = \{H_1^0, H_2^0, \ldots, H_n^0\}$ を $\mathbb{C}^k$ の generic arrangement とする．超平面たち $H_1^0, H_2^0, \ldots, H_n^0$ の平行移動全体のなす空間 $\mathbb{S}(H_1^0, ..., H_n^0)$ (H_i^0 が明らか或いは本質的でないときは単純に $\mathbb{S}$ とも書く) とは超平面の n-組 $H_1, ..., H_n$ のなす空間であって任意の $i = 1, ..., n$ に関して $H_i \cap H_i^0 = \emptyset$ または $H_i = H_i^0$ を満たすもの全体がなす空間である．つまり

$$\mathbb{S} = \{(H_1, H_2, \ldots, H_n) |\ H_i \cap H_i^0 = \emptyset \text{ or } H_i = H_i^0 (i = 1, 2, \ldots, n)\}.$$

このとき $\mathbb{S}$ は $\mathbb{C}^n$ と同一視することができ，特に $\mathcal{A}$ における超平面の順番は $\mathbb{S}$ の座標系を決定することが分かる ([11]).

Generic arrangement $\mathcal{A}$ を一つ固定し，generic arrangement ではなくなるような超平面の集合のなす $\mathbb{S}$ の閉部分集合を考えよう．この閉部分集合は，部分集合 $L = \{i_1, \dots, i_{k+1}\} \subset [n] := \{1, \dots, n\}$ に対し $D_L = \{(H_1, H_2, \dots, H_n) \in \mathbb{S} | \bigcap_{i_j \in L \subset [n], |L|=k+1} H_{i_j}\}$ とかける．Discriminantal arrangement はすべての部分集合 L に対する和集合 $\{D_L\}_{L \subset [n], |L|=k+1}$ として定義され，$\mathcal{B}(n, k, \mathcal{A})$ と書かれる．これは Mannin と Schectman らによって導入された [12].

Discriminantal arrangement は normal vector を使って定義することもでき，Bayer と Brandt によって [3] で以下のように与えられた.

Definition 2.1 (Bayer and Brandt [3]). $\mathcal{A} = \{H_1^0, H_2^0, \dots, H_n^0\}$ を $\mathbb{C}^k$ の *generic arrangement* とする．また $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$ をそれぞれ $H_1^0, H_2^0 \dots, H_n^0$ の *normal vector* を表すものとする．ただし，ここで *normal vector* は *section 2.1* で述べたようにドット積を用いて定義している：

$$(\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n) \cdot (v_1, v_2 \dots, v_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i.$$

Discriminantal arrangement $\mathcal{B}(n, k, \mathcal{A})$ とは $\mathbb{C}^n$ の超平面配置であり，各超平面の *normal vector* が次の形で書けるものである.

$$\alpha_L = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \det(\alpha_{s_1}, \dots, \hat{\alpha_{s_i}}, \dots, \alpha_{s_{k+1}}) e_{s_i}, \tag{1}$$

ここで $\{s_1 < s_2 < \dots < s_{k+1}\} \subset [n]$ とし $\{e_j\}_{1 \le j \le n}$ は $\mathbb{C}^n$ の標準基底とし，$\alpha_L \neq 0$ とする.

さて，今から $\mathbb{C}^k$ を $\mathbb{P}^k \setminus H_\infty$ とみることでコンパクト化を考えることにし，超平面としてアフィン超平面 H_i^0 の射影閉包 $\bar{H}_i^0$ が与えられているものとする．$\mathbb{C}^k$ 上の generic arrangement $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ に対し，無限遠における arrangement を $\mathcal{A}_\infty = \{H_{\infty,1}, H_{\infty,2}, \dots, H_{\infty,n}\}$ とする．ここで各 i $(i = 1, 2, \dots, n)$ に対し $H_{\infty,i} = \bar{H}_i^0 \cap H_\infty$ とする．$\mathcal{A}_\infty$ は $\mathbb{P}^k$ 上の超平面の n-組のなす空間における部分空間として，平行移動全体のなす空間 $\mathbb{S}$ を定義する．Generic arrangement $\mathcal{A}_\infty$ に対しても同様の議論で Discriminantal arrangement $\mathcal{B}(n, k, \mathcal{A}_\infty)$ が定義される．Discrimnantal arrangement の combinatorics は $\mathcal{A}_\infty$ に依存することが知られている [11] ため，以後は $\mathcal{B}(n, k, \mathcal{A})$ ではなく $\mathcal{B}(n, k, \mathcal{A}_\infty)$ と記すこととする．$\mathcal{A}$ を generic arrangement とするとき，もし $\mathcal{B}(n, k, \mathcal{A}_\infty)$ の combinatorics が $\mathcal{A}$ に依存するとき，$\mathcal{A}$ を very generic, そうでないとき non very generic と呼ぶ.

2.3 good $3s$-partition と行列 $A(\mathcal{A}_\infty)$

$s \geq 2$，$n \geq 3s$ なる自然数 s, n が与えられたとき集合 $\mathbb{T} = \{L_1, L_2, L_3\}$ を考えよう．ここで L_i は $[n]$ の部分集合であって $|L_i| = 2s$, $|L_i \cap L_j| = s (i \neq j)$, $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \emptyset$ (特に $|\bigcup L_i| = 3s$) を満たし，$L_1 = \{i_1, \dots, i_{2s}\}$, $L_2 = \{i_{s+1}, \dots, i_{3s}\}$, $L_3 = \{i_1, \dots, i_s, i_{2s+1} \dots, i_{3s}\}$ とする．このとき $\mathbb{T} = \{L_1, L_2, L_3\}$ を *good* $3s$*-partition* と呼ぶ.

この記法のもと以下の Lemma が成り立つ.

Lemma 2.2 (Lemma 3.1 [11]). *$s \geq 2$, $n = 3s$, $k = 2s - 1$ が与えられたとし，$\mathcal{A} = \{H_1^0, H_2^0, \ldots, H_n^0\}$ を $\mathbb{C}^k$ の generic arrangement とする．$[n] = [3s]$ とし，good $3s$-partition $\mathbb{T} = \{L_1, L_2, L_3\}$ が与えられたとき，無限遠 H_∞ における，余次元が s となる 3 つの部分空間 $H_{\infty,i,j} = \bigcap_{t \in L_i \cap L_j} H_{\infty,t}$ を考える．このとき $H_{\infty,i,j}$ が H_∞ において真部分空間をなすことと $D_{L_1} \cap D_{L_2} \cap D_{L_3}$ の余次元が 2 になることは同値である. ここで D_{L_i} は $\mathcal{B}(n, k, \mathcal{A}_\infty)$ の超平面を表している.*

注意として，もし $\mathbb{T} = \{L_1, L_2, L_3\}$，$L_1 = \{1,2,3,4\}$, $L_2 = \{1,2,5,6\}$, $L_3 = \{3,4,5,6\}$ が good 6-partition ならば $I_1 = L_1 \cap L_2$, $I_2 = L_2 \cap L_3$，$I_3 = L_1 \cap L_3$ に関して，超平面の共通部分 $\bigcup_{i \in I_1} H_{\infty,i}$, $\bigcup_{j \in I_2} H_{\infty,i}$，$\bigcup_{k \in I_3} H_{\infty,i}$ は H_∞ の真部分空間をなす.

[11] において，次のように dependent という概念が定義されている．$s \geq 2$, $\mathbb{P}^{2s-2}$ 上の generic arrangement $\mathcal{A}_\infty = \{W_{\infty,1}, \ldots, W_{\infty,3s}\}$ について，$[3s]$ の partition I_1, I_2, I_3 であって $P_i = \bigcap_{t \in I_i} W_{\infty,t}$ が $\mathbb{P}^{2s-2}$ の真部分空間を張るとき，$\mathcal{A}_\infty$ は dependent であるという．特に，$\{L_1, L_2, L_3\}$ が good $3s$-partition であるとき $I_1 = L_1 \cap L_2$, $I_2 = L_1 \cap L_3$, $I_3 = L_2 \cap L_3$ とおくと，lemma 2.2 の仮定は $\mathcal{A}_\infty$ が dependent であるということになる.

さて $\mathcal{P}_{k+1}([n]) = \{L \subset [n] \mid |L| = k + 1\}$ を元の個数が $k + 1$ である $[n]$ の部分集合たちのなす集合とする．このとき

$$A(\mathcal{A}_\infty) = (\alpha_L)_{L \in \mathcal{P}_{k+1}([n])} \tag{2}$$

を各行に超平面 D_L の normal vector α_L を持つような行列とし，$A_{\mathbb{T}}(\mathcal{A}_\infty)$ は各行に α_L, $L \in \mathbb{T}$, $\mathbb{T} \subset \mathcal{P}_{k+1}([n])$ を持つような $A(\mathcal{A}_\infty)$ の部分行列とする.

2.4 グラスマン多様体 $Gr(k,n)$ とプリュッカー行列

$Gr(k,n)$ を $\mathbb{C}^n$ の k-次元部分空間全体のなすグラスマン多様体とし，

$$\gamma : Gr(k,n) \to \mathbb{P}(\bigwedge^k \mathbb{C}^n)$$
$$< v_1, \ldots, v_k > \mapsto [v_1 \wedge \cdots \wedge v_k],$$

をプリュッカー埋め込みとする．このとき $[x] \in \mathbb{P}(\bigwedge^k \mathbb{C}^n)$ が $\gamma(Gr(k,n))$ の点であることと写像

$$\varphi_x : \mathbb{C}^n \to \bigwedge^{k+1} \mathbb{C}^n$$

$$v \mapsto v \wedge x$$

の核の次元が k，即ち，$\ker \varphi_x =< v_1, \ldots, v_k >$ であることは同値である．$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{C}^n$ の基底とするとき $e_I = e_{i_1} \wedge \ \ldots \ \wedge e_{i_k}$, $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [n]$, $i_1 < \cdots < i_k$ は $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ の基底であり，$x \in \bigwedge^k \mathbb{C}^n$ は以下のように一意的に書くことができる.

$$x = \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I| = k}} \beta_I e_I = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \beta_{i_1 \ldots i_k} (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}). \tag{3}$$

ここで同次座標β_Iは$\mathbb{C}^n$の順序つき基底$e_1,\dots,e_n$に関する$\mathbb{P}(\bigwedge^k\mathbb{C}^n)=\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$上のプリュッカー座標とする．このとき$\varphi_x$の行列$M_x=(b_{ij})$は$\binom{n}{k+1}\times n$行列で，各行は順序のついた部分集合$I\subseteq[n],|I|=k$について，$i\in I$のとき$b_{ij}=(-1)^i\beta_{I\cup\{j\}\setminus\{i\}}$を，そうでないときは$b_{ij}=0$を成分に持つ．

プリュッカー関係式，即ち$\dim(\ker\varphi_x)=k$となる条件はM_xの全ての$(n-k+1)\times(n-k+1)$小行列式が0になることである．よく知られているように(例えば[6])プリュッカー関係式は次数2の関係式であり，以下のように書くことができる．

任意の$(i_1,\dots,i_{k-1},j_0,\dots,j_k)$に対し

$$\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\beta_{i_1\dots i_{k-1}j_l}\beta_{j_0\dots\hat{j}_l\dots j_k}=0 \tag{4}$$

Remark 2.3. 方程式*(1)*におけるベクトルα_Lはプリュッカー行列M_xにおける$I=L$に対応する超平面D_Lに直交する，すなわち

$$A(\mathcal{A}_\infty)=M_x$$

であることに注意する．

この理由から，以後$A(\mathcal{A}_\infty)$のことをプリュッカー行列と呼ぶことにする．特に$\det(\alpha_{s_1},\dots,\hat{\alpha_{s_i}},\dots,\alpha_{s_{k+1}})$はプリュッカー座標$\beta_I, I=\{s_1,s_2,\dots,s_{k+1}\}\backslash\{s_i\}$である．

2.5 例

$\mathbb{C}^3$上のgeneric arrangement $\mathcal{A}=\{H_1^0,H_2^0,\dots,H_6^0\}$と各超平面のnormal vector $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3})$, $1\le i\le 6$を考えよう．いま，$H_i^{t_i}$を超平面H_i^0をα_iの方向に沿って平行移動して得られる超平面，すなわち$H_i^{t_i}=H_i^0+t_i\alpha_i, t_i\in\mathbb{C}$とする．

$\mathbb{T}=\{L_1,L_2,L_3\}$を[6]のgood 6-partitionとし，$L_1=\{1,2,3,4\},L_2=\{1,2,5,6\},L_3=\{3,4,5,6\}$としよう．このとき，

$$A_{\mathbb{T}}(\mathcal{A}_\infty)=\begin{pmatrix}\alpha_{L_1}\\ \alpha_{L_2}\\ \alpha_{L_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\beta_{234}&\beta_{134}&-\beta_{124}&\beta_{123}&0&0\\ -\beta_{256}&\beta_{156}&0&0&-\beta_{126}&\beta_{125}\\ 0&0&-\beta_{456}&\beta_{356}&-\beta_{346}&\beta_{345}\end{pmatrix},\quad \beta_{ijk}=\det\begin{pmatrix}a_{i1}&a_{j1}&a_{k1}\\ a_{i2}&a_{j2}&a_{k2}\\ a_{i3}&a_{j3}&a_{k3}\end{pmatrix}$$

はプリュッカー行列$A(\mathcal{A}_\infty)$の部分行列である．

$\alpha_i\times\alpha_j$をα_i,α_jのクロス積とし，$(\alpha_i\times\alpha_{i+1})$と書いて行列$\begin{pmatrix}\alpha_1\times\alpha_2\\ \alpha_3\times\alpha_4\\ \alpha_5\times\alpha_6\end{pmatrix}$を表すことにする．

このときα_iとα_jはそれぞれH_iとH_jの直交ベクトルなので$\alpha_i\times\alpha_j$は直線$H_i\cap H_j$の方向ベクトルであり，$\mathrm{rank}A_{\mathbb{T}}(\mathcal{A}_\infty)=2$であることと$\mathrm{rank}(\alpha_i\times\alpha_{i+1})=2$であることは同値である．

実際$\mathrm{rank}A_{\mathbb{T}}(\mathcal{A}_\infty)=2$であることは$\mathrm{codim}\,(D_{L_1}\cap D_{L_2}\cap D_{L_3})=2$と同値であるのでLemma 2.2より点たち$\bigcap_{i\in L_1\cap L_2}\bar{H}_i^{t_i}\cap H_\infty=\bar{H}_3^{t_3}\cap\bar{H}_4^{t_4}\cap H_\infty$, $\bigcap_{i\in L_1\cap L_3}\bar{H}_i^{t_i}\cap H_\infty=\bar{H}_1^{t_1}\cap\bar{H}_2^{t_2}\cap H_\infty$, $\bigcap_{i\in L_2\cap L_3}\bar{H}_i^{t_i}\cap H_\infty=\bar{H}_5^{t_5}\cap\bar{H}_6^{t_6}\cap H_\infty$が同一直線上に存在する．即ち，$H_i^{t_i}\cap H_{i+1}^{t_{i+1}}$の方向ベクトルたちは一次従属であるから，$\mathrm{rank}(\alpha_i\times\alpha_{i+1})=2$を得る．(図2).

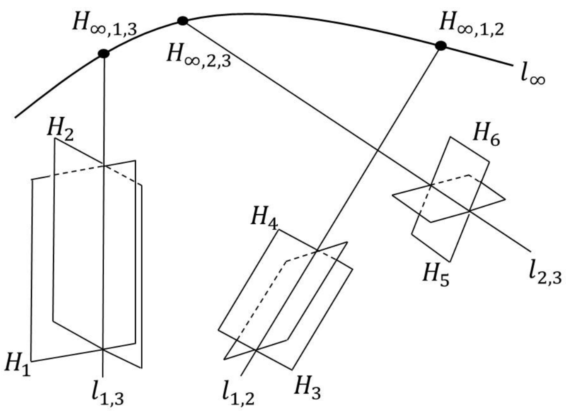

図 2: Picture of case $\mathcal{B}(6,3,\mathcal{A}_\infty^0)$

さて，$A_{\mathbb{T}}(\mathcal{A}_\infty)$ の階数が 2 であることと $A_{\mathbb{T}}(\mathcal{A}_\infty)$ のすべての 3 次小行列式がすべて 0 になることは同値である. これは即ち β_{ijk} が以下の方程式系の根であることになる：

$$\begin{cases}-\beta_{456}(\beta_{134}\beta_{256}-\beta_{234}\beta_{156})=0\\ \beta_{356}(\beta_{134}\beta_{256}-\beta_{234}\beta_{156})=0\\ -\beta_{346}(\beta_{134}\beta_{256}-\beta_{234}\beta_{156})=0\\ \beta_{345}(\beta_{134}\beta_{256}-\beta_{234}\beta_{156})=0\\ -\beta_{256}(\beta_{124}\beta_{356}-\beta_{123}\beta_{456})=0\\ \beta_{234}\beta_{126}\beta_{456}+\beta_{124}\beta_{256}\beta_{346}=0\\ -(\beta_{234}\beta_{125}\beta_{456}+\beta_{124}\beta_{256}\beta_{345})=0\\ -(\beta_{234}\beta_{126}\beta_{356}+\beta_{123}\beta_{256}\beta_{346})=0\\ \beta_{234}\beta_{125}\beta_{356}+\beta_{123}\beta_{256}\beta_{345}=0\\ -\beta_{234}(\beta_{125}\beta_{346}-\beta_{126}\beta_{345})=0\end{cases}\quad\text{and}\quad\begin{cases}\beta_{156}(\beta_{124}\beta_{356}-\beta_{123}\beta_{456})=0\\ -(\beta_{134}\beta_{126}\beta_{456}+\beta_{124}\beta_{156}\beta_{346})=0\\ \beta_{134}\beta_{125}\beta_{456}+\beta_{124}\beta_{156}\beta_{345}=0\\ \beta_{134}\beta_{126}\beta_{356}+\beta_{123}\beta_{156}\beta_{346}=0\\ -(\beta_{134}\beta_{125}\beta_{356}+\beta_{123}\beta_{156}\beta_{345})=0\\ \beta_{134}(\beta_{125}\beta_{346}-\beta_{126}\beta_{345})=0\\ -\beta_{126}(\beta_{124}\beta_{356}-\beta_{123}\beta_{456})=0\\ \beta_{125}(\beta_{124}\beta_{356}-\beta_{123}\beta_{456})=0\\ -\beta_{124}(\beta_{125}\beta_{346}-\beta_{126}\beta_{345})=0\\ \beta_{123}(\beta_{125}\beta_{346}-\beta_{126}\beta_{345})=0\end{cases}\tag{5}$$

3　主結果：グラスマン多様体 $Gr(3,n)$ の超曲面

$\mathcal{A}$ を section 2.5 で考えたように $\mathbb{C}^3$ 上の 6 枚の超平面の generic arrangement とする． 行列

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{61} & a_{62} & a_{63}\end{pmatrix}\tag{6}$$

を各行に超平面 $H_i^0\in\mathcal{A}$ の normal vector α_i を持つような行列とする．$\mathcal{A}$ は generic であるので，A の列は一次独立な $\mathbb{C}^6$ のベクトルであり，$\mathbb{C}^6$ に 3 次元の部分空間を張る．即ち，グラスマン多様体

$Gr(3,6)$ の点が得られる．A の 0 でない 3 次小行列式はプリュッカー座標 β_{ijk} であり，$A(\mathcal{A}_\infty)$ は

$$\varphi_x : \mathbb{C}^6 \to \bigwedge^4 \mathbb{C}^6$$

$$v \mapsto v \wedge x,$$

の行列である．ここで $x = \sum_{1\le i<j<k\le n} \beta_{ijk}(e_i \wedge e_j \wedge e_k)$ とする．

もし $\mathcal{A}_\infty$ が dependent ならば β_{ijk} は古典的なプリュッカー関係式と方程式系 (5) の両方を満たさないといけない．ここで後者の方程式系は以下のように簡略化することができる:

$$(I):\begin{cases}(a):\beta_{134}\beta_{256}-\beta_{234}\beta_{156}=0\\(b):\beta_{124}\beta_{356}-\beta_{123}\beta_{456}=0\\(c):\beta_{125}\beta_{346}-\beta_{126}\beta_{345}=0\end{cases}\quad\text{and}\quad(II):\begin{cases}(d):\beta_{234}\beta_{126}\beta_{456}+\beta_{124}\beta_{256}\beta_{346}=0\\(e):\beta_{234}\beta_{125}\beta_{456}+\beta_{124}\beta_{256}\beta_{345}=0\\(f):\beta_{234}\beta_{126}\beta_{356}+\beta_{123}\beta_{256}\beta_{346}=0\\(g):\beta_{234}\beta_{125}\beta_{356}+\beta_{123}\beta_{256}\beta_{345}=0\\(h):\beta_{134}\beta_{126}\beta_{456}+\beta_{124}\beta_{156}\beta_{346}=0\\(i):\beta_{134}\beta_{125}\beta_{456}+\beta_{124}\beta_{156}\beta_{345}=0\\(j):\beta_{134}\beta_{126}\beta_{356}+\beta_{123}\beta_{156}\beta_{346}=0\\(k):\beta_{134}\beta_{125}\beta_{356}+\beta_{123}\beta_{156}\beta_{345}=0\end{cases}.$$

更に簡単な計算により (a) から (k) の式はすべて (a) の式一本に簡略化することができる．従って以下の式を得る．

$$\beta_{134}\beta_{256}-\beta_{234}\beta_{156}=0. \tag{7}$$

この一本の式 (a) への簡略化の議論は次の Lemma の直接の結果である．

Lemma 3.1 (Lemma 5.1 [10])**.** $\mathcal{A}$ を $\mathbb{C}^3$ 上の n 枚の超平面の *generic arrangement* とし，$A(\mathcal{A}_\infty)$ をそのプリュッカー行列とする．また $\{i_1, i_2, \dots, i_6\} \subset [n]$ を選び，$\mathbb{T} = \{L_1, L_2, L_3\}$，$L_1 = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}, L_2 = \{i_1, i_2, i_5, i_6\}, L_3 = \{i_3, i_4, i_5, i_6\}$ を *good* 6*-partition* とする．もし $A(\mathcal{A}_\infty)$ の成分 β_I がプリュッカー関係式を満たすとき $\mathrm{rank}A_{\mathbb{T}}(\mathcal{A}_\infty) = 2$ と $A_{\mathbb{T}}(\mathcal{A}_\infty)$ の全ての *3* 次小行列式のうちどれか一つが *0* になることは同値である．

Remark 3.2. もし $\mathcal{A}$ が $\mathbb{C}^3$ 上の n 枚の超平面の *generic arrangement* であるとき行列 $A(\mathcal{A}_\infty)$ は $\binom{n}{4} \times n$ 行列であって，任意の $L = \{s_1 < s_2 < s_3 < s_4\}$ に関し行ベクトル α_L の成分 $(x_1, \dots, x_n)$ は $x_{i_j} = (-1)^j \beta_{I_j}, I_j = L \setminus \{s_j\}, j = 1,2,3,4$ を除いてすべて *0* である．従って任意の固定した *6* つの添え字 $s_1 < \dots < s_6 \in [n]$ に関し $A(\mathcal{A}_\infty)$ の部分行列として $\binom{6}{4} \times 6$ のものを得ることになる．ここでこの部分行列は各行が $\alpha_L, L \subset \{s_1, \dots, s_6\}, |L| = 4$ からなり，列は第 $s_1, \dots, s_6$ 列をとることで得られる行列である *(*行列 $(\alpha_L)_{L\subset\{s_1,\dots,s_6\},|L|=4}$ の全ての j 列目（$j \notin \{s_1, \dots, s_6\}$）は *0* である）. 以上から，一般に $\mathbb{C}^3$ 上の n 枚の超平面の配置を考えたとしても，本質的には $n = 6$ の場合に帰着することが分かる．

一方で簡単な注意として，$s_1 < \dots < s_6 \in [n]$ を *6* つの固定された添え字とし，$\mathbb{T} = \{\{s_1, s_2, s_3, s_4\}, \{s_1, s_2, s_5, s_6\}, \{s_3, s_4, s_5, s_6\}\}$ を *good 6-partition* とする（これは添え字集合 $\{1, \dots 6\}$ の場合で言うと

$\{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\}\}$ に対応する）．このとき，$\{s_1,\ldots,s_6\}$ 上の *good* 6-*partition* は次の形をしている．

$$\sigma.\mathbb{T} = \{\{i_1,i_2,i_3,i_4\},\{i_1,i_2,i_5,i_6\},\{i_3,i_4,i_5,i_6\}\} \tag{8}$$

ただし $i_j = \sigma(s_j)$, $\sigma \in \mathbf{S_6}$．$\mathbf{S_6}$ は $\{s_1,\ldots,s_6\}$ の入れ替え全体のなす群である． ここで，一般に i_j は順序付けられているとは限らず，$i_j > i_{j+1}$ の場合もあり得ることに注意する．

このとき以下の Lemma が従う．

Lemma 3.3 (Lemma 5.3 [10])**.** $\mathcal{A}$ を $\mathbb{C}^3$ 上 n 枚の超平面の *generic arrangement* とし，$\sigma.\mathbb{T} = \{\{i_1,i_2,i_3,i_4\},\{i_1,i_2,i_5,i_6\},\{i_3,i_4,i_5,i_6\}\}$ を添え字集合 $s_1 < \ldots < s_6 \in [n]$ の *good* 6-*partition* とし，$\mathrm{rank}A_{\sigma.\mathbb{T}}(\mathcal{A}_\infty) = 2$ を満たすとする．このとき $\mathcal{A}$ は次の式が定義する超曲面における点になる．

$$\beta_{i_1i_3i_4}\beta_{i_2i_5i_6} - \beta_{i_2i_3i_4}\beta_{i_1i_5i_6} = 0 \quad . \tag{9}$$

Remark 3.2 と Lemma 3.3 から次の主定理を示すことができる．

Theorem 3.4 (Theorem 5.4 [10])**.** $\mathbb{C}^3$ の超平面配置を考える．このとき *dependent* な部分配置を含むような *generic arrangement* の集合は，グラスマン多様体 $Gr(3,n)$ の超曲面の点の集合であって，各成分はグラスマン多様体と二次曲面との共通部分になっている．

参考文献

[1] C. A. Athanasiadis. The Largest Intersection Lattice of a Discriminantal Arrangement, Beiträge Algebra Geom., 40 (1999), no. 2, 283–289.

[2] A. Bachemand and W. Kern, Adjoints of oriented matroids, Combinatorica 6 (1986) 299–308.

[3] M. Bayer and K.Brandt, Discriminantal arrangements, fiber polytopes and formality, J. Algebraic Combin. 6 (1997), 229–246.

[4] H.Crapo, Concurrence geometries , Adv. in Math., 54 (1984), no. 3, 278–301.

[5] M. Falk, A note on discriminantal arrangements, Proc. Amer. Math. Soc., 122 (1994), no.4, 1221-1227.

[6] Joe Harris, Algebraic Geometry: A First Course, Springer-Verlag.

[7] M. Kapranov, V.Voevodsky, Braided monoidal 2-categories and Manin-Schechtman higher braid groups, Journal of Pure and Applied Algebra, 92 (1994), no. 3, 241–267.

[8] Y. Kawamata, Shaeikukannokikagaku (Geometry in projective space), Asakura Publishing Co., Ltd.

[9] R.J. Lawrence, A presentation for Manin and Schechtman's higher braid groups, MSRI pre-print (1991): http://www.ma.huji.ac.il/ ruthel/papers/premsh.html .

[10] S. Sawada, S. Settepanella and S. Yamagata, Discriminantal arrangement, 3×3minors of Plücker matrix and hypersurfaces in Grassmannian Gr(3,n), C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 355 (2017) 1111-1120.

[11] A. Libgober and S. Settepanella, Strata of discriminantal arrangements, arXiv:1601.06475 .

[12] Yu. I. Manin and V. V. Schectman, Arrangements of Hyperplanes, Higher Braid Groups and Higher Bruhat Orders, Advanced Studies in Pure Mathematics 17, 1989 Algebraic Number Theory in honor K. Iwasawa pp. 289-308.

[13] P. Orlik, Introduction to arrangements, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., 72, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1989).

[14] P.Orlik,H.Terao, Arrangements of hyperplanes, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]." 300, Springer-Verlag, Berlin, (1992).

[15] M. Perling, Divisorial Cohomology Vanishing on Toric Varieties, Documenta Math. 16 (2011), 209–251.